

В. В. Миняев

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ АТМОСФЕРЫ С УЧЕТОМ ВЛАЖНОСТИ ВОЗДУХА

Предложены формулы для расчета давления, плотности и скорости звука влажного воздуха. Формулы справедливы для тропосферы и представлены как функции геометрической высоты. Рассчитаны высотные профили параметров насыщенного влагой воздуха, проведен их качественный и количественный сопоставительный анализ с аналогичными параметрами сухого воздуха стандартной атмосферы. Даны рекомендации по применению формул.

Значения параметров атмосферы по высоте вычисляются по формулам, полученным для стандартной атмосферы [1] — в предположении, что воздух является абсолютно сухим. В действительности же воздух всегда содержит некоторое количество паров воды, и его параметры отличаются от стандартных значений. Влажность воздуха необходимо учитывать при специальных баллистических расчетах, поскольку она влияет на плотность воздуха, скорость звука, скоростной напор и, в конечном счете, на величину аэродинамической силы, действующей на движущееся в воздухе тело. Цель настоящей работы состоит в получении формул для расчета параметров влажного воздуха как функций геометрической высоты.

Влажность. В случае стандартной атмосферы воздух полагают абсолютно сухим. Относительная влажность r_c стандартной атмосферы принимается равной 0%.

Во влажном воздухе концентрация водяного пара зависит от температуры и высоты. У поверхности Земли при высокой температуре концентрация водяного пара может достигать 4% по объему, а с понижением температуры и с увеличением высоты она быстро уменьшается [1, 2]. Почти вся влага, содержащаяся в воздухе, сосредоточена в пределах тропосферы, геометрическая высота h которой определяется множеством [1]

$$H_T = \{ h \mid h_0 \leq h \leq h_1, \quad h_0 = 0 \text{ м}, \quad h_1 = 11019 \text{ м} \}.$$

Содержание водяных паров в воздухе оценивают по относительной влажности (в %):

$$r = \frac{100e_B(t)}{E(t)}, \quad (1)$$

где t — температура воздуха, в градусах Цельсия; e_B — парциальное давление водяных паров в воздухе при температуре t , Па; E — парциаль-

ное давление насыщенных водяных паров в воздухе при температуре t , Па.

В табл. 1 приведена зависимость парциального давления E насыщенных водяных паров в воздухе от температуры [3]. С увеличением температуры парциальное давление E монотонно возрастает. Например, при изменении температуры от 0 до +30 °С оно увеличивается почти в семь раз.

Зависимость парциального давления насыщенных водяных паров от температуры воздуха t аппроксимируем полиномами второй степени:

$$E(t) = a_{0,i} + a_{1,i}(t - t_{r,i}) + a_{2,i}(t - t_{r,i})^2, \quad t \in T_r = \bigcup_{i=1}^6 T_{r,i},$$

$$T_{r,i} = \{t \mid t_{r,i} \leq t \leq t_{r,i+1}\}, \quad (2)$$

где $a_{0,i}$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$ — коэффициенты полиномов; $T_{r,i}$ — поддиапазоны температур воздуха.

Значения коэффициентов полиномов $a_{0,i}$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$ для температурных поддиапазонов $T_{r,i}$ приведены в табл. 2.

Пусть на высоте $h_0 \in H_T$ измерены температура t_0 и относительная влажность r_0 воздуха. Тогда парциальное давление водяных паров в воздухе может быть определено по формуле

$$e_b(t_0) = e_{b0} = r_0 E(t_0), \quad t_0 \in T_r, \quad r_0 \in R_r = \{r \mid 0\% \leq r \leq 100\%\}. \quad (3)$$

При подъеме на высоту $h \geq h_0$ парциальное давление паров воды в воздухе уменьшается. Предлагается его вычислять по эмпирической формуле

$$e_b(h) = e_{b0} e^{r_h(h-h_0)} = r_0 E(t_0) e^{r_h(h-h_0)},$$

$$h_0, h \in H_T, \quad r_0 \in R_r, \quad t_0 \in T_r, \quad (4)$$

где $r_h = -0,000461 \text{ м}^{-1}$ — высотная постоянная влажного воздуха; e — основание натурального логарифма.

Формула (4) обеспечивает вычисление парциального давления водяных паров $e_b(h)$ в воздухе на высоте $h \in H_T$ над средним уровнем моря по измеренным на высоте $h_0 \leq h$ относительной влажности r_0 и температуре t_0 воздуха с абсолютной погрешностью $|\Delta e_b(h)| \leq 35 \text{ Па}$ ($\cong 0,26 \text{ мм рт. ст.}$).

