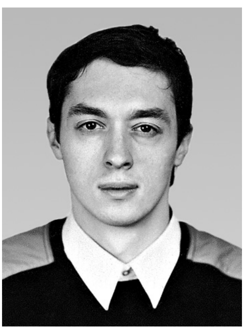
13. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
14. T h a u F. E. Observing the state of non-linear dynamic systems // Int. J. Control. – 1973. – № 17. – P. 471–479.
15. R a g h a v a n S., H e d r i c k J. K. Observer design for a class of nonlinear systems // Int. J. Control. – 1994. – V. 59. – № 2. – P. 515–528.
16. R a j a m a n i R. Observers for Lipschitz nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1998. – V. 43. – № 3. – P. 397–401.
17. A r c a k M., K o k o t o v i ć P. V. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities // IEEE Trans. Autom. Contr. – 2001. – V. 46. – № 7. – P. 1146–1150.
18. S o n t a g E. D. Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1989. – V. 34. – P. 435–443.
19. K h a l i l H. K. Nonlinear systems. – N. Y.: Prentice-Hall, 1996.
20. M a r i n o R., T o m e i P. Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust. – London: Prentice-Hall, 1995.
21. К р и щ е н к о А. П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Сер. Технич. кибернетика. – 1985. – № 6. – С. 103–112.

Статья поступила в редакцию 31.01.2003



Алексей Евгеньевич Голубев родился в 1978 г., окончил в 2002 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех научных работ в области стабилизации нелинейных динамических систем обратной связью по выходу.

A.Ye. Golubev (b. 1978) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Post-graduate of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of output feedback control of nonlinear dynamical systems.

УДК 519.872

В. В. Ч а п л ы г и н

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $SM/MSP/1/r$[1]

Рассмотрена однолинейная система массового обслуживания с полумарковским входящим потоком, марковским процессом обслуживания и накопителем конечной или бесконечной емкости. Для этой системы с помощью метода построения вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных характеристик обслуживания.

Описание системы. Рассмотрим систему массового обслуживания $SM/MSP/1/r$ $(r \leq \infty)$ с накопителем емкости r.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №02-07-90147).

Опишем полумарковский процесс генерации заявок. Рассмотрим полумарковский процесс, функционирующий на конечном множестве состояний — фаз обслуживания $\{1, 2, \ldots, m\}$, $m < \infty$, и управляемый стохастической матрицей переходных вероятностей (матрицей переходных вероятностей вложенной цепи Маркова) $M = (M_{ij}), i, j = \overline{1, m}$, с полумарковским ядром $B(x) = (B_{ij}(x)), i, j = \overline{1, m}$, где M_{ij} — вероятность перехода с i-й фазы на j-ю, а $B_{ij}(x)$, $i, j = \overline{1, m}$, — условная функция распределения времени генерации заявки на i-й фазе при условии, что процесс генерации заявок перейдет с i-й фазы на j-ю. Далее обозначим через $B_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \tilde{B}_{ij}(x)$ безусловную функцию распределения времени пребывания процесса генерации заявок на i-й фазе, где $\tilde{B}_{ij}(x) = M_{ij} B_{ij}(x)$.

Будем полагать, что матрица M неразложима и непериодична, $b_{ij} = \int\limits_0^{\infty} t dB_{ij}(t) < \infty$ для любых $i, j = \overline{1, m}$. Кроме того, для простоты изложения будем предполагать, что для любых $i, j = \overline{1, m}$ функция распределения $B_{ij}(t)$ абсолютно непрерывна. Вектор стационарных вероятностей цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей M будем обозначать через $\vec{\pi}^a$.

Марковский процесс обслуживания заявок определяется следующим образом. Имеется марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом l состояний (фаз обслуживания). Тогда если в некоторый момент в системе на обслуживании находится $k, k \geq 1$, заявок и фаза обслуживания i-я, $i = \overline{1, l}$, то за "малое" время Δ с вероятностью $\lambda_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j-ю, $j = \overline{1, l}$, и при этом заявка будет продолжать обслуживаться, а с вероятностью $n_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j-ю, $j = \overline{1, l}$, но обслуживание заявки закончится, и она покинет систему. Матрицы из элементов λ_{ij} и n_{ij} будем обозначать через Λ и N; введем матрицу $\Lambda^* = \Lambda + N$, причем матрицу Λ^* будем полагать неразложимой, а матрицу N — ненулевой. Будем считать также, что на свободном периоде фаза обслуживания не изменяется. Вектор стационарных вероятностей марковского процесса обслуживания заявок (т.е. марковского процесса с инфинитиземальной матрицей Λ^*) будем обозначать через $\vec{\pi}^s$. Тогда стационарная интенсивность μ обслуживания заявок имеет вид $\mu = (\vec{\pi}^s)^{\mathrm{T}} N \vec{1}$.

