УДК 517.977

А. Е. Голубев

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ [1]

Рассмотрена задача стабилизации положений равновесия нелинейных динамических систем с управлением при помощи обратной связи по оценке состояния системы экспоненциальным наблюдателем. Приведены основные методы построения экспоненциальных наблюдателей для нелинейных систем с управлением. Показана справедливость глобального принципа разделения для класса нелинейных систем. Построен закон управления, стабилизирующий заданное положение гибкого однозвенного робота-манипулятора при измерении только углового положения вала двигателя.

При решении задач управления динамическими системами полный вектор состояния системы часто неизвестен, а измерению доступны лишь некоторые функции переменных состояния — выходы системы. Одним из путей решения проблемы неполноты измеряемой информации о состоянии системы является получение оценки вектора состояния на основе данных о значениях выходов с помощью наблюдателя — специальной динамической системы, состояние которой с течением времени достаточно быстро приближается к состоянию исходной системы. Основная проблема при построении наблюдателя состоит в том, чтобы обеспечить заданную динамику уменьшения ошибки наблюдения. Обычно желательным является ее экспоненциальное по времени убывание.

Предположим, что для задачи стабилизации положения равновесия динамической системы найдено решение в виде обратной связи $u(x)$ по состоянию и известна оценка $\hat{x}$ состояния x системы, получаемая с помощью наблюдателя. Тогда можно рассмотреть управление, которое получается из обратной связи заменой состояния системы на его

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Российского Фонда фундаментальных исследований №02-01-00704, гранта государственной поддержки ведущих научных школ НШ–2094.2003.1 и гранта для поддержки научно-исследовательской работы аспирантов высших учебных заведений Министерства образования России №А03-3.16-208

оценку. Ошибку $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы с помощью наблюдателя можно интерпретировать как возмущение, действующее на систему через управление $u(\hat{x}) = u(x + e)$. Возникает вопрос, будет ли полученное таким образом управление в виде обратной связи $u(\hat{x})$ по оценке состояния системы решением задачи стабилизации.

Для линейных стационарных систем ответ на этот вопрос положителен и соответствует известному принципу разделения [1]: если для линейной стационарной системы построен экспоненциальный наблюдатель и найдена линейная обратная связь, глобально асимптотически стабилизирующая заданное положение равновесия при известном векторе состояния, — то при соответствующей обратной связи по оценке вектора состояния глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия сохраняется. Для нелинейных систем в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен: известны примеры нелинейных систем, к которым принцип разделения неприменим [2]. Причина этого — возможное явление неограниченного возрастания решений системы с управлением $u(\hat{x})$ за конечное время, прежде чем ошибка $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы с помощью наблюдателя сойдется к нулю [3].

Справедливость локального нелинейного принципа разделения показана в работе [4] для класса детектируемых систем с непрерывной правой частью, асимптотически стабилизируемых непрерывной обратной связью по состоянию. Более поздние результаты [5, 6] касаются асимптотической стабилизации в большом локально липшицевых нелинейных систем с использованием так называемых наблюдателей с высокими коэффициентами усиления [7]. Глобальная асимптотическая стабилизация аффинных систем, допускающих построение экспоненциальных наблюдателей с помощью геометрического метода [8–10], подробно рассмотрена в работе [11].

В настоящей работе рассматривается задача глобальной стабилизации заданного положения равновесия $x = x_*$, $u = u_*$ нелинейной динамической системы с управлением, имеющей вид

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ — вектор состояния системы; $u \in \mathbf{R}^m$ — управление; $y \in \mathbf{R}^p$ — измеряемый выход системы; $f(\cdot,\cdot)$ и $h(\cdot)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов, $f(x_*, u_*) = 0$.

Получены условия глобальной асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем вида (1) с управлением $u = u(x + e)$, где $u(x)$ — обратная связь по состоянию, глобально стабилизирующая заданное положение равновесия системы, e — асимптотически убывающее по времени возмущение. Установлен класс нелинейных динамических систем вида (1), для которых выполняется глобальный принцип разделения. Принцип разделения позволяет решать задачу стабилизации системы при неполном измерении состояния в два этапа. Сначала строится стабилизирующая обратная связь по состоянию. Затем на основе информации о значениях выхода системы строится наблюдатель. В результате подстановки состояния наблюдателя вместо состояния системы в стабилизирующую обратную связь получается управление, являющееся решением рассматриваемой задачи стабилизации при выполнении принципа разделения.

Для примера применения полученных теоретических результатов решена задача стабилизации заданного положения гибкого однозвенного робота-манипулятора при измерении только углового положения вала двигателя.

Экспоненциальные наблюдатели для нелинейных динамических систем с управлением. В настоящее время известны следующие основные подходы к построению глобальных экспоненциальных наблюдателей для нелинейных систем с управлением.

Рассмотрим сначала случай, когда нелинейная динамическая система (1) является аффинной по управлению и имеет вид

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{j=1}^{m} B_j(x)u_j, \quad y = h(x), \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ — вектор состояния системы; $A(x)$ и $B_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, — гладкие векторные поля на $\mathbf{R}^n$; $y \in \mathbf{R}^p$ — выход системы, $h(x) = \{h_1(x), \ldots, h_i(x)\}$, $h_i(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $i = \overline{1,p}$; $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}} \in \mathbf{R}^m$ — векторное управление. Так называемый геометрический метод построения наблюдателя основывается на преобразовании системы (2) к специальному каноническому виду [9, 12]

$$\dot{\chi} = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A^p \end{pmatrix} \chi + \begin{pmatrix} \psi_1(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) \\ \psi_2(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{1j}(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) \\ \tilde{b}_{2j}(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{b}_{nj}(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) \end{pmatrix} u_j = A\chi + \psi(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \tilde{B}_j(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) u_j, \qquad y = H(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}); \tag{3}$$

здесь $n = (n_1, \ldots, n_p)$ — мультииндекс наблюдаемости [12]; $\chi^k = (\chi^k_{n_1}, \ldots, \chi^k_{n_k})^{\text{т}}$, $k = \overline{1,p}$, — n_k-мерные векторы; $\chi = (\chi^1, \ldots, \chi^p)^{\text{т}}$; $A^k = (a^k_{ij})$, $k = \overline{1,p}$, — квадратные матрицы порядка n_k с элементами $a^k_{ij} = 1$, если $i - j = 1$, и $a^k_{ij} = 0$, если $i - j \neq 1$. Отметим, что, в частности, векторные поля $\tilde{B}_j$, $j = \overline{1,m}$, в системе (3) могут быть постоянными.