Зависимость $E(h)$ парциального давления от высоты, рассчитанная при температуре воздуха на среднем уровне моря $t_0 = +15 \text{ °С}$, приведена в табл. 3. При возрастании высоты до 10 км парциальное давление насыщенных водяных паров уменьшается в 100 раз. При этом

Таблица 1

Зависимости парциального давления $E(t)$ насыщенных паров, плотности $\rho(t)$ сухого воздуха, плотности $\rho_E(t)$ насыщенного влагой воздуха, скорости звука $a(t)$ в сухом воздухе, скорости звука $a_E(t)$ в насыщенном влагой воздухе от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	T, K	$E(t), \text{Па}$	$E(t), \text{мм рт. ст.}$	$\rho(t), \text{кг/м}^3$	$\rho_E(t), \text{кг/м}^3$	$a(t), \text{м/с}$	$a_E(t), \text{м/с}$
-50	223,15	4	0,03	1,58182	1,58180	299,463	299,465
-30	243,15	40	0,30	1,45149	1,45149	312,595	312,618
-20	253,15	107	0,80	1,39437	1,39381	318,958	319,021
-10	263,15	260	1,95	1,34138	1,34008	325,197	325,355
-5	268,15	401	3,01	1,31637	1,31440	328,272	328,518
0	273,15	611	4,58	1,29227	1,28932	331,318	331,696
5	278,15	872	6,54	1,26904	1,26491	334,337	334,882
10	283,15	1230	9,21	1,24663	1,24091	337,329	338,106
15	288,15	1710	12,8	1,22500	1,21719	340,294	341,384
20	293,15	2330	17,5	1,20411	1,19364	343,234	344,736
25	298,15	3170	23,8	1,18391	1,16991	346,148	348,213
30	303,15	4240	31,8	1,16164	1,14326	349,039	351,833
40	313,15	7370	55,3	1,12720	1,09621	354,749	359,729
50	323,15	12300	92,5	1,09232	1,04220	360,369	368,933

Аппроксимированное представление зависимости парциального давления E насыщенных водяных паров в воздухе от температуры t

Диапазон температур	Коэффициенты полинома		
	$a_{0,i}$, Па	$a_{1,i}$, Па/°C	$a_{2,i}$, Па/°C ²
$T_{r,1} = \{t -30^\circ\text{C} \leq t \leq -10^\circ\text{C}\}$	40	2,4	0,43
$T_{r,2} = \{t -10^\circ\text{C} \leq t \leq 0^\circ\text{C}\}$	260	21,3	1,38
$T_{r,3} = \{t 0^\circ\text{C} \leq t \leq +10^\circ\text{C}\}$	611	42,5	1,94
$T_{r,4} = \{t +10^\circ\text{C} \leq t \leq +20^\circ\text{C}\}$	1230	82	2,8
$T_{r,5} = \{t +20^\circ\text{C} \leq t \leq +30^\circ\text{C}\}$	2330	145	4,6
$T_{r,6} = \{t +30^\circ\text{C} \leq t \leq +50^\circ\text{C}\}$	4240	223	9

Таблица 3

Зависимости парциального давления $E(h)$ насыщенных водяных паров в воздухе, ускорения свободного падения $g(h)$, геопотенциальной высоты $H(h)$, абсолютной температуры воздуха $T(h)$ от высоты

h , м	$E(h)$, Па	$g(h)$, м/с ²	$H(h)$, м'	$T(h)$, К
0	1710	9,80665	0	288,15
1000	1078	9,80375	999,8	281,66
2000	680	9,80050	1999,4	275,17
3000	429	9,79742	2998,5	268,68
4000	270	9,79434	3997,5	262,19
5000	171	9,79127	4996,1	255,70
6000	108	9,78819	5994,4	249,21
7000	68	9,78511	6992,3	242,72
8000	43	9,78203	7990,0	236,23
9000	27	9,77896	8987,3	229,74
10000	17	9,77588	9984,3	223,25
11000	11	9,77280	10981,0	216,76

доля парциального давления насыщенных водяных паров в воздухе падает от значения $E(h_0)100/p(h_0) = 1710 \cdot 100/101325 = 1,69\%$ до $17 \times 100/26500 = 0,06\%$, т.е. примерно в 25 раз.

Получим формулы для вычисления основных параметров влажной атмосферы. За начальные значения при расчетах примем параметры стандартной атмосферы [1] для среднего уровня моря, которые приведены в табл. 4.