Заявки обслуживаются в порядке поступления (дисциплина $FCFS$). Заявка, поступающая в систему, в которой уже находится $r + 1$ заявок (одна на приборе и r в накопителе), теряется.

Для $SM/MSP/1/r$ далее получены стационарные распределения числа заявок в системе по моментам изменения состояний вложенной цепи Маркова и по времени, а также стационарные распределения времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе.

Система $SM/MSP/1/r$ является обобщением системы $G/MSP/1/r$ ($r \leq \infty$). В работе [1] система $G/MSP/1/r$ исследована методом введения дополнительной переменной, и для конечного числа мест ожидания, т.е. для $r < \infty$, получено стационарное распределение длины очереди. В работе [2] для $G/MSP/1/r$ с помощью построения вложенной цепи Маркова получены стационарные распределения числа заявок в системе по моментам изменения состояний вложенной цепи Маркова и по времени и времен ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

Процедура вычисления экспоненциальных моментов подробно описана в работе [3] для системы $MAP/G/1/r$, которая является двойственной к системе $G/MSP/1/r$ [3, 4].

Конечный накопитель. Рассмотрим последовательные моменты $\tau_n,\ n \geqslant 0$, поступления заявок в систему.

Пусть $\eta(t)$ — фаза, на которой находится полумарковский процесс прихода заявок, $\xi(t)$ — фаза обслуживания заявок в момент времени t, $\nu(t)$ — число заявок в системе в этот момент. Определим случайные величины $\eta_n = \eta(\tau_n + 0)$, $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$ и $\nu_n = \nu(\tau_n + 0)$, соответствующие фазе прихода, фазе обслуживания и числу заявок в системе непосредственно после момента поступления n-й заявки. Кроме того, положим $\zeta_n = (\eta_n, \xi_n, \nu_n)$. Тогда последовательность $\{\zeta_n,\ n \geq 0\}$ образует однородную цепь Маркова, которую будем называть вложенной цепью Маркова.

Очевидно, что

$$\mathcal{X} = (i, j, k), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, l}, \quad k = \overline{1, R},$$

где $\mathcal{X}$ — множество состояний вложенной цепи Маркова; индексы $i,\ j$ и k соответствуют фазе прихода заявок, фазе обслуживания и числу заявок в системе непосредственно после момента поступления заявок.

Рассмотрим матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $\{\zeta_n,\ n \geq 0\}$. Для этого определим следующие матрицы. $F_k(x)$ — матрица, элемент $(F_k(x))_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время x обслужится ровно k заявок и процесс обслуживания перейдет на j-ю фазу при условии, что в начальный момент в системе число заявок превышает k (вместе с заявками на приборе), процесс обслуживания находится на i-й фазе и за время x не заканчивается обслуживание заявки на приборе. A_k — квадратная матрица размером $ml \times ml$, где элемент $(A_k)_{ij}$, $i = l(u-1)+v$, $j = l(n-1)+q$, $v, q = \overline{1, l}$, $u, n = \overline{1, m}$, представляет собой вероятность того, что за время между поступлениями заявок обслужится ровно k заявок и процесс обслуживания перейдет на q-ю фазу при условии, что в начальный момент в системе число заявок превышает k и процесс обслуживания находится на v-й фазе, а процесс поступления заявок перешел с u-й фазы на n-ю. $F_k^*(x)$ и A_k^* — матрицы, аналогичные матрицам $F_k(x)$ и A_k, но соответствующие условию, что в начальный момент в системе было ровно k заявок.