Если отображение $y = H(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p})$ обратимо, т.е. $(\chi^1_{n_1}, \ldots \ldots, \chi^p_{n_p})^{\text{т}} = H^{-1}(y)$, то экспоненциальным наблюдателем для системы (3) является динамическая система

$$\dot{\hat{\chi}} = A\hat{\chi} + LC(\hat{\chi} - \chi) + \psi(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p}) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{B}_j(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p})u_j,$$
$$(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p})^{\text{т}} = H^{-1}(y), \quad (4)$$

где $C = (C_{ij})$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,p}$, — блочная матрица с элементами $C_{ij} = C^j$, C^j — матрицы-строки длины n_j. Если $i = j$, то $C^j = (0, \ldots, 0, 1)$. Если $i \neq j$, то $C_{ij} = O^j$, где O^j — нулевая матрица-строка. В системе (4) матрица L размерности $n \times p$ определяет динамику ошибки оценки состояния.

Для дальнейших построений в этом случае можно использовать методы, применяемые при построении линейных наблюдателей, и обеспечить экспоненциальное убывание ошибки по крайней мере в канонических координатах. Действительно, уравнение ошибки $e = \hat{\chi} - \chi$ оценки наблюдателем (4) состояния системы (3) при любом (но одинаковом) управлении в системах (3), (4) имеет вид

$$\dot{e} = (A + LC)e, \quad (5)$$

где матрица L коэффициентов усиления наблюдателя выбирается так, что матрица $A + LC$ имеет собственные числа только с отрицательными действительными частями. Следовательно, ошибка оценки состояния не зависит от управления и экспоненциально стремится к нулю. Функция Ляпунова для системы (5) имеет следующий вид [13]:

$$W(e) = e^{\text{т}}Pe, \quad \dot{W}(e) = -e^{\text{т}}Qe \leq -\lambda_{\min}(Q)|e|^2,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^n$; матрицы $P = P^{\text{т}} > 0$, $Q = Q^{\text{т}} > 0$ удовлетворяют уравнению Ляпунова $(A + LC)^{\text{т}}P + P(A + LC) = -Q$, решение которого существует в силу указанного выше выбора спектра матрицы $A + LC$. Здесь через $\lambda_{\min}(\cdot)$ обозначено минимальное по модулю собственное значение матрицы. Далее будем также использовать обозначение $\lambda_{\max}(\cdot)$ для максимального по модулю собственного значения матрицы.

Подробно геометрический метод построения наблюдателя для нелинейных динамических систем без управления рассмотрен в работах [8–10], а для систем с управлением, например, в работе [12].

Отметим, что глобальность результатов обеспечивается в случае, когда соответствующие замены переменных определены глобально, отображение $y = H(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p})$ обратимо во всем пространстве состояний и при некотором управлении u любое решение $\chi(t)$ системы (3) определено при всех $t \geq 0$.

Аналогичный подход может быть развит для нелинейных динамических систем вида (1), не являющихся аффинными по управлению. Предположим, что существует замена переменных, преобразующая систему (1) к виду

$$\dot{\chi} = A\chi + \rho(y, u), \quad y = C\chi, \tag{6}$$

где $\chi \in \mathbf{R}^n$; $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ — постоянные матрицы; пара (A, C) детектируема; $\rho(\cdot,\cdot)$ — достаточно гладкая функция своих аргументов. Экспоненциальный наблюдатель для системы (6) имеет вид

$$\dot{\hat{\chi}} = A\hat{\chi} + LC(\hat{\chi} - \chi) + \rho(y, u), \quad y = C\chi, \tag{7}$$

где $L \in \mathbf{R}^{n\times p}$ — матрица коэффициентов усиления наблюдателя.

Уравнение ошибки $e = \hat{\chi} - \chi$ оценки наблюдателем (7) состояния системы (6) при любом (но одинаковом) управлении в системах (6), (7) имеет вид (5), где матрица L коэффициентов усиления наблюдателя выбирается так, что матрица $A + LC$ имеет собственные числа только с отрицательными действительными частями.

Другая методика позволяет строить глобальные экспоненциальные наблюдатели для нелинейных динамических систем вида (1), в правой части которых помимо нелинейных функций выхода и управления присутствуют равномерно по управлению глобально липшицевые функции состояния и управления [14–16]. Рассмотрим нелинейную динамическую систему с управлением, имеющую вид

$$\dot{x} = Ax + f(x, u) + \rho(y, u), \quad y = Cx; \tag{8}$$

здесь $x \in \mathbf{R}^n$ — вектор состояния системы; $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ — постоянные матрицы; пара (A, C) детектируема; $y \in \mathbf{R}^p$ — выход системы; $u \in \mathbf{R}^m$ — управление; отображения $\rho\colon \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $f\colon \mathbf{R}^n \times$ $\times\, \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ локально липшицевы, причем функция $f(x, u)$ глобально липшицева по x равномерно по u с константой γ_f, т.е.

$$|f(x_1, u) - f(x_2, u)| \leq \gamma_f |x_1 - x_2|$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$.

Наблюдатель для системы (8) строится в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + f(\hat{x}, u) + \rho(y, u), \tag{9}$$

где $L \in \mathbf{R}^{n\times p}$ — матрица коэффициентов усиления наблюдателя. Уравнение ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы (8) наблюдателем (9) имеет следующий вид:

$$\dot{e} = (A + LC)e + (f(x + e, u) - f(x, u)). \tag{10}$$

Построение наблюдателя сводится к поиску матрицы L коэффициентов усиления, при которой положение равновесия $e = 0$ системы (10) при любом управлении u и произвольном решении $x(t)$ системы (8) с данным управлением глобально асимптотически устойчиво. Известна следующая теорема [14].