Зависимости давления воздуха $p(h)$ для стандартной барометрической формулы и $p_g(h)$ для уточненной барометрической формулы, плотности сухого $\rho(h)$ и плотности $\rho_E(h)$ насыщенного влагой воздуха, скорости звука $a(h)$ в сухом и скорости звука $a_E(h)$ в насыщенном влагой воздухе от высоты

h , м	$p(h)$, Па	$p_g(h)$, Па	$\rho(h)$, кг/м ³	$\rho_E(h)$, кг/м ³	$a(h)$, м/с	$a_E(h)$, м/с
0	101325,0	101325,0	1,22500	1,217185	340,294	341,385
1000	89876,3	89877,0	1,11166	1,106591	336,435	337,205
2000	79501,4	79502,8	1,00655	1,003257	332,532	333,081
3000	70121,2	70123,4	0,909254	0,907108	328,584	328,977
4000	61660,4	61663,4	0,819347	0,817951	324,589	324,874
5000	54048,3	54051,9	0,736429	0,735525	320,545	320,753
6000	47217,6	47221,7	0,660111	0,659534	316,452	316,604
7000	41105,3	41109,6	0,590018	0,589659	312,306	312,417
8000	35651,6	35656,0	0,525786	0,525574	308,105	308,186
9000	30800,7	30804,9	0,467063	0,466953	303,848	303,905
10000	26499,9	26503,8	0,413510	0,413470	299,532	299,569
11000	22699,9	22703,3	0,364801	0,364809	295,154	295,173

Уравнение состояния атмосферы. Воздух в случае стандартной атмосферы полагают идеальным газом. Зависимость между метеорологическими элементами идеального газа определяют уравнением Менделеева–Клайперона

$$pV = \frac{m}{M}R^*T, \quad (5)$$

где p — давление идеального газа (сухого воздуха), Па; V — объем газа, м³; m — масса газа в рассматриваемом объеме, кг; $M = 0,028964420$ кг/моль — молярная масса газа (сухого воздуха); $R^* = 8,31432$ Дж/(кг · К) — универсальная газовая постоянная.

Универсальную газовую постоянную R^* выразим через удельную газовую постоянную воздуха

$$R = \frac{R^*}{M} = \frac{8,31432}{0,028964420} = 287,05287 \quad \text{Дж/(кг · К)}. \quad (6)$$

Удельная газовая постоянная (6) не изменяется в пределах тропосферы, так как с высотой газовый состав сухого воздуха не изменяется.

Массу m и объем V воздуха выразим через плотность воздуха (в кг/м^3):

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (7)$$

С учетом соотношений (6) и (7) уравнение Менделеева–Клапейрона (5) принимает вид (в Па)

$$p = \rho RT \quad (8)$$

и называется уравнением состояния атмосферы.

Ускорение свободного падения. Ускорение свободного падения уменьшается при увеличении высоты. В случае стандартной атмосферы зависимость ускорения свободного падения задается функцией обратных квадратов

$$g(h) = g_c \left(\frac{r}{r+h} \right)^2, \quad (9)$$

где $g_c = 9,80665 \text{ м/с}^2$ — стандартное ускорение свободного падения на географической широте $B_c = 45^\circ 32' 33''$; $r = 6356767 \text{ м}$ — условный радиус Земли.

Функцию обратных квадратов (9) заменим линейной зависимостью

$$g(h) = g_0 + G_g h = 9,80665 - 0,000003077h, \quad h \in H_T, \quad (10)$$

где $g_0 = g_c = 9,80665 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения на среднем уровне моря; G_g — градиент ускорения свободного падения по высоте, вычисляемый в точке $h = h_1/2 = 11019/2 \approx 5510 \text{ м}$ (соответствующей половине высоты тропосферы) по формуле

$$G_g = \frac{dg}{dh} = - \frac{2g_0 r^2}{(r+h)^3} = - \frac{2 \cdot 9,80665 \cdot 6356767^2}{(6356767 + 5510)^3} = -0,000003077 \text{ с}^{-2}.$$

Относительная методическая погрешность при замене формулы (9) линейной зависимостью (10) не превышает 0,00006%.

В табл. 3 приведена зависимость $g(h)$ ускорения свободного падения от высоты, рассчитанная по линейной формуле (10). При увеличении высоты до 10 км ускорение свободного падения уменьшается на $0,03077 \text{ м/с}^2$, т.е. на 0,31%.