Матрицы $F_k(x)$ и $F_k^*(x)$ определяются соотношениями

$$F_0(x) = e^{\Lambda x},$$

$$F_k(x) = \int_0^x F_{k-1}(y) N F_0(x-y) dy, \quad k \geq 1,$$

$$F_k^*(x) = \int_0^x F_{k-1}(y) N dy, \quad k \geq 1,$$

а матрицы A_k и A_k^* — соотношениями

$$A_k = \int_0^\infty d\tilde{B}(x) \otimes F_k(x), \quad k \geq 0, \tag{1}$$

$$A_k^* = \int_0^\infty d\tilde{B}(x) \otimes F_k^*(x), \quad k \geq 0, \tag{2}$$

где $\otimes$ — символ кронекерова произведения матриц.

Рассмотрим снова вложенную цепь Маркова процесса обслуживания. Из состояния с i заявками, $i = \overline{1, R}$, вложенная цепь Маркова может перейти только в одно из состояний с j заявками, $j = \overline{1, \min(i+1, R)}$. При этом переход из состояния с i заявками, $i = \overline{1, r}$, в состояние с j заявками, $j = \overline{2, i+1}$, осуществляется тогда, когда за время между поступлениями заявок обслужатся ровно $i - j + 1$ заявок, а в состояние с одной заявкой — когда обслужатся все i находящихся в системе заявок. Аналогично определяются переходы из состояния с R заявками, за исключением перехода в состояние также с R заявками, который происходит не только тогда, когда будет обслужена одна заявка, но и когда не будет обслужено ни одной заявки, и новая поступающая в систему заявка будет потеряна.

Таким образом, матрица P переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, представленная в блочной форме $P = (P_{kn}), k, n = \overline{1, R}$, имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} A_1^* & A_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2^* & A_1 & A_0 & \dots & 0 & 0 \\ A_3^* & A_2 & A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_r^* & A_{r-1} & A_{r-2} & \dots & A_1 & A_0 \\ A_R^* & A_r & A_{r-1} & \dots & A_2 & A_1 + A_0 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вложенная цепь Маркова является неприводимой и непериодической. Обозначим через p_{ik}^*, $i = \overline{1, d}$, $d = ml$, $k = \overline{1, R}$, где $i = l(n-1) + j$, $j = \overline{1, l}$, $n = \overline{1, m}$, стационарную по вложенной цепи Маркова вероятность того, что в системе имеется k заявок, фаза, на которой находится процесс поступления заявок, n-я и фаза обслуживания j-я, и положим $\vec{p}_k^{\,*} = (p_{1k}^*, \dots, p_{dk}^*)^{\text{т}}$, $\vec{p}^{\,*} = (\vec{p}_1^{\,*\text{т}}5, \dots, \vec{p}_R^{\,*\text{т}})^{\text{т}}$. Тогда для $\vec{p}^{\,*}$ справедлива система уравнений равновесия (СУР)

$$\vec{p}^{\,*\text{т}} = \vec{p}^{\,*\text{т}} P, \tag{3}$$

или, в координатной форме,

$$\vec{p}_1^{\,*\text{т}} = \sum_{m=1}^{R} \vec{p}_m^{\,*\text{т}} A_m^*, \tag{4}$$

$$\vec{p}_k^{\,*\text{т}} = \sum_{m=k-1}^{R} \vec{p}_m^{\,*\text{т}} A_{m-k+1}, \quad k = \overline{2, r}, \tag{5}$$

$$\vec{p}_R^{\,*\text{т}} = \vec{p}_r^{\,*\text{т}} A_0 + \vec{p}_R^{\,*\text{т}} (A_0 + A_1) \tag{6}$$

с условием нормировки

$$p_{\cdot,\cdot}^* = 1; \tag{7}$$

здесь символ “ $\cdot$ ” означает суммирование по всем значениям соответствующего дискретного аргумента.

СУР (3) имеет единственное, с условием нормировки, решение, которое можно получить методом, приведенным в рабое [2].

Зная стационарное распределение вложенной цепи Маркова, нетрудно определить другие стационарные характеристики обслуживания в рассматриваемой системе.