Теорема 1. *Предположим, что при некотором управлении* u *любое решение* $x(t)$ *системы* (8) *определено при всех* $t \geq 0$. *Пусть в наблюдателе* (9) *матрица коэффициентов усиления L выбрана таким образом, что выполнено неравенство* $\gamma_f < \lambda_{\min}(Q)/(2\lambda_{\max}(P))$, *где* P *и* Q *— положительно определенные симметрические матрицы, удовлетворяющие уравнению Ляпунова* $(A+LC)^{\mathrm{T}}P + P(A+LC) = -Q$. *Тогда положение равновесия* $e = 0$ *системы* (10) *при управлении* u *и произвольном решении* $x(t)$ *системы* (8) *с данным управлением глобально экспоненциально устойчиво, т.е. существуют такие константы* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$, *не зависящие от* u *и* $x(t)$, *что для всех* $t \geq 0$, $e(0)$ *выполнено неравенство* $|e(t)| \leq \beta|e(0)|\exp(-\alpha t)$.

При доказательстве теоремы 1 в качестве функции Ляпунова для системы (10) уравнений ошибки оценки состояния рассматривается положительно определенная функция $W(e) = e^{\mathrm{T}}Pe$.

Отметим, что теорема 1 позволяет только проверить устойчивость системы (10) при конкретной выбранной матрице L и не дает ответа на вопрос, каким образом найти L, так как, во-первых, не существует явной зависимости между собственными значениями матрицы $A+LC$ и значением $\lambda_{\max}(P)$, а во-вторых, изменение $\lambda_{\max}(P)$ может быть не связано с изменениями собственных значений матрицы $A + LC$ [15]. Численные процедуры нахождения матрицы L коэффициентов усиления наблюдателя (9), обеспечивающей устойчивость положения равновесия системы (10) уравнений ошибки оценки состояния, рассмотрены в работах [15, 16].

В случае, когда система (8) имеет вид

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dots\dots \\ x_n \\ a_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x_1, u) \\ b_2(x_1, x_2, u) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ b_n(x, u) \end{pmatrix} =$$

$$= a(x) + b(x, u), \quad y = Cx, \quad (11)$$

где $C = (1, 0, \dots, 0)$, функция $a_n(x)$ глобально липшицева, а функции $b_i(x, u)$, $i = \overline{1, n}$, глобально липшицевы по x равномерно по u, глобальный экспоненциальный наблюдатель для системы можно представить в следующем виде [7]:

$$\dot{\hat{x}} = a(\hat{x}) + b(\hat{x}, u) - S^{-1}C^{\text{т}}(C\hat{x} - y). \quad (12)$$

В выражении (12) матрица $S > 0$ является единственным положительно определенным решением матричного уравнения

$$0 = -\theta S - A^{\text{т}}S - SA + C^{\text{т}}C; \quad (13)$$

здесь $\theta > 1$ — некоторая положительная константа [7]; $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, — матрица с элементами $a_{ij} = 1$, если $j - i = 1$, и $a_{ij} = 0$, если $j - i \neq 1$. Уравнение ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы (11) наблюдателем (12) имеет вид

$$\dot{e} = Ae + \Gamma(x, \hat{x}, u) - S^{-1}C^{\text{т}}Ce, \quad (14)$$

где $\Gamma_i(x, \hat{x}, u) = b_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i, u) - b_i(x_1, \dots, x_i, u)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\Gamma_n(x, \hat{x}, u) = b_n(\hat{x}, u) - b_n(x, u) + a_n(\hat{x}) - a_n(x)$. Согласно работе [7] положение равновесия $e = 0$ системы (14) глобально экспоненциально устойчиво при любом управлении u, таком что решения $x(t)$ системы (11) при данном управлении определены для любых начальных значений $x(0)$ при всех $t \geq 0$, и при произвольном решении $x(t)$ системы (11) с данным управлением. Отметим, что в качестве функции Ляпунова для системы (14) рассматривается положительно определенная функция $W(e) = \theta e^{\text{т}}Se$.

В работе [17] рассмотрено построение глобальных экспоненциальных наблюдателей для нелинейных динамических систем с управлением вида

$$\dot{x} = Ax + G\psi(Hx) + \rho(y, u), \quad y = Cx; \quad (15)$$

здесь $x \in \mathbf{R}^n$ — вектор состояния системы; $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbf{R}^{n\times r}$, $H \in \mathbf{R}^{r\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ — постоянные матрицы; пара (A, C) детектируема; $y \in \mathbf{R}^p$ — выход системы; $u \in \mathbf{R}^m$ — управление; отображения $\rho\colon \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $\psi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$ локально липшицевы. Нелинейная функция $\psi(Hx)$ представляет собой r-мерный вектор, каждая компонента которого является функцией от линейной комбинации переменных состояния

$$\psi_i = \psi_i\left(\sum_{j=1}^{n} H_{ij}x_j\right), \quad i = \overline{1, R},$$

и удовлетворяет неравенству

$$a \leq \frac{\psi_i(z_1) - \psi_i(z_2)}{z_1 - z_2} \leq b \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{R}, \quad z_1 \neq z_2. \tag{16}$$

При $a = 0,\ b = \infty$ соотношениями (16) задаются неубывающие функции, а при $-a = b = \gamma$ — глобально липшицевые функции.

Наблюдатель для системы (15) находится в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + G\psi(H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)) + \rho(y, u), \tag{17}$$

где $L \in \mathbf{R}^{n\times p}$ и $K \in \mathbf{R}^{r\times p}$ — матрицы коэффициентов усиления наблюдателя, подлежащие определению. Уравнение ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки наблюдателем (17) состояния системы (15) имеет вид

$$\dot{e} = (A + LC)e + G(\psi(w) - \psi(v)), \tag{18}$$

где $v = Hx$, $w = H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)$. Предполагается, что скалярные компоненты вектор-функции $\psi(\cdot)$ удовлетворяют неравенствам (16) при $a = 0$.

Если $a \neq 0$, то всегда можно определить новую функцию $\tilde{\psi}(v) = (\tilde{\psi}_1(v_1),\ \ldots,\ \tilde{\psi}_r(v_r))^{\mathrm{T}}$, координатные функции $\tilde{\psi}_i(v_i) = \psi_i(v_i) - av_i$, $i = \overline{1, r}$, которой удовлетворяют неравенствам (16) при $\tilde{a} = 0$, $\tilde{b} = b - a$, и представить систему (15) в виде

$$\dot{x} = \tilde{A}x + G\tilde{\psi}(Hx) + \rho(y, u), \quad y = Cx,$$

где $\tilde{A} = A + aGH$.

