УДК 519.213.2

В. И. А н

О МОМЕНТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЙСА

Получено выражение для нечетных моментов распределения Райса через обобщенные многочлены Чебышева–Лагерра и модифицированные функции Бесселя первого рода.

Распределение Райса используется при вычислениях в различных областях науки и техники, в частности в лазерной атмосферной связи и статистической радиотехнике [1, 2].

Известно [2], что для райсовской случайной величины с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{xa}{\sigma^2}\right), \quad x > 0, \ \ a > 0,$$

где $I_0\left(x\right)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, существуют начальные моменты всех порядков:

$$m_k = Ex^k = \\ = \int\limits_0^\infty x^k p\left(x\right) dx = \left(2\sigma^2\right)^{k/2} \Gamma\left(1 + k/2\right) \Phi\left(-k/2, 1; -u\right), \qquad (1) \\ k = 1, 2, \ldots;$$

здесь $u = a^2/\left(2\sigma^2\right)$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Phi(b, c; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция от x с параметрами b и c.

Для решения многих задач, таких как вычисление характеристической функции, кумулянтов и др., необходимо знание моментов всех порядков. В этих случаях вместо выражения (1), содержащего вырожденную гипергеометрическую функцию, как правило, используют другие представления моментов распределения Райса. Так, четные моменты обычно выражаются через многочлены Чебышева–Лагерра:

$$m_{2n} = \left(2\sigma^2\right)^n n! L_n\left(-u\right), \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

а нечетные моменты — через модифицированные функции Бесселя первого рода. Они могут быть последовательно вычислены по рекуррентной формуле [3]

$$m_{r+2} = 2\sigma^2\left(r + 1 + u\right) m_r - \sigma^4 r^2 m_{r-2}, \ \ r = 2, 3, \ldots .$$

Приведем первые шесть нечетных моментов:

$$m_1 = \sqrt{\pi/2}\sigma e^{-u/2}\left((u+1)\, I_0\left(u/2\right) + uI_1\left(u/2\right)\right),$$
$$m_3 = \sqrt{\pi/2}\sigma^3 e^{-u/2}\left(\left(2u^2+6u+3\right) I_0\left(u/2\right) + \left(2u^2+4u\right) I_1\left(u/2\right)\right),$$
$$m_5 = \sqrt{\pi/2}\sigma^5 e^{-u/2}\Big((4u^3+28u^2+45u+15)I_0(u/2)+$$
$$+(4u^3+24u^2+23u)I_1(u/2)\Big),$$
$$m_7 = \sqrt{\pi/2}\sigma^7 e^{-u/2}\Big(\left(8u^4+104u^3+376u^2+420u+105\right) I_0\left(u/2\right)+$$
$$+\left(8u^4+96u^3+284u^2+176u\right) I_1\left(u/2\right)\Big),$$
$$m_9 = \sqrt{\pi/2}\sigma^9 e^{-u/2}\Big((16u^5+336u^4+2220u^3+5484u^2+4725u+$$
$$+945)I_0(u/2)+(16u^5+320u^4+1908u^3+3720u^2+1689u)I_1(u/2)\Big),$$
$$m_{11} = \sqrt{\pi/2}\sigma^{11} e^{-u/2}\Big((32u^6+992u^5+10512u^4+46944u^3+88674u^2+$$
$$+62370u+10395)I_0(u/2)+(32u^6+960u^5+9568u^4+$$
$$+37824u^3+54774u^2+19524u)I_1(u/2)\Big).$$

В настоящей работе получена формула для непосредственного вычисления нечетного момента любого порядка по его номеру.

Теорема. *Если*

$$m_1 = \sqrt{\pi/2}\sigma e^{-u/2}\left((u+1)\, I_0\left(u/2\right) + uI_1\left(u/2\right)\right),$$

$$m_3 = \sqrt{\pi/2}\sigma^3 e^{-u/2}\left(\left(2u^2+6u+3\right) I_0\left(u/2\right) + \left(2u^2+4u\right) I_1\left(u/2\right)\right)$$

и для любого $k = 1, 2, \ldots$ *выполнено*

$$m_{2k+3} = 2\sigma^2\left(2k+2+u\right) m_{2k+1} - \sigma^4\left(2k+1\right)^2 m_{2k-1}, \qquad (2)$$