Вычислим сначала векторы $\vec{p}_k^{\,-} = (p_{1k}^-, \ldots, p_{dk}^-)^{\text{т}}$, $k = \overline{1, R}$, где p_{ik}^-, $i = l(n-1) + j$, $j = \overline{1, l}$, $n = \overline{1, m}$, — стационарная вероятность того, что при поступлении заявки в системе будет k других заявок, марковский процесс обслуживания будет на j-й фазе, а процесс поступления заявок — на n-й фазе. Заметим, что при поступлении заявки в системе будет k, $k = \overline{0, r-1}$, других заявок, если в систему поступит $k + 1$ заявок. Учитывая, что в момент поступления заявки фаза обслуживания не изменяется, имеем

$$\vec{p}_k^{\,-} = \vec{p}_{k+1}^{\,*}, \quad k = \overline{0, r-1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\vec{p}_k^{\,-\text{т}} = \sum_{j=k}^{R} \vec{p}_j^{\,*\text{т}} A_{j-k}, \quad k = r, R.$$

В частности, стационарная вероятность π потери заявки определяется формулой

$$\pi = \vec{p}_R^{\,-\text{т}} \vec{1} = \vec{p}_R^{\,*\text{т}} A_0 \vec{1},$$

где $\vec{1}$ — вектор-столбец из единиц.

Для нахождения стационарных вероятностей состояний по времени введем матрицы T_k и T_k^*, элементы которых $(T_k)_{ij}$ и $(T_k^*)_{ij}$, $i, j = \overline{1, d}$, $i = l(n-1) + q$, $q = \overline{1, l}$, $n = \overline{1, m}$, $j = l(u-1) + v$, $v = \overline{1, l}$, $u = \overline{1, m}$, представляют собой среднее время между соседними моментами поступления заявок в систему $SM/MSP/1/r$ (с накопителем емкости r) в состоянии $(u, v, M-k)$ при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось M заявок и фаза обслуживания была q-я, и процесс поступления заявок находился на n-й фазе, $M = r + 1$. При этом в первом случае предполагается, что $M > k$, а во втором — что $M = k$. Матрицы T_k и T_k^* определяются соотношениями

$$T_k = \int_0^\infty (I - \tilde{B}(x)) \otimes F_k(x) dx,$$

$$T_k^* = \int_0^\infty (I - \tilde{B}(x)) \otimes F_k^*(x) dx.$$

Введем вектор $\vec{t}$, компоненты которого представляют собой (с учетом фаз генерации заявок и обслуживания) средние значения времени между соседними моментами изменения состояний вложенной цепи Маркова (между поступлениями заявок). Тогда

$$\vec{t} = \vec{b} \otimes \vec{1}_l,$$

где $\vec{b}$ — вектор с координатами $b_i = \int\limits_0^\infty t\, dB_i(t)$.

Среднее время T между соседними моментами изменения состояний вложенной цепи Маркова в стационарном режиме функционирования системы определяется формулой

$$T = \sum_{k=0}^{R} \vec{p}_k^{*\text{т}} \vec{t} = \sum_{k=0}^{R} \vec{p}_k^{*\text{т}} (\vec{b} \otimes \vec{1}_l). \tag{8}$$

Рассмотрим соотношение

$$T = (\vec{\pi}^a)^\text{т} M_{ij} b_{ij} \vec{1}_m.$$

Действительно, $(\vec{\pi}^a)^\text{т} = \vec{p}_k^{*\text{т}} L$, где $L = I_m \otimes \vec{1}_l$ и $\vec{b} = M(b_{ij})\vec{1}_m$. Перемножая матрицу L и вектор $\vec{b}$, получаем

$$L\vec{b} = \vec{b} \otimes \vec{1}_l,$$

откуда немедленно приходим к формуле (8).

Заметим также, что загрузку системы ρ можно представить в виде

$$\rho = \frac{1}{T\mu}.$$

Используя результаты теории полумарковских процессов, получаем для векторов $\vec{p}_k$, $k = \overline{0, R}$, стационарных вероятностей состояний по времени формулы

$$\vec{p}_0^{\,\text{т}} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{R} \vec{p}_m^{*\text{т}} T_m^*,$$

$$\vec{p}_k^{\,\text{т}} = \frac{1}{T} \sum_{m=k}^{R} \vec{p}_m^{*\text{т}} T_{m-k}, \quad k = \overline{1, R}.$$

Введем обозначение

$$\vec{q}_k = \vec{p}_k^{\,\text{т}} Q, \quad k = \overline{0, R},$$

где $Q = 1_m \otimes I_l$.