Из неравенств (16) следует, что

$$\psi_i(w_i) - \psi_i(v_i) = \delta_i(t)(w_i - v_i), \quad i = \overline{1, r};$$

здесь $\delta_i(t),\ i = \overline{1, r}$, — скалярные функции времени, принимающие значения на отрезке $[0, b]$. Следовательно,

$$\psi(w) - \psi(v) = \Delta(t)(w - v),$$

где $\Delta(t) = \operatorname{diag}(\delta_1(t), \ldots, \delta_r(t))$. С учетом обозначения $\eta = w - v$ систему (18) представим в следующем виде:

$$\dot{e} = (A + LC)e + G\Delta(t)\eta, \quad \eta = (H + KC)e. \tag{19}$$

Построение наблюдателя состоит в поиске матриц K и L коэффициентов усиления, при которых линейная нестационарная система (19) глобально асимптотически устойчива.

Теорема 2 [17]. *Предположим, что при некотором управлении u любое решение $x(t)$ системы* (15) *определено при всех $t \geq 0$. Если найдутся матрица $P = P^{\text{т}} > 0$ и константа $\nu > 0$ такие, что*

$$\begin{pmatrix} (A + LC)^{\text{т}}P + P(A + LC) + \nu I & PG + (H + KC)^{\text{т}} \\ G^{\text{т}}P + (H + KC) & D \end{pmatrix} \leq 0, \tag{20}$$

где I — единичная матрица, $D = \operatorname{diag}(-2/b, \ldots, -2/b)$, то положение равновесия $e = 0$ системы (19) *при произвольном решении $x(t)$ системы* (15) *с данным управлением глобально экспоненциально устойчиво, т.е. существуют такие константы $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, не зависящие от $x(t)$, что для всех $t \geq 0$, $e(0)$ выполнено неравенство $|e(t)| \leq \beta|e(0)|\exp(-\alpha t)$.*

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 в качестве функции Ляпунова для системы (19) уравнений ошибки оценки состояния рассматривается положительно определенная функция $W(e) = e^{\text{т}}Pe$, где $P = P^{\text{т}} > 0$ удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(A + LC)^{\text{т}}P + P(A + LC) = -\nu I.$$

Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием наблюдателей. Отметим, что в общем случае для нелинейных динамических систем вида (1) глобальный принцип разделения не выполняется, так как решения системы с управлением $u = u(\hat{x}) = u(x + e)$ могут неограниченно возрастать за конечное время прежде, чем ошибка $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы с помощью наблюдателя сойдется к нулю, даже если система с управлением $u = u(x)$ глобально экспоненциально устойчива [2, 3]. Таким образом, в общем случае для рассмотренных систем с управлением $u = u(\hat{x})$ не выполняется условие определенности решений при всех $t \geq 0$.

Рассмотрим ошибку $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы с помощью наблюдателя как возмущение, действующее на систему через управление $u(\hat{x}) = u(x + e)$. Заметим, что если для любых начальных условий $x(0)$ любому локально ограниченному возмущению $e(t)$ соответствует локально ограниченное решение $x(t)$ системы с управлением

$u = u(x+e)$, то решения системы с управлением $u = u(x + e)$ не могут неограниченно возрастать за конечное время и для любых начальных условий $x(0)$ определены при всех $t \geq 0$.

Далее рассмотрим задачу стабилизации положения равновесия $x = x_*$, $u = u_*$ нелинейной динамической системы с управлением, имеющей вид (1).

Предположение 1. Отображение $f\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ непрерывно дифференцируемо и глобально липшицево по x равномерно по u с константой γ_f, т.е.

$$|f(x_1, u) - f(x_2, u)| \leq \gamma_f |x_1 - x_2|$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$.

Предположение 2. Система (1) допускает построение экспоненциального наблюдателя $\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, h(x), u)$, такого что уравнение ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки наблюдателем состояния системы имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{e} = g(x + e, h(x), u) - f(x, u) = F(e, u, t), \\ &F(0, u, t) = 0 \quad \forall u \in \mathbf{R}^m,\ \forall t \geq 0, \end{aligned} \tag{21}$$

где отображение $F\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ кусочно непрерывно по t, локально липшицево по u и глобально липшицево по e равномерно по u и t с константой γ_F. При любом управлении u, таком что решения $x(t)$ системы (1) при данном управлении для любых начальных значений $x(0)$ определены при всех $t \geq 0$, и произвольном решении $x(t)$ системы (1) с данным управлением положение равновесия $e = 0$ системы (21) глобально экспоненциально устойчиво с квадратичной функцией Ляпунова $W(e) = e^{\mathrm{т}} P e$, $P = P^{\mathrm{т}} > 0$, производная которой в силу системы (21) удовлетворяет при любом $e \in \mathbf{R}^n$ неравенству

$$\dot{W}(e) \leq -l|e|^2, \quad l = \text{const} > 0. \tag{22}$$

При управлении u, таком что некоторое решение $x(t)$ системы (1) с данным управлением определено только на конечном интервале времени $t \in [0, T)$, $T > 0$, решения $e(t)$ системы (21) при данных u и $x(t)$ для любых начальных значений $e(0)$ также определены на данном интервале времени и удовлетворяют неравенству (22).

Отметим, что для системы (3) предположения 1 и 2 выполняются в случае, если, например, векторные поля B_j, $j = \overline{1, m}$, постоянны, вектор-функция $\psi(\cdot)$ глобально липшицева, отображение $y = H(\chi^1_{n_1}, \ldots, \chi^p_{n_p})$ обратимо во всем пространстве состояний. Для систем вида (8) с непрерывно дифференцируемой правой частью и вектор-функцией $\rho(y, u)$, глобально липшицевой по y равномерно по u, в случае существования матрицы L коэффициентов усиления, удовлетворяющей условиям теоремы 1, и для систем вида (11) с непрерывно дифференцируемой правой частью предположения 1 и 2 выполняются автоматически. Заметим, что для системы (15) предположения 1 и 2 выполняются, когда правая часть системы непрерывно дифференцируема, вектор-функция $\psi(\cdot)$ глобально липшицева, вектор-функция $\rho(y,u)$ глобально липшицева по y равномерно по u, линейное матричное неравенство (20) разрешимо относительно P, PL, K и ν.

Решения рассматриваемой задачи стабилизации найдем в классе локально липшицевых управлений вида $u = u(\hat{x}) = u(x+e)$ (здесь $\hat{x}$ — оценка состояния x системы с помощью наблюдателя), обеспечивающих для любых начальных значений $x(0)$ и $e(0)$ определенность при всех $t \geq 0$ решений $x(t)$ системы (1) с управлением $u = u(x+e)$.