Высота. В случае стандартной атмосферы для упрощения процедур, связанных с определением параметров атмосферы по высоте, введем потенциал силы тяжести или геопотенциал, характеризующий потенциальную энергию материальной точки. Для этого произвольной точке пространства с координатами x, y, z поставим в соответствие потенциал силы тяжести $\Phi(x, y, z)$. Поверхность, описываемая уравнением $\Phi(x, y, z) = \text{const}$, имеет одинаковый потенциал во всех точках

и называется изопотенциальной или геопотенциальной поверхностью. Если от некоторой точки, расположенной на геопотенциальной поверхности с потенциалом Φ_1 , перейти по внешней нормали к соседней бесконечно близкой точке, расположенной на геопотенциальной поверхности с потенциалом $\Phi_2 = \Phi_1 + d\Phi$, то для переноса единицы массы с первой поверхности на вторую необходимо произвести удельную работу

$$d\Phi = g(h)dh, \quad (11)$$

где h — геометрическая высота, отсчитываемая от среднего уровня моря.

Интегрируя выражение (11), получим $\Phi = \int_0^h g(h)dh$.

Единица измерения геопотенциала — $\text{м}^2/\text{с}^2$. Разделим геопотенциал Φ на стандартное ускорение свободного падения g_c и получим величину, которую называют геопотенциальной высотой:

$$H = \frac{\Phi}{g_c} = \frac{1}{g_c} \int_0^h g(h)dh. \quad (12)$$

За начало отсчета геопотенциальной высоты, как и геометрической, принимается средний уровень моря. Геопотенциальная высота имеет размерность длины ($\dim H = L^2T^{-2}L^{-1}T^2 = L$), которая совпадает с размерностью геометрической высоты. Однако размеры геопотенциальной и геометрической метра не совпадают. Поэтому геопотенциальную высоту выражают в так называемых геопотенциальных метрах, добавляя к его сокращенной записи штрих.

Для установления зависимости между геопотенциальной и геометрической высотой подставим в формулу (12) зависимость (9) ускорения свободного падения от геометрической высоты h . После интегрирования получим

$$H = \frac{rh}{r+h}. \quad (13)$$

При изменении геометрической высоты в бесконечных пределах $h \in [0, \infty)$ геопотенциальная высота изменяется в конечных пределах $H \in [0, r)$.

Решая уравнение (13) относительно h , получим обратную зависимость геометрической высоты от геопотенциальной высоты:

$$h = \frac{rH}{r-H}. \quad (14)$$

При увеличении высоты размер геометрического метра остается постоянным, а размер геопотенциального метра убывает от размера геометрического метра (на среднем уровне моря) до нуля (при бесконечно большой высоте). Действительно, на среднем уровне моря приращению геометрической высоты $\Delta h = 1$ м соответствует приращение геопотенциальной высоты

$$\Delta H \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{dH}{dh} \Delta h = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{r}{r+h} \right)^2 \cdot 1 = 1 \text{ м}',$$

а при бесконечном возрастании высоты такому же приращению геометрической высоты соответствует нулевое приращение геопотенциальной высоты:

$$\Delta H \approx \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{dH}{dh} \Delta h = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{r+h} \right)^2 \cdot 1 = 0 \text{ м}'.$$

В табл. 3 приведены рассчитанные по формуле (13) значения геопотенциальной высоты $H(h)$. Чем больше высота, тем больше различие между числовыми значениями геометрической и геопотенциальной высот. Например, геометрической высоте $h = 0$ м соответствует геопотенциальная высота $H = 0$ м', а геометрической высоте $h = 10000$ м — геопотенциальная высота $H = 9984,3$ м', т.е. числовое значение H меньше числового значения h на 0,16%. На этой высоте $1 \text{ м}' = 0,996861$ м.

В случае стандартной атмосферы давление, температура и другие параметры воздуха определены как функции геопотенциальной высоты. В пределах тропосферы все параметры влажной атмосферы можно представить функциями геометрической высоты.

Температура. В случае стандартной атмосферы для тропосферы установлен средний закон изменения температуры воздуха в виде линейной функции геопотенциальной высоты:

$$T(H) = T_0 + \beta_1(H - H_0), \quad (15)$$

где T — кинетическая температура воздуха, К; $T_0 = T_c = 288,15$ К — кинетическая температура воздуха на среднем уровне моря; $\beta_1 = = dT/dH = -0,0065$ К/м' — градиент кинетической температуры по геопотенциальной высоте; H — текущая геопотенциальная высота, м'; H_0 — геопотенциальная высота нижней границы рассматриваемого слоя (для среднего уровня моря $H_0 = 0$ м').