Получим соотношение между векторами $\vec{q}_k$ и $\vec{\pi}^s$, которое будем использовать в дальнейшем. Для этого заметим, что матричные функции $F_k(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$F_k'(x) = F_k(x)\Lambda + u(k)F_{k-1}(x)N, \quad k \geq 0;$$

отсюда с учетом формул (1), (2) можно получить

$$A_0Q = -((I_m - \tilde{B}(x)) \otimes F_0(x))Q\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}((I_m - \tilde{B}(x)) \otimes (F_0(x)\Lambda))Q dx =$$
$$= (I_d + T_0(I_m \otimes \Lambda))Q, \quad d = ml,$$

где I_m — единичная матрица размера m,

$$A_kQ = -((I_m - \tilde{B}(x)) \otimes F_k(x))Q\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}((I_m - \tilde{B}(x)) \otimes$$
$$\otimes (F_k(x)\Lambda + F_k(x)N))Q dx = (T_k(I_m \otimes \Lambda) + T_{k-1}(I_m \otimes N))Q, \quad k \geq 1,$$

$$A_k^*Q = -\left((I_m - \tilde{B}(x)) \otimes \int_0^x F_k(y)dyN\right) Q\ \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}((I_m - \tilde{B}(x))$$
$$\otimes (F_{k-1}N))Q dx = (T_{k-1}(I_m \otimes N))Q, \quad k \geq 1.$$

Суммируя СУР по k от 1 до R и подставляя вместо A_k и A_k^* их выражения из формул (1), (2), после простых преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{R} \vec{p}_k^{*\text{т}} Q = \sum_{k=1}^{R} \vec{p}_k^{*\text{т}} Q + T \sum_{k=1}^{R} \vec{p}_k^{\text{т}} (I_m \otimes \Lambda^*)Q.$$

Из этого сооношения имеем

$$\sum_{k=1}^{R} \vec{p}_k^{\text{т}} (I_m \otimes \Lambda^*)Q = \vec{0}^{\text{т}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{R} \vec{q}_k = c\vec{\pi}^s,$$

где c — нормировочная постоянная, которая может быть записана в виде

$$c = 1 - p_0.$$

Здесь через $p_k = p_{\cdot,k},\ k = \overline{0, R}$, обозначена стационарная по времени вероятность наличия в системе k заявок.

Рассмотрим некоторые характеристики времени пребывания заявки в системе. Для этого обозначим через $V_k(x),\ k \geq 1$, матрицу, элементом $(V_k(x))_{ij}$ которой является вероятность того, что за время x будет обслужено не менее k заявок и в момент окончания обслуживания k-й заявки процесс обслуживания перейдет на j-ю фазу при условии, что в начальный момент фаза обслуживания была i-я и в системе находилось не менее k заявок, а через $\Phi_k(s)$ обозначим преобразование Лапласа–Стилтьеса матрицы $V_k(x)$. Обозначим также через $f_k(s),\ k \geq 0$, преобразование Лапласа–Стилтьеса матрицы $F_k(s)$, которая введена ранее.

Поскольку вероятность того, что обслуживание группы из m заявок, $m < k$, окончится на временно́м интервале $[x, x + dx)$ при условии, что до этого момента уже обслужено $k - m$ заявок, определяется формулой $F_{k-m}\Lambda_m^* dx$, и поскольку за время x может быть обслужено от 1 до $k-1$ заявок, имеем

$$\Phi_1(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} e^{\Lambda x} N dx = (sI - \Lambda)^{-1} N,$$

$$\Phi_k(s) = \Phi_1^k(s), \quad k \geq 2.$$

Отсюда нетрудно получить преобразования Лапласа–Стилтьеса $\omega(s)$ и $\varphi(s)$ стационарных распределений $W(x)$ и $V(x)$ — времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания в системе произвольной заявки, принятой к обслуживанию:

$$\omega(s) = \frac{1}{1-\pi} \sum_{k=0}^{r} \vec{p}_k^{\,-\text{т}} (I_m \otimes \Phi_k(s)) \vec{1},$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{1-\pi} \sum_{k=0}^{r} \vec{p}_k^{\,-\text{т}} (I_m \otimes \Phi_{k+1}(s)) \vec{1}.$$