Справедливы следующие утверждения, которые представляют собой принцип разделения для рассматриваемого класса систем.

Теорема 3. *Пусть для системы (1) выполнены предположения* $1,\ 2$ *и существует непрерывно дифференцируемая обратная связь* $u(x)$ *по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующая положение равновесия* $x = x_*, u = u_*$ *системы. Тогда система (1) при управлении* $u = u(\hat{x}) = u(x+e)$ *глобально асимптотически устойчива в точке* $x = x_*$.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u(x+e)), \quad \dot{e} = F(e, u(x+e), t), \tag{23}$$

составленную из уравнений системы (1) с управлением $u = u(x+e)$ и уравнения (21) ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния с данным управлением. Предположим, что управление $u = u(x+e)$ принадлежит рассматриваемому классу управлений, т.е. для любых начальных значений $x(0)$ и $e(0)$ решения $x(t)$, $e(t)$ системы (23) определены при всех $t \geq 0$. Тогда согласно предположению 2 положение равновесия $e = 0$ системы $\dot{e} = F(e, u(x+e), t)$ при произвольном решении $x(t)$ системы (1) с управлением $u = u(x+e)$ глобально экспоненциально устойчиво с функцией Ляпунова $W(e) = e^{\mathrm{T}}Pe$, $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, удовлетворяющей неравенству (22).

Поскольку по условиям теоремы система (1), замкнутая обратной связью $u(x)$, глобально экспоненциально устойчива в точке $x = x_*$ и правая часть системы (1) без выхода непрерывно дифференцируема, то согласно теореме Н.Н. Красовского [13] существует функция Ляпунова $V_1(x - x_*)$, такая что для любых $x \in \mathbf{R}^n$ выполнены соотношения

$$c_1|x - x_*|^2 \leq V_1(x - x_*) \leq c_2|x - x_*|^2,$$

$$\left|\frac{\partial V_1(x-x_*)}{\partial x}\right| \le c_3|x-x_*|, \quad (24)$$

$$\frac{\partial V_1(x-x_*)}{\partial x} f(x,u(x)) \le -c_4|x-x_*|^2, \quad (25)$$

где $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ — некоторые положительные константы.

Линейная замена переменных

$$x = \hat{x} - e, \quad e = e \quad (26)$$

преобразует систему (23) к виду

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}-e, u(\hat{x})) + F(e, u(\hat{x}), t), \quad \dot{e} = F(e, u(\hat{x}), t). \quad (27)$$

Рассмотрим следующую положительно определенную функцию:

$$V(\hat{x}-x_*, e) = kV_1(\hat{x}-x_*) + W(e) > 0, \quad (\hat{x}-x_*, e) \neq 0;$$

здесь k — положительная константа, подлежащая определению. Производная $\dot{V}$ в силу системы (27) имеет следующий вид:

$$\dot{V}(\hat{x}-x_*, e) = k\frac{\partial V_1(\hat{x}-x_*)}{\partial \hat{x}}\dot{\hat{x}} + \dot{W}(e) =$$

$$= k\frac{\partial V_1(\hat{x}-x_*)}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}-e, u(\hat{x})) + k\frac{\partial V_1(\hat{x}-x_*)}{\partial \hat{x}} F(e, u(\hat{x}), t) + \dot{W}(e) =$$

$$= k\frac{\partial V_1(\hat{x}-x_*)}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}, u(\hat{x})) + k\frac{\partial V_1(\hat{x}-x_*)}{\partial \hat{x}}(f(\hat{x}-e, u(\hat{x})) - f(\hat{x}, u(\hat{x}))) +$$

$$+ k\frac{\partial V_1(\hat{x}-x_*)}{\partial \hat{x}} F(e, u(\hat{x}), t) + \dot{W}(e).$$

Из неравенств (22), (24), (25) с учетом замены x на $\hat{x}$ и условий теоремы 3 следует, что

$$\dot{V}(\hat{x}-x_*, e) \le -kc_4|\hat{x}-x_*|^2 + (kc_3\gamma_f + kc_3\gamma_F)|e||\hat{x}-x_*| - l|e|^2 =$$

$$= -kc_4\left(|\hat{x}-x_*| - \frac{c_3\gamma_f + c_3\gamma_F}{2c_4}|e|\right)^2 - \left(l - k\frac{(c_3\gamma_f + c_3\gamma_F)^2}{4c_4}\right)|e|^2. \quad (28)$$

При $k < 4c_4 l/(c_3\gamma_f + c_3\gamma_F)^2$ производная $\dot{V}(\hat{x}-x_*, e)$ отрицательно определена в пространстве $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Далее, раскрыв квадрат разности в правой части (28), представим неравенство (28), в следующем виде:

$$\dot{V}(\hat{x}-x_*, e) \le$$

$$\le -\left[\left(l - k\frac{(c_3\gamma_f + c_3\gamma_F)^2}{4c_4}\right)|e|^2 - (kc_3\gamma_f + kc_3\gamma_F)|e||\hat{x} - x_*| + \right.$$
$$\left. + kc_4|\hat{x} - x_*|^2\right] - k\frac{(c_3\gamma_f + c_3\gamma_F)^2}{4c_4}|e|^2.$$

Выделив в выражении, стоящем в квадратных скобках, полный квадрат по $|e|$, можно показать, что при $k < 2c_4 l/(c_3\gamma_f + c_3\gamma_F)^2$ справедлива оценка

$$\dot{V}(\hat{x} - x_*, e) \le -\lambda \left|(\hat{x}^{\text{т}} - x_*^{\text{т}}, e^{\text{т}})^{\text{т}}\right|^2, \tag{29}$$

где $(\hat{x}^{\text{т}} - x_*^{\text{т}}, e^{\text{т}})^{\text{т}} \in \mathbf{R}^{2n}$, $\lambda > 0$ — некоторое положительное число.