то для любого $n = 0, 1, \ldots$ *имеем*

$$m_{2n+1} =$$
$$= \sqrt{\pi/2}\sigma^{2n+1} e^{-u/2}\left(\left((u+1)\, d_n + f_n\right) I_0\left(u/2\right) + ud_n I_1\left(u/2\right)\right), \qquad (3)$$
$$d_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\left((2k-1)!!\right)^2}{k!}(n-k)! \cdot 2^{n-2k} D^{2k}\left(L_n^1\left(-u\right)\right), \qquad (4)$$
$$f_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} (-1)^k \frac{\left((2k-1)!!\right)^2}{k!} k\,(n-k)! \cdot 2^{n-2k+1} D^{2k}\left(L_{n+1}^1\left(-u\right)\right), \qquad (5)$$

где $[x]$ *— целая часть от* x*,*

$$L_m^\alpha(x) = (1/m!)\, x^{-\alpha} e^x D^m \left(x^{\alpha+m} e^{-x}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, \quad \alpha > -1,$$

— обобщенные многочлены Чебышева–Лагерра.

Для доказательства теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $d_0 = 1$, $d_1 = 2L_1^1(-u)$ *и для любого* $k = 1, 2, \ldots$ *выполнено соотношение* $d_{k+1} = 2(2k+2+u)d_k - (2k+1)^2\, d_{k-1}$, *то справедливо равенство (4).*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции, пользуясь следующими формулами [4]:

$$L_0^\alpha(x) \equiv 1, \;\; D^{2k}\left(L_n^1(x)\right) = L_{n-2k}^{1+2k}(x),$$
$$n = 1, 2, \ldots,\; k = 0, 1, \ldots, [n/2],$$
$$L_{n-1}^1(x) = D^2\left(L_{n+1}^1(x) - 2L_n^1(x) + L_{n-1}^1(x)\right), \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

и рекуррентным соотношением для обобщенных многочленов Чебышева–Лагерра [4]:

$$(n+1-2k)\, D^{2k}\left(L_{n+1}^1(x)\right) =$$
$$= (2n+2+u-2k)\, D^{2k}\left(L_n^1(x)\right) - (n+1)\, D^{2k}\left(L_{n-1}^1(x)\right).$$

Для $n = 0$ и $n = 1$ утверждение леммы выполнено в силу ее условия.

Предположим, что оно справедливо для некоторых $n-1$, n, $n \in \{2, 3, \ldots\}$.

Для упрощения обозначений при доказательстве леммы будем опускать аргументы многочленов $L_{n-1}^1(-u)$, $L_n^1(-u)$, $L_{n+1}^1(-u)$. Тогда

$$d_{n+1} = 2(2n+2+u) \sum_{k=0}^{(n/2)} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k)! \cdot 2^{n-2k} D^{2k}(L_n^1) -$$
$$- (2n+1)^2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k-1)! \times$$
$$\times 2^{n-2k-1} D^{2k}(L_{n-1}^1). \qquad (6)$$

Поскольку $(2n+1)^2 = (2k+1)^2 + 4(n-k)(n+1+k)$, то

$$(2n+1)^2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k-1)! \cdot 2^{n-2k-1} D^{2k}(L_{n-1}^1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k-1)! \cdot 2^{n-2k-1}(2k+1)^2 \times$$

$$\times D^{2k+2}(L_{n+1}^1 - 2L_n^1 + L_{n-1}^1) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{((n-1)/2)} (-1)^k \frac{[(2k-1)!!]^2}{k!} (n-k)! \cdot 2^{n-2k+1}(n+1+k) D^{2k}(L_{n-1}^1) =$$

$$= - \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{(k-1)!} (n-k)! \times$$

$$\times 2^{n-2k+1} D^{2k}(L_{n+1}^1 - 2L_n^1 + L_{n-1}^1) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k)! \times$$

$$\times 2^{n-2k+1}(n+1+k) D^{2k}(L_{n-1}^1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k)! \cdot 2^{n-2k+1}((n+1) D^{2k}(L_{n-1}^1) -$$

$$- k D^{2k}(L_{n+1}^1 - 2L_n^1)).$$

Подставляя последнее выражение в равенство (6), получаем

$$d_{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k)! \cdot 2^{n-2k+1} \Big((2n+2+u) D^{2k}(L_n^1) +$$