Дифференцируя эти формулы в точке $s = 0$, получаем для среднего времени w ожидания начала обслуживания и среднего времени v пребывания в системе произвольной заявки, принятой к обслуживанию, для стационарного режима функционирования системы выражения

$$w = \frac{-1}{1-\pi} \sum_{k=1}^{r} \vec{p}_k^{\,-\text{т}} (I_m \otimes \Phi'_k(0)) \vec{1} =$$
$$= \frac{-1}{1-\pi} \sum_{k=1}^{r} \vec{p}_k^{\,-\text{т}} \left(I_m \otimes \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-\Lambda^{-1} N)^j \Lambda^{-1} \right) \right) \vec{1} =$$
$$= -\frac{1}{1-\pi} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=j+1}^{r} \vec{p}_k^{\,-\text{т}} \left(I_m \otimes \left((-\Lambda^{-1} N)^j \Lambda^{-1} \right) \right) \vec{1},$$

$$v = \frac{-1}{1-\pi}\sum_{k=0}^{r}\vec{p}_k^{\,-\text{т}}(I_m \otimes \Phi'_{k+1}(0))\vec{1} =$$

$$= \frac{-1}{1-\pi}\sum_{k=0}^{r}\vec{p}_k^{\,-\text{т}}\left(I_m \otimes \left(\sum_{j=0}^{k}(-\Lambda^{-1}N)^j\Lambda^{-1}\right)\right)\vec{1} =$$

$$= -\frac{1}{1-\pi}\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=j}^{r}\vec{p}_k^{\,-\text{т}}\left(I_m \otimes \left((-\Lambda^{-1}N)^j\Lambda^{-1}\right)\right)\vec{1}.$$

Для численных расчетов воспользуемся формулой

$$V_k(x)\vec{1} = \vec{1} - \sum_{i=0}^{k-1}F_i(x)\vec{1}, \quad k \geq 1,$$

из которой получаем следующие выражения для $W(x)$ и $V(x)$:

$$W(x) = 1 - \frac{1}{1-\pi}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=i+1}^{r}\vec{p}_k^{\,-\text{т}}\right)(I_m \otimes F_i(x))\vec{1},$$

$$V(x) = 1 - \frac{1}{1-\pi}\sum_{i=0}^{r}\left(\sum_{k=i}^{r}\vec{p}_k^{\,-\text{т}}\right)(I_m \otimes F_i(x))\vec{1}.$$

Бесконечный накопитель. Обратимся теперь к системе с бесконечным накопителем $(r = \infty)$.

Можно показать, что для системы с бесконечным накопителем необходимым и достаточным условием существования стационарного режима является стандартное условие $\rho < 1$, где ρ — загрузка системы.

Рассмотрим, как и в случае конечного накопителя, вложенную цепь Маркова, множество состояний которой

$$\mathcal{X} = (i, j, k), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, l}, \quad k \geq 1,$$

в данном случае является счетным.

Рассмотрим, как и ранее, векторы $\vec{p}_k^{\,*\text{т}}$, $k \geq 1$, и $\vec{p}^{\,*} = (\vec{p}_1^{\,*\text{т}}, \vec{p}_2^{\,*\text{т}}, \ldots)^{*\text{т}}$. Имеем

$$P = \begin{pmatrix} A_1^* & A_0 & 0 & 0 & \ldots \\ A_2^* & A_1 & A_0 & 0 & \ldots \\ A_3^* & A_2 & A_1 & A_0 & \ldots \\ A_4^* & A_3 & A_2 & A_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \end{pmatrix}.$$

Приведем также развернутую запись СУР:

$$\vec{p}_1^{*\mathrm{т}} = \sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_m^{*\mathrm{т}} A_m^*,$$

$$\vec{p}_k^{*\mathrm{т}} = \sum_{m=k-1}^{\infty} \vec{p}_m^{*\mathrm{т}} A_{m-k+1}, \quad k \geq 2.$$

Введем векторы $\vec{p}_k,\ k \geq 0$, стационарных вероятностей состояний по времени. Для $\vec{p}_k$ справедливы формулы

$$\vec{p}_0^{\,\mathrm{т}} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_m^{*\mathrm{т}} T_m^*,$$

$$\vec{p}_k^{\,\mathrm{т}} = \frac{1}{T} \sum_{m=k}^{\infty} \vec{p}_m^{*\mathrm{т}} T_{m-k}^*, \quad k \geq 1.$$

Также имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vec{q}_k = (1 - p_0)\vec{\pi}^s,$$

причем $\rho = (1 - p_0)$, где ρ — загрузка системы.