Заметим, что функция $W(e) = e^{\text{т}}Pe$ является квадратичной формой и удовлетворяет характерным оценкам

$$\lambda_{\min}(P)|e|^2 \le W(e) \le \lambda_{\max}(P)|e|^2, \quad \left|\frac{\partial W(e)}{\partial e}\right| \le 2\lambda_{\max}(P)|e|. \tag{30}$$

С помощью неравенств (30) и (24) (с учетом замены x на $\hat{x}$) для функции $V(\hat{x} - x_*, e)$ получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} &V(\hat{x} - x_*, e) = kV_1(\hat{x} - x_*) + W(e) \le \\ &\le kc_2|\hat{x} - x_*|^2 + \lambda_{\max}(P)|e|^2 \le c_2'|(\hat{x}^{\text{т}} - x_*^{\text{т}}, e^{\text{т}})^{\text{т}}|^2, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &V(\hat{x} - x_*, e) \ge kc_1|\hat{x} - x_*|^2 + \lambda_{\min}(P)|e|^2 \ge \\ &\ge c_1'|(\hat{x}^{\text{т}} - x_*^{\text{т}}, e^{\text{т}})^{\text{т}}|^2, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\left|\frac{\partial V(\hat{x} - x_*, e)}{\partial \hat{x}}\right| \le kc_3|\hat{x} - x_*| + 2\lambda_{\max}(P)|e| \le$$
$$\le c_3'|(\hat{x}^{\text{т}} - x_*^{\text{т}}, e^{\text{т}})^{\text{т}}|, \tag{33}$$

где $c_1' = \min\{kc_1, \lambda_{\min}(P)\}$, $c_2' = \max\{kc_2, \lambda_{\max}(P)\}$, $c_3' = \max\{kc_3, 2\lambda_{\max}(P)\}$. Из полученных неравенств (29) и (31)–(33) согласно работе [13] следует, что решение $\hat{x} = x_*$, $e = 0$ системы (27) глобально экспоненциально устойчиво.

Поскольку замена переменных (26) линейна, то положение равновесия $x = x_*$, $e = 0$ системы (23) также глобально экспоненциально устойчиво. Воспользовавшись этим фактом, получаем следующую оценку для произвольного решения $x(t)$ системы (1) с управлением $u = u(\hat{x}) = u(x + e)$:

$$|x(t) - x_*| = |x(t) - \hat{x}(t) + \hat{x}(t) - x_*| \le |\hat{x}(t) - x_*| + |\hat{x}(t) - x(t)| \le$$

$$\leq |(\hat{x}^{\text{т}}(t) - x_*^{\text{т}}, e^{\text{т}}(t))^{\text{т}}| + |e(t)| \leq \beta_1 \exp(-\alpha_1 t)|(\hat{x}^{\text{т}}(0), e^{\text{т}}(0))^{\text{т}} - \\ -(x_*^{\text{т}}, 0^{\text{т}})^{\text{т}}| + \beta_2 \exp(-\alpha_2 t)|e(0)|;$$

здесь α_1, $\alpha_2 > 0$ и β_1, $\beta_2 > 0$ — константы. Для этого решения выполнено неравенство

$$|x(t) - x_*| \leq \beta \exp(-\alpha t) \quad \forall t \geq 0,$$

где $\beta = \max\{\beta_2|e(0)|,\ \beta_1|(\hat{x}^{\text{т}}(0), e^{\text{т}}(0))^{\text{т}} - (x_*^{\text{т}}, 0^{\text{т}})^{\text{т}}|\}$, $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Следовательно, система (1) с управлением $u = u(x+e)$ глобально асимптотически устойчива в точке $x = x_*$, что завершает доказательство теоремы 3.

Замечание. Использованное при доказательстве теоремы 3 предположение о том, что управление $u(x+e)$, где $u(x)$ соответствует формулировке теоремы 3, обеспечивает существование при всех $t \geq 0$ решений $x(t)$, $e(t)$ системы (23) для любых начальных значений $x(0)$ и $e(0)$, верно всегда при выполнении условий теоремы 3.

Действительно, если некоторое решение $x(t)$, $e(t)$ системы (23) определено только на конечном интервале времени $t \in [0, T)$, $T > 0$, то соответствующее решение $\hat{x}(t)$, $e(t)$ системы (27) в силу замены переменных (26) также определено на данном интервале времени. Согласно предположению 2 для $e(t)$ при любом $t \in [0, T)$ выполнены неравенства (22), (30). Тогда для решения $\hat{x}(t)$, $e(t)$ системы (27) при любом $t \in [0, T)$ справедливы неравенства (29) и (31)–(33). Следовательно, данное решение ограничено при всех $t \in [0, T)$ и в силу замены переменных (26) решение $x(t)$, $e(t)$ системы (23) также ограничено на данном интервале времени. Это означает, что для любых начальных условий $x(0)$ любому локально ограниченному возмущению $e(t)$, генерируемому системой (21) с управлением $u = u(x+e)$, где $u(x)$ соответствует формулировке теоремы 3, отвечает локально ограниченное решение $x(t)$ системы (1) с управлением $u = u(x+e)$. Следовательно, решения системы (1) с данным управлением $u = u(x+e)$ не могут неограниченно возрастать за конечное время и для любых начальных условий $x(0)$ определены при всех $t \geq 0$.

Утверждение. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда система* (1) *с управлением* $u = u(x+e)$, *где* $u(x)$ *соответствует формулировке теоремы* 3, *обладает устойчивостью отображения вход–состояние* [18] *по отношению ко входу* e, *генерируемому системой* (21) *с управлением* $u = u(x+e)$, *т.е. для любого* $x(0)$ *и произвольного решения* $e(t)$ *системы* (21) *при управлении* $u = u(x+e)$ *решение* $x(t)$ *системы* (1) *с управлением* $u = u(x+e)$ *существует при всех* $t \geq 0$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|x(t) - x_*| \leq \beta(|x(0) - x_*|, t) + \alpha(\sup_{0 \leq \tau \leq t} |e(\tau)|) \quad \forall t \geq 0 \qquad (34)$$

где $\beta(s,t)$ и $\alpha(s)$ — некоторые непрерывные функции своих аргументов, строго возрастающие по $s \in \mathbf{R}_+$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(0,t) = 0$ $\forall t \geq 0$, причем имеем $\beta(s,t) \to \infty$ при $s \to \infty$ для любого фиксированного $t \geq 0$, а для любого фиксированного $s \in \mathbf{R}_+$ имеем $\beta(s,t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим систему (23). Линейная замена переменных (26) преобразует систему (23) к виду (27). Подсистема уравнений относительно $\hat{x}$ системы (27) имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x} - e, u(\hat{x})) + F(e, u(\hat{x}), t) = \tilde{f}(\hat{x}, e). \tag{35}$$