$$+ k D^{2k}(L_{n+1}^1) - 2k D^{2k}(L_n^1) - (n+1) D^{2k}(L_{n-1}^1) \Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{k!} (n-k+1)! \cdot 2^{n-2k+1} D^{2k}(L_{n+1}^1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $f_0 = 0$, $f_1 = -1$ и для любого $k = 1, 2, \ldots$ выполняется соотношение $f_{k+1} = 2(2k+2+u)f_k - (2k+1)^2 f_{k-1}$, то справедливо равенство (5).*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Доказательство теоремы. Доказательство проведем по индукции. Нетрудно видеть, что для $n = 0$ и $n = 1$ утверждение теоремы справедливо, так как $d_0 = 1$, $f_0 = 0$, $d_1 = 2L_1^1(-u) = 2u + 4$, $f_1 = -1$. Предположим, что для некоторых $n - 1$, n, $n \in \{2, 3, ...\}$, выполнено

$$m_{2n-1}=\sqrt{\pi/2}\sigma^{2n-1}e^{-u/2}\left(\left((u+1)\,d_{n-1}+f_{n-1}\right)I_0\left(u/2\right)+ud_{n-1}I_1\left(u/2\right)\right),$$
$$m_{2n+1}=\sqrt{\pi/2}\sigma^{2n+1}e^{-u/2}\left(\left((u+1)\,d_n+f_n\right)I_0\left(u/2\right)+ud_nI_1\left(u/2\right)\right).$$

Подставив последние выражения в равенство (2), получим

$$\begin{aligned}
&m_{2n+3} = \\
&= \sqrt{\pi/2}\sigma^{2n+3}e^{-u/2}\Big(\Big(2(2n+2+u)d_n - (2n+1)^2 d_{n-1}\Big)(u+1)+ \\
&+ \Big(2(2n+2+u)f_n - (2n+1)^2 f_{n-1})\Big)I_0(u/2)+ \\
&+ \Big(2(2n+2+u)d_n - (2n+1)^2 d_{n-1}\Big)uI_1(u/2)\Big) = \\
&= \sqrt{\pi/2}\sigma^{2n+3}e^{-u/2}\left(\left((u+1)\,d_{n+1}+f_{n+1}\right)I_0\left(u/2\right)+ud_{n+1}I_1\left(u/2\right)\right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Далее приведены первые шесть коэффициентов d_n и f_n:

$$\begin{aligned}
&d_0 = L_0^1(-u) \equiv 1, \\
&d_1 = 2L_1^1(-u) = 2u+4, \\
&d_2 = 8L_2^1(-u) - L_0^3(-u) = 4u^2 + 24u + 23, \\
&d_3 = 48L_3^1(-u) - 4L_1^3(-u) = 8u^3 + 96u^2 + 284u + 176, \\
&d_4 = 384L_4^1(-u) - 24L_2^3(-u) + 9L_0^5(-u) = \\
&\quad = 16u^4 + 320u^3 + 1908u^2 + 3720u + 1689, \\
&d_5 = 3840L_5^1(-u) - 192L_3^3(-u) + 54L_1^5(-u) = \\
&\quad = 32u^5 + 960u^4 + 9568u^3 + 37824u^2 + 54774u + 19524, \\
&f_0 = 0, \\
&f_1 = -L_0^3(-u) \equiv -1, \\
&f_2 = -2L_1^3(-u) = -(2u+8), \\
&f_3 = -8L_2^3(-u) + 9L_0^5(-u) = -\left(4u^2 + 40u + 71\right), \\
&f_4 = -48L_3^3(-u) + 36L_1^5(-u) = \\
&\quad = -\left(8u^3 + 144u^2 + 684u + 744\right), \\
&f_5 = -384L_4^3(-u) + 216L_2^5(-u) - 225L_0^7(-u) = \\
&\quad = -\left(16u^4 + 448u^3 + 3924u^2 + 11928u + 9129\right).
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинрикус Х. В. Шумы в лазерных информационных системах. – М.: Радио и связь, 1987. – 108 с.
2. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.: Радио и связь, 1974. – 552 с.
3. Коротков Н. Е. Совершенствование аппарата для исследований, связанных с законами распределения Райса и Релея // Теория и техника радиосвязи. – 1998. – Вып. 2. – С. 61–71.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 296 с.

Статья поступила в редакцию 31.10.2002

Вячеслав Ильич Ан родился в 1952 г., окончил в 1974 г. Воронежский государственный университет и в 1993 г. Воронежский политехнический институт. Канд. техн. наук, докторант кафедры “Радиотехнические системы и устройства” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ.

V.I. An (b. 1952) graduated from the Voronezh State University in 1974 and Voronezh Polytechnic Institute in 1993. Ph. D. (Eng.), doctoral student of “Radio Engineering Systems and Devices” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 15 publications.