Найдем искать решение СУР в виде

$$\vec{p}_k^{*\mathrm{т}} = \vec{p}_1^{*\mathrm{т}} G^{k-1}, \quad k \geq 1, \tag{9}$$

где G — решение уравнения,

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} G^k A_k = \tilde{A}(G). \tag{10}$$

Лемма. *Уравнение* (10) *при* $\rho < 1$ *имеет единственное решение в классе матриц, все собственные значения которых по модулю меньше единицы. Это решение является матрицей, все элементы которой положительны, и итерационная процедура* $G^{(n)} = \tilde{A}(G^{(n-1)})$ *при* $n \to \infty$ *сходится к нему, если в качестве начальной итерации* $G^{(0)}$ *выбрать любую матрицу с собственными значениями, по модулю меньшими единицы.*

Доказательство этой леммы приведено в работе [5].

При численных расчетах в качестве $G^{(0)}$ удобно выбрать нулевую матрицу для монотонной сходимости последовательности $G^{(n)}$ к G.

При любом $\vec{p}_1^{\,*}$ последовательность векторов $\vec{p}_k^{\,*}$, задаваемых формулой (9), где G — решение уравнения (10), удовлетворяет всем уравнениям (4)–(6), и, кроме того, поскольку все собственные значения матрицы G по модулю меньше единицы, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{d}|p_{ik}^{*}|\right)<\infty. \tag{11}$$

Оставшийся неизвестным вектор $\vec{p}_1^{\,*}$ получим из первого уравнения СУР.

Перед этим подставим в уравнение (10) выражения для A_k из формул (1), (2). Получаем

$$G=I_d+U(I_m\otimes\Lambda)+GU(I_m\otimes N), \tag{12}$$

где

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}G^kT_k.$$

Умножая обе части равенства (12) на $\vec{1}$, имеем

$$(I_d-G)\vec{1}=(I_d-G)U(I_m\otimes N)\vec{1}.$$

Поскольку матрица I_m-G невырожденная, то последнее равенство эквивалентно равенству

$$U(I_m\otimes N)\vec{1}=\vec{1},$$

которое, в свою очередь, в силу неотрицательности элементов матрицы UN означает, что матрица $U(I_m\otimes N)$ является стохастической.

Уравнение

$$\vec{p}_1^{\,*\mathrm{т}}=\vec{p}_1^{\,*\mathrm{т}}U(I_m\otimes N)$$

имеет единственное, с условием нормировки, решение.

Условие нормировки легко приводится к виду

$$\vec{p}_1^{\,*\mathrm{т}}(I_d-G)^{-1}\vec{1}=1.$$

Для вектора $\vec{p}_k^{\,-}$, $k\geq 0$, стационарных вероятностей того, что в момент поступления заявки в системе содержится k других заявок, получим

$$\vec{p}_k^{\,-\mathrm{т}}=\vec{p}_k^{\,*\mathrm{т}}=\vec{p}_1^{\,*\mathrm{т}}G^k.$$

Для вектора $\vec{p}_k,\ k \geq 0$, стационарных вероятностей по времени получим

$$\vec{p}_0^{\,\mathrm{T}} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} G^{m-1} T_m^*,$$

$$\vec{p}_k^{\,\mathrm{T}} = \frac{1}{T} \sum_{m=k}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} G^{m-1} T_{m-k}^* = \frac{1}{T}\, \vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} G^{k-1} U, \quad k \geq 1,$$

где среднее время T между моментами изменения состояний цепи Маркова вычисляется по формуле

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{p}_k^{\,*\mathrm{T}} \vec{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{p}_k^{\,*\mathrm{T}} (\vec{b} \otimes \vec{1}_l).$$

Для преобразований Лапласа–Стилтьеса $\omega(s)$ и $\varphi(s)$ стационарных распределений $W(x)$ и $V(x)$ — времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания в системе произвольной заявки — получим

$$\omega(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} G^k (I_m \otimes \Phi_k(s)) \vec{1},$$

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} G^k (I_m \otimes \Phi_{k+1}(s)) \vec{1}.$$