Отметим, что правая часть системы (35) явно от времени не зависит, так как согласно предположению 2 имеет вид $\tilde{f}(\hat{x}, e) = g(\hat{x}, h(\hat{x} - e), u(\hat{x}))$. В качестве функции Ляпунова для системы (35) с возмущением e рассмотрим функцию $V(\hat{x} - x_*) = V_1(\hat{x} - x_*)$, где $V_1(x - x_*)$ — функция Ляпунова для системы (1), замкнутой управлением $u(x)$, удовлетворяющая неравенствам (24) и (25). Произведя в неравенствах (24), (25) замену x на $\hat{x}$, с учетом полученных неравенств производную $\dot{V}$ в силу системы (35) можно записать следующим образом:

$$\dot{V}(\hat{x} - x_*) = \frac{\partial V_1(\hat{x} - x_*)}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}, u(\hat{x})) +$$

$$+ \frac{\partial V_1(\hat{x} - x_*)}{\partial \hat{x}} (f(\hat{x} - e, u(\hat{x})) - f(\hat{x}, u(\hat{x}))) +$$

$$+ \frac{\partial V_1(\hat{x} - x_*)}{\partial \hat{x}} F(e, u(\hat{x}), t) \leq -c_4 |\hat{x} - x_*|^2 +$$

$$+ (c_3 \gamma_f + c_3 \gamma_F) |e| |\hat{x} - x_*|.$$

При $|\hat{x} - x_*| \geq k|e|$, $k > 0$, справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}(\hat{x} - x_*) \leq -\left(c_4 - \frac{c_3 \gamma_f}{k} - \frac{c_3 \gamma_F}{k}\right) |\hat{x} - x_*|^2 \leq 0 \tag{36}$$

при $k > (c_3 \gamma_f + c_3 \gamma_F)/c_4$.

Согласно предположению 2 любое решение $e(t)$ системы $\dot{e} = F(e, u(x + e), t)$ определено по крайней мере на некотором конечном интервале времени $t \in [0, T)$, $T > 0$, и на этом интервале непрерывно и ограничено. Неравенства (36) и (24) (с учетом замены x на $\hat{x}$) означают, что при любых $\hat{x}(0)$ любому ограниченному возмущению $e(t)$ соответствует ограниченное решение $\hat{x}(t)$ системы (1) и, следовательно, ограниченное решение $x(t)$ системы (1) с управлением $u = u(x + e)$, где $u(x)$ соответствует формулировке теоремы 3. Следовательно, для любых начальных значений $x(0)$ решения $x(t)$ системы (1) с управлением $u = u(x + e)$ определены при всех $t \geq 0$, и любое решение $e(t)$

системы (21) с данным управлением $u = u(x+e)$ определено при всех $t \geq 0$. Тогда в силу замены переменных (26) для любых $\hat{x}(0)$ решения $\hat{x}(t)$ системы (35) также определены при всех $t \geq 0$.

Из неравенств (36) и (24) (с учетом замены x на $\hat{x}$) следует, что согласно работе [18] система (35) обладает устойчивостью отображения вход–состояние по отношению ко входу e, генерируемому системой (21) с управлением $u = u(x+e)$, и можно показать аналогично тому, как это сделано в работе [18], что для любого $\hat{x}(0)$ и любого решения $e(t)$ системы (21) с управлением $u = u(x+e)$ решение $\hat{x}(t)$ системы (35) при всех $t \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$|\hat{x}(t) - x_*| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}|\hat{x}(0) - x_*| \exp\left(-\frac{kc_4 - c_3\gamma_f - c_3\gamma_F}{2kc_2}t\right) +$$

$$+k\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sup_{0 \leq \tau \leq t} |e(\tau)|.$$

Воспользовавшись соотношениями (26) и неравенствами $|x - x_* + e| \geq |x - x_*| - |e|$ и $|x - x_* + e| \leq |x - x_*| + |e| \quad \forall (x - x_*) \in \mathbf{R}^n$, $\forall e \in \mathbf{R}^n$, получаем, что для любого $x(0)$ решение $x(t)$ системы (1) при управлении $u = u(x+e)$, где $u(x)$ соответствует формулировке теоремы 3, удовлетворяет неравенству (34), где $\beta(s,t) = \sqrt{(c_2/c_1)}s \times \exp(-(kc_4 - c_3\gamma_f - c_3\gamma_F)/(2kc_2)t)$, $\alpha(s) = (k\sqrt{c_2/c_1} + \sqrt{c_2/c_1} + 1)s$, $s \in \mathbf{R}_+$, что завершает доказательство утверждения.

Отметим, что часто удается достичь экспоненциальной устойчивости замкнутой системы в одних переменных, а построить экспоненциальный наблюдатель для системы, записанной в других переменных. В связи с рассматриваемой задачей стабилизации отметим следующие два свойства преобразованной системы. Если две динамические системы $\dot{\xi} = f_1(\xi, t)$ и $\dot{\eta} = f_2(\eta, t)$ связаны заменой переменных $\xi = H(\eta)$, где H — диффеоморфизм пространств $\mathbf{R}^n = \{\eta\}$ и $\mathbf{R}^n = \{\xi\}$, то глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия ξ_* первой системы эквивалентна глобальной асимптотической устойчивости соответствующего положения равновесия $\eta_* = H^{-1}(\xi_*)$ второй системы. Если же отображения H и H^{-1}, к тому же, глобально липшицевы (например, это линейные отображения), то аналогичное утверждение верно для глобальной экспоненциальной устойчивости этих положений равновесия. Последнее следует из неравенств

$$|\eta(t) - \eta_*| = |H^{-1}(\xi(t)) - H^{-1}(\xi_*)| \leq$$
$$\leq \gamma_1|\xi(t) - \xi_*| \leq \gamma_1\beta\exp(-\alpha t)|\xi(0) - \xi_*| =$$
$$= \gamma_1\beta\exp(-\alpha t)|H(\eta(0)) - H(\eta_*)| \leq \gamma_1\gamma_2\beta\exp(-\alpha t)|\eta(0) - \eta_*|,$$

где β, α, γ_1, γ_2 — соответствующие положительные константы.

Основываясь на доказанном выше утверждении и известных результатах по стабилизации каскадных систем [19], сформулируем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть*

1) для системы (1) *выполнено предположение* 1;

2) *построен асимптотический наблюдатель* $\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, h(x), u)$, *такой что уравнение ошибки* $e = \hat{x} - x$ *оценки наблюдателем состояния системы* (1) *имеет вид* (21), *где отображение* $F\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ *кусочно непрерывно по* t *и локально липшицево по* e *и* u, $|F(e, u, t)| \leq \leq \rho(|e|) \quad \forall u \in \mathbf{R}^m$, $\forall t \geq 0$, $\rho(s)$ — *некоторая непрерывная строго возрастающая функция от* $s \in \mathbf{R}_+$, $\rho(0) = 0$, $\rho(s) \to \infty$ *при* $s \to \infty$;

3) при любом управлении u, *таком что решения* $x(t)$ *системы* (1) *при данном управлении для любых начальных значений* $x(0)$ *определены при всех* $t \geq 0$, *и при произвольном решении* $x(t)$ *системы* (1) *с данным управлением положение равновесия* $e = 0$ *системы* (21) *с рассматриваемой правой частью глобально асимптотически устойчиво; при управлении* u, *таком что некоторое решение* $x(t)$ *системы* (1) *с данным управлением определено только на конечном интервале времени* $t \in [0, T)$, $T > 0$, *решения* $e(t)$ *системы* (21) *с рассматриваемой правой частью при данных* u *и* $x(t)$ *для любых начальных значений* $e(0)$ *также определены на данном интервале времени и ограничены на нем;*

4) существует непрерывно дифференцируемая обратная связь $u(x)$ *по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующая положение равновесия* $x = x_*, u = u_*$ *системы* (1).

Тогда система (1) *при управлении* $u = u(\hat{x}) = u(x + e)$ *глобально асимптотически устойчива в точке* $x = x_*$.

Доказательство теоремы основано на факте устойчивости отображения вход–состояние системы (1) при управлении $u = u(x + e)$, где $u(x)$ соответствует формулировке теоремы, по отношению ко входу e, генерируемому системой уравнений ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния с управлением $u = u(x+e)$. Действительно, производную $\dot{V}$ функции $V(\hat{x} - x_*) = V_1(\hat{x} - x_*)$, где $V_1(x - x_*)$ — функция Ляпунова для системы (1), замкнутой управлением $u(x)$, удовлетворяющую неравенствам (24) и (25), в силу системы (35) с рассматриваемой правой частью можно представить следующим образом:

$$\dot{V}(\hat{x} - x_*) = \frac{\partial V_1(\hat{x} - x_*)}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}, u(\hat{x})) +$$

$$+ \frac{\partial V_1(\hat{x} - x_*)}{\partial \hat{x}} (f(\hat{x} - e, u(\hat{x})) - f(\hat{x}, u(\hat{x}))) +$$

$$+ \frac{\partial V_1(\hat{x} - x_*)}{\partial \hat{x}} F(e, u(\hat{x}), t) \leq -c_4 |\hat{x} - x_*|^2 +$$

$$+c_3\gamma_f|e||\hat{x}-x_*|+c_3\rho(|e|)|\hat{x}-x_*|.$$

При $|\hat{x}-x_*|\geq k\tilde{\rho}(|e|)$, где $\tilde{\rho}(s)=\gamma_f s+\rho(s)$, $s\in\mathbf{R}_+$, $k>0$, справедливо неравенство

$$\dot{V}(\hat{x}-x_*)\leq-(c_4-\frac{c_3}{k})|\hat{x}-x_*|^2.$$

Далее, аналогично доказательству утверждения, можно показать устойчивость отображения вход–состояние системы (1) с управлением $u=u(x+e)$, где $u(x)$ соответствует формулировке теоремы, по отношению ко входу e, генерируемому системой уравнений ошибки $e=\hat{x}-x$ оценки состояния с управлением $u=u(x+e)$. Поэтому для любого $x(0)$ решения $x(t)$ системы (1) при управлении $u=u(x+e)$ удовлетворяют неравенству (34). Тогда согласно условиям теоремы положение равновесия $e=0$ системы (21) с управлением $u=u(x+e)$ глобально асимптотически устойчиво. Следовательно, согласно работам [18, 19] положение равновесия $x=x_*$ системы (1) при управлении $u=u(x+e)$ глобально асимптотически устойчиво.

Следствие. Пусть для нелинейной динамической системы вида (1) выполнено предположение 1 и найден закон управления в виде непрерывно дифференцируемой обратной связи $u(x)$ по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующей заданное положение равновесия. Если e — некоторое асимптотически (в частности, экспоненциально) убывающее по времени возмущение, удовлетворяющее системе уравнений $\dot{e}=F(e)$, где вектор-функция $F(\cdot)$ локально липшицева, $F(0)=0$, $|F(e)|\leq\rho(|e|)$, $\rho(s)$ — некоторая непрерывная строго возрастающая функция от $s\in\mathbf{R}_+$, $\rho(0)=0$, $\rho(s)\to\infty$ при $s\to\infty$ (в частности, вектор-функция $F(\cdot)$ глобально липшицева), а положение равновесия $e=0$ системы $\dot{e}=F(e)$ глобально асимптотически (в частности, экспоненциально) устойчиво, то система (1) с управлением $u=u(x+e)$ глобально асимптотически устойчива.

Пример. Рассмотрим гибкий однозвенный робот-манипулятор, уравнения движения которого имеют вид [20]

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-M_1\sin x_1-k_1(x_1-x_3),$$

$$\dot{x}_3=x_4,\quad \dot{x}_4=-b_1x_4+k_2(x_1-x_3)+u/J,\quad y=x_3, \tag{37}$$

где x_1,x_2 — угловая координата и угловая скорость звена манипулятора; x_3,x_4 — угловая координата и угловая скорость вала двигателя; u — управляющий момент, создаваемый двигателем. Константы M_1, b_1, k_1, k_2, J положительны, причем $M_1=MgL/I$, $k_1=k/I$, $k_2=k/J$, $b_1=d/J$, где I, J — моменты инерции звена манипулятора и ротора двигателя соответственно; k — жесткость передаточного механизма;

d — коэффициент демпфирования; M — масса звена манипулятора; $MgL\sin x_1$ — момент сил тяжести, действующий на звено манипулятора.

Предполагается, что измерению доступна только угловая координата x_3 вала двигателя. Необходимо построить управление u в виде обратной связи