Зависимость (15) температуры от геопотенциальной высоты H заменим функцией геометрической высоты h и получим

$$T(h) = T_0 + \beta_h(h - h_0) = 288,15 - 0,00649(h - h_0), \quad (16)$$

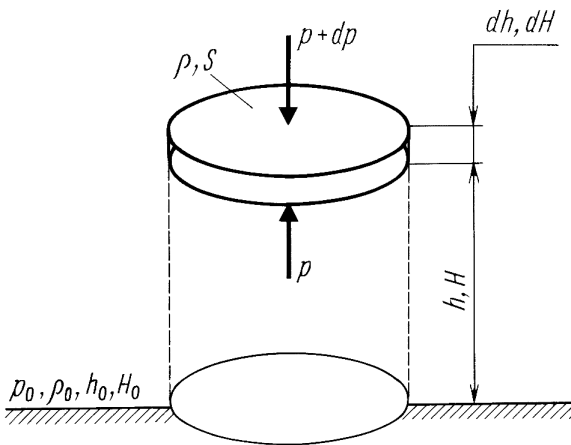


Схема равновесия элементарного объема воздуха

где $\beta_h = -0,00649$ К/м — градиент кинетической температуры по геометрической высоте; h , h_0 — геометрические высоты, соответствующие геопотенциальным высотам H и H_0 .

Рассчитанная по формуле (16) зависимость $T(h)$ абсолютной температуры воздуха от высоты приведена в табл. 3. При увеличении высоты до 10 км температура воздуха уменьшается на 64,9 К, т.е. на 22,5%. Сравнение зависимости $T(h)$ с зависимостью $T(H)$, приведенной для случая стандартной атмосферы в работе [1], показывает, что относительная методическая погрешность расчета температуры при переходе от формулы (15) к формуле (16) не превышает 0,006%.

Уравнение равновесия атмосферы. Земная атмосфера находится в непрерывном движении. В случае стандартной атмосферы для вывода зависимости давления и температуры воздуха от высоты принимают так называемую гипотезу равновесия атмосферы, согласно которой воздух неподвижен, т.е. сила тяжести рассматриваемого объема воздуха уравнивается разностью давлений на ее нижнее и верхнее основания.

Выделим (см. рисунок) на геопотенциальной высоте H цилиндрический объем воздуха высотой dH с площадью основания S . Плотность воздуха в выделенном элементарном объеме равна ρ .

Для рассматриваемого объема согласно гипотезе равновесия атмосферы запишем следующее уравнение:

$$(p + dp)S - pS + \rho g S dH = 0. \quad (17)$$

Из уравнения состояния атмосферы (8) найдем плотность воздуха:

$$\rho = \frac{p}{RT}. \quad (18)$$

Подставив формулу плотности воздуха (18) в уравнение (17), после проведения несложных преобразований получим уравнение равновесия атмосферы:

$$-\frac{dp}{p} = g \frac{dH}{RT}; \quad (19)$$

здесь знак “минус” показывает, что с увеличением высоты давление уменьшается.

Давление. В случае стандартной атмосферы для тропосферы зависимость давления p от геопотенциальной высоты H определяется барометрической формулой. Получим ее.

Подставив в уравнение (19) зависимость (15) температуры воздуха от геопотенциальной высоты и полагая в пределах тропосферы ускорение свободного падения постоянным ($g = g_0 = g_c = \text{const}$), получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными:

$$-\frac{dp}{p} = \frac{g_0}{R} \frac{dH}{T_0 + \beta_1 (H - H_0)}. \quad (20)$$

Проинтегрировав левую часть уравнения по давлению в пределах от p_0 до p , а правую — по геопотенциальной высоте в пределах от H_0 до H , имеем

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{R} \int_{H_0}^{H_1} \frac{dH}{T_0 + \beta_1 (H - H_0)}$$

(здесь p_1, H_1 — текущие значения давления и геопотенциальной высоты), или окончательно

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\beta_1}{T_0} (H - H_0) \right)^{-\frac{g_0}{R\beta_1}}. \quad (21)$$

Соотношение (21) называют стандартной барометрической формулой. Она получена при условии, что в пределах тропосферы ускорение силы тяжести остается постоянным. Теперь получим барометрическую формулу для геометрической высоты, при этом учтем изменение ускорения силы тяжести с изменением высоты.

В соответствии с рисунком уравнение равновесия атмосферы (19) справедливо также для геометрической высоты:

$$-\frac{dp}{p} = g \frac{dh}{RT}. \quad (22)$$

С учетом линейных зависимостей ускорения свободного падения (10) и температуры (16) от высоты уравнение (22) примет следующий вид:

$$-\frac{dp}{p} = \frac{(g_0 + G_g h)}{R(T_0 + \beta_h h)} dh. \quad (23)$$

Проинтегрировав левую часть уравнения (23) по давлению в пределах от p_0 до p , а правую — по геометрической высоте в пределах от h_0 до h , получим формулу

$$p = p_0 e^{-\left(\frac{G_g}{\beta_h}(h-h_0) + \frac{g_0 \beta_h - T_0 G_g}{\beta_h^2} \ln \frac{T(h)}{T_0}\right)},$$

которую после упрощающих преобразований представим в следующем виде:

$$p = p_0 \left(\left(\frac{T(h)}{T_0} \right)^{\frac{T_0 G_g - g_0 \beta_h}{R \beta_h^2}} e^{-\frac{G_g}{R \beta_h}(h-h_0)} \right). \quad (24)$$

Учитывая линейную зависимость (16) температуры от геометрической высоты и зависимость (24), получим искомую барометрическую формулу для геометрической высоты:

$$p = p_0 \left(\left(1 + \frac{\beta_h}{T_0}(h-h_0) \right)^{\frac{T_0 G_g - g_0 \beta_h}{R \beta_h^2}} e^{-\frac{G_g}{R \beta_h}(h-h_0)} \right). \quad (25)$$

Из уточненной барометрической формулы (25) следует, что давление воздуха не зависит от его влажности.

Для стандартных метеорологических и геофизических условий (СМГУ), т.е. для $h_0 = 0$ м, $p_0 = p_c = 101325$ Па, $T_0 = 288,15$ К, $\beta_h = -0,00649$ К/м, $g_0 = g_c = 9,80665$ м/с², $G_g = -0,000003077$ с⁻², давление воздуха можно вычислить по следующей зависимости:

$$p = 101325 \left(\left(1 - 2,2522 \cdot 10^{-5}(h-h_0) \right)^{5,190646} e^{-1,65166 \cdot 10^{-6}(h-h_0)} \right). \quad (26)$$

В табл. 4 для сравнения приведены зависимость $p(h)$ давления от высоты для стандартной атмосферы и зависимость $p_g(h)$, рассчитанная по уточненной формуле (26), для СМГУ. Сравнительный анализ показывает, что на высоте 10 км разница давлений составляет 3,9 Па, или 0,015 %.

Плотность. В случае стандартной атмосферы плотность воздуха рассчитывается с учетом давления и температуры с помощью уравнения (18). Стандартная плотность воздуха составляет $\rho_c = 1,225$ кг/м³.

Получим формулу плотности для влажного воздуха. Рассмотрим два одинаковых объема $V_1 = V_2 = V$. В объеме V_1 содержится сухой воздух массой m_1 . Молярная масса сухого воздуха составляет $M = 0,028964420$ кг/моль. В объеме V_2 содержатся пары воды массой m_2 . Молярная масса воды составляет $M_e = 0,01801578$ кг/моль. Давления и температуры газов в обоих объемах одинаковы: $p_1 = p_2 = p$; $T_1 = T_2 = T$. Согласно закону Авогадро в обоих объемах содержится

одинаковое количество вещества $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (моль). Плотности газов в объемах составляют

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{M\nu}{V}, \quad \rho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{M_e\nu}{V},$$

а их отношение имеет вид

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_e}{M} = \frac{0,01801534}{0,028964420} = 0,622 \approx \frac{5}{8}.$$

Таким образом, при одинаковых условиях плотность водяных паров составляет примерно 5/8 от плотности сухого воздуха.

На основании закона Дальтона для влажного воздуха получим

$$p = p_1 + e_{\text{в}}, \quad (27)$$

где p — барометрическое давление влажного воздуха, Па; p_1 — парциальное давление сухого воздуха, Па; $e_{\text{в}}$ — парциальное давление водяных паров, Па.

Плотность сухого воздуха в рассматриваемом объеме с учетом формул (18) и (27) выражается следующим образом:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT} = \frac{p - e_{\text{в}}}{RT}.$$

Плотность водяных паров в рассматриваемом объеме при одинаковых с воздухом давлениях и температурах и при отсутствии воздуха составляет

$$\rho_2 = 0,622\rho_1 = 0,622\frac{e_{\text{в}}}{RT}.$$

Тогда искомая формула плотности влажного воздуха примет следующий вид:

$$\rho_e = \rho_1 + \rho_2 = \frac{p - e_{\text{в}}}{RT} + 0,622\frac{e_{\text{в}}}{RT} = \frac{1}{RT}(p - 0,378e_{\text{в}}). \quad (28)$$

Таким образом, при одинаковых давлениях и температурах плотность ρ_e влажного воздуха всегда меньше плотности сухого воздуха.

Подставив в формулу (28) соотношения (24), (4) и (15), получим зависимость плотности влажного воздуха от геометрической высоты:

$$\rho_e = \frac{p_0}{RT_0} \left(\left(1 + \frac{\beta_h}{T_0}(h - h_0) \right)^{\frac{T_0 G g - g_0 \beta_h}{R \beta_h^2} - 1} e^{-\frac{G g}{R \beta_h}(h - h_0)} \right) \times \left(1 - 0,378 \frac{e_{\text{в}0}}{p_0} \frac{e^{\left(r_h + \frac{G g}{R \beta_h} \right) (h - h_0)}}{\left(1 + \frac{\beta_h}{T_0}(h - h_0) \right)^{\frac{T_0 G g - g_0 \beta_h}{R \beta_h^2}}} \right). \quad (29)$$

Для СМГУ плотность ρ_e насыщенного влагой воздуха ($r_0 = 100\%$; $e_{в0} = E(T_0) = E_{в0} = 1710$ Па) можно рассчитать по формуле

$$\rho_e = \rho_E = 1,225 \left((1 - 2,2522 \cdot 10^{-5} h)^{4,190646} e^{-1,65166 \cdot 10^{-6} h} \right) \times \left(1 - 0,006379 \frac{e^{-0,000459 h}}{(1 - 2,2522 \cdot 10^{-5} h)^{5,190646}} \right). \quad (30)$$

Зависимости плотности сухого $\rho(t)$ и насыщенного влагой воздуха $\rho_E(t)$ от температуры для СМГУ представлены в табл. 1. При низких температурах значения плотностей близки, однако с увеличением температуры разница между этими значениями увеличивается: при 0°C плотность влажного воздуха на $0,23\%$ меньше плотности сухого воздуха, при 30°C — на $1,58\%$.

Зависимости плотности сухого $\rho(h)$ и насыщенного влагой воздуха $\rho_E(h)$ от высоты для СМГУ приведены в табл. 4. На среднем уровне моря ($h_0 = 0$ м) плотность влажного воздуха меньше плотности сухого воздуха на $0,007815$ кг/м³, т.е. на $0,64\%$. В верхних слоях тропосферы разница между $\rho(h)$ и $\rho_E(h)$ уменьшается до незначительной величины.

При подъеме на высоту 10 км плотность сухого воздуха уменьшается от $1,225$ кг/м³ до $0,41351$ кг/м³, т.е. на $66,2\%$, а плотность влажного воздуха от $1,21719$ кг/м³ до $0,41347$ кг/м³, т.е. на 66% .

Скорость звука. Процесс распространения звука в воздухе можно считать адиабатическим, поскольку температура, изменения которой связаны со сжатиями–разрежениями в звуковой волне, не успевает установиться за период. Поэтому в случае стандартной атмосферы для вычисления скорости звука в сухом воздухе (скорости распространения бесконечно малого возмущения) используют формулу, полученную Лапласом для идеального газа:

$$a = \sqrt{x \frac{p}{\rho}} = \sqrt{x \frac{R^* T}{M}} = \sqrt{x R T} = 20,046796 \sqrt{T} \quad \text{м/с}, \quad (31)$$

где $x = C_p/C_V = 1,4$ (показатель адиабаты) — отношение удельных теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме. Как видно из формулы (31), скорость звука в сухом воздухе зависит только от абсолютной температуры воздуха.

Стандартная скорость звука составляет $a_c = 340,294$ м/с. При комнатной температуре скорость звука возрастает примерно на $0,17\%$ с увеличением температуры на 1°C .

В смеси газов скорость звука зависит от концентрации компонентов. Получим формулу скорости звука для влажного воздуха, который также считаем идеальным газом. Подставив в формулу Лапласа (31)

выражение (29) для плотности влажного воздуха, имеем

$$a_e = \sqrt{x \frac{p}{\rho_e}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1 - 0,378e_B}{p}}}. \quad (32)$$

где a — скорость звука в сухом воздухе.

Из соотношения (32) видно, что при одинаковом атмосферном давлении скорость звука во влажном воздухе всегда больше, чем в сухом воздухе. С учетом зависимостей (4), (24) и (29) формулу (32) представим как функцию геометрической высоты:

$$a_e = a \left(\frac{\left(1 + \frac{\beta_h}{T_0}(h - h_0)\right)^{\frac{T_0 G_g - g_0 \beta_h}{R \beta_h^2} + 1}}{\left(1 + \frac{\beta_h}{T_0}(h - h_0)\right)^{\frac{T_0 G_g - g_0 \beta_h}{R \beta_h^2}} - 0,378 \frac{e_{B0}}{p_0} e^{\left(r_h + \frac{G_g}{R \beta_h}\right)}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

Для СМГУ и насыщенного влагой воздуха зависимость скорости звука от высоты имеет следующий вид:

$$a_e = a_E = 340,294 \sqrt{\frac{(1 - 2,2522 \cdot 10^{-5} h)^{6,190646}}{(1 - 2,2522 \cdot 10^{-5} h)^{5,190646} - 0,006379 - 0,000459}}}. \quad (34)$$

Рассчитанные по формулам (32) и (34) зависимости скорости звука $a(t)$ в сухом воздухе и скорости звука $a_E(t)$ в насыщенном влагой воздухе от температуры на среднем уровне моря приведены в табл. 1. Чем выше температура, тем больше скорость звука и тем больше разница между скоростью звука во влажном воздухе и скоростью звука в сухом воздухе. В диапазоне температур $0 \dots +30^\circ\text{C}$ эта разница изменяется от 0,378 м/с (0,11%) до 2,794 м/с (0,80%). При этом скорость звука в сухом воздухе возрастает на 17,72 м/с (на 5,3%), а скорость звука во влажном воздухе — на 20,15 м/с (на 6,1%).

Зависимости $a(h)$ и $a_E(h)$ скорости звука от высоты для СМГУ приведены в табл. 4. На среднем уровне моря скорость звука во влажном воздухе выше, чем в сухом воздухе, на 1,091 м/с, т.е. на 0,32%. С высотой эта разница скоростей уменьшается до незначительной величины.

Заметим, что для других значений $r_0 \in R_r = \{r \mid 0\% \leq r \leq 100\%\}$ относительной влажности воздуха графики зависимостей плотности и скорости звука от высоты будут располагаться между ограничивающими графиками зависимостей, один из которых соответствует сухому воздуху, а другой — насыщенному влагой воздуху.

Выводы. 1. С увеличением высоты парциальное давление водяных паров в воздухе быстро уменьшается (на верхней границе тропосферы — более чем в 100 раз). При изменении влажности изменяются два параметра воздуха: плотность и скорость звука, причем плотность влажного воздуха меньше плотности сухого воздуха, а скорость звука во влажном воздухе больше, чем в сухом. Давление и температура воздуха от его влажности не зависят.

2. Влияние влажности воздуха на параметры атмосферы следует учитывать только в пределах тропосферы. При этом наибольшее отклонение параметров влажного воздуха от параметров сухого воздуха имеет место в приземном слое. На верхней границе тропосферы это влияние незначительно.

3. Предложенные формулы (2), (4), (10), (16), (25), (29), (33) для вычисления параметров атмосферы справедливы для тропосферы и представлены как функции геометрической высоты, что удобно для расчетов. По формулам (25) и (33) могут быть рассчитаны таблицы параметров влажной атмосферы (при значениях относительной влажности $r_0 \in R_r = \{r \mid 0\% \leq r \leq 100\%\}$), как приложения к ГОСТ 4401–81 “Атмосфера стандартная. Параметры”.

4. Приведенные формулы рекомендуется использовать при специальных баллистических расчетах, когда значения параметров воздуха по высоте вычисляются с учетом данных высотного зондирования атмосферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 4401–81. Атмосфера стандартная. Параметры. – М.: Изд-во стандартов, 1981. – 179 с.
2. М и н я е в В. В. Условия работы авиаприборов. – Челябинск-70: Московский инженерно-физический институт (Отделение №6), 1986. – 62 с.
3. Д ж а н к о л и Д. Физика. Т.1. – М.: Мир, 1989. – 653 с.

Статья поступила в редакцию 13.02.2003



Виктор Владимирович Миняев родился в 1950 г., окончил в 1978 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Электрооборудование артиллерийских комплексов” Филиала Военного артиллерийского университета, начальник сектора Морского научно-исследовательского института радиоэлектроники “Альтаир”. Автор более 70 научных работ в области приборостроения и автоматического управления.

V.V. Minyaev (b. 1950) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1978. Ph. D. (Eng.), ass. professor of "Electrical Equipment of Artillery Complexes" department of the Affiliation of Military Artillery University, head of sector in "Altair" Naval Research Center for Radio- Electronics. Author of over 70 publications in the field of instrument engineering and automatic control.