Для среднего времени w ожидания начала обслуживания и среднего времени v пребывания в системе произвольной заявки, принятой к обслуживанию, для стационарного режима функционирования системы получим

$$w = -\vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} G^k \right) \left(I_m \otimes (-\Lambda^{-1} N)^j \Lambda^{-1} \right) \vec{1} =$$

$$= -\vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} G (I_d - G)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} G^j \left(I_m \otimes (-\Lambda^{-1} N)^j \Lambda^{-1} \right) \vec{1},$$

$$v = -\vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} G^k \right) \left(I_m \otimes (-\Lambda^{-1} N)^j \Lambda^{-1} \right) \vec{1} =$$

$$= -\vec{p}_1^{\,*\mathrm{T}} (I_d - G)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} G^j \left(I_m \otimes (-\Lambda^{-1} N)^j \Lambda^{-1} \right) \vec{1}.$$

Функции распределения $W(x)$ и $V(x)$ для системы с бесконечным накопителем можно представить в виде

$$W(x) = 1 - \vec{p}_1^{*\mathrm{т}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} G^k \right) (I_m \otimes F_j(x))\, \vec{1} = \\ = 1 - \vec{p}_1^{*\mathrm{т}} G(I_d - G)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} G^j \,(I_m \otimes F_j(x))\, \vec{1}, \quad (13)$$

$$V(x) = 1 - \vec{p}_1^{*\mathrm{т}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} G^k \right) (I_m \otimes F_j(x))\, \vec{1} = \\ = 1 - \vec{p}_1^{*\mathrm{т}} (I_d - G)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} G^j \,(I_m \otimes F_j(x))\, \vec{1}. \quad (14)$$

Положим

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} G^i (I_m \otimes F_i(x)) \quad (15)$$

и обозначим через a модуль минимального диагонального элемента матрицы Λ.

Положим $Q = I_d - (I_m \otimes \Lambda)/a$.

Найдем матричную функцию $R(x)$ в виде

$$R(x) = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} R_i. \quad (16)$$

С помощью преобразований, аналогичных приведенным в работе [2], получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$R_0 = I_d, \quad (17)$$

$$R_i = Q^i + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{a} G R_j (I_m \otimes N) Q^{i-1-j} = \\ = \left(Q^{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} \frac{1}{a} G R_j (I_m \otimes N) Q^{i-2-j} \right) Q + \\ + \frac{1}{a} G R_{i-1} (I_m \otimes N) = R_{i-1} Q + \frac{1}{a} G R_{i-1} (I_m \otimes N), \qquad i \geq 1. \quad (18)$$

Таким образом, из формул (13)–(14) следует, что функции распределения $W(x)$ и $V(x)$ можно вычислить по формулам

$$W(x) = 1 - \vec{p}_1^{*\mathrm{T}} G (I_d - G)^{-1} R(x) \vec{1},$$

$$V(x) = 1 - \vec{p}_1^{*\mathrm{T}} (I_d - G)^{-1} R(x) \vec{1},$$

где матричная функция $R(x)$ определяется из соотношений (16)–(18).

Отметим, что расчет функций распределения $W(x)$ и $V(x)$ предложенным способом реализован программно для полумарковского входящего потока заявок с экспоненциальным, гиперэрланговским и детерминированным распределениями времени между поступлениями заявок и марковским процессом обслуживания (или с процессом обслуживания фазового типа как частным случаем марковского процесса).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б о ч а р о в П. П. Стационарное распределение конечной очереди с рекуррентным потоком и марковским обслуживанием // Автоматика и телемеханика. — 1996. — №9. — С. 66–78.
2. Б о ч а р о в П. П., Д'А п и ч е Ч., П е ч и н к и н А. В., С а л е р н о С. Система массового обслуживания $G/MSP/1/r$ // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №2. – С. 127–143.
3. Б о ч а р о в П. П., П е ч и н к и н А. В. Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
4. Б о ч а р о в П. П. Анализ системы массового обслуживания $MAP/G/1/r$ конечной емкости // Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика. – 1995. – №1. – С. 52–67.
5. N e u t s M. F. Matrix-geometric solutions in stochastic models. An algorithmic approach. – Baltimore and London: The Jonhs Hopkins Univ. Press, 1981.

Статья поступила в редакцию 29.05.2003

Василий Васильевич Чаплыгин родился в 1978 г., окончил в 2001 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

V.V. Chaplygin (b. 1978) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2001. Post-graduate of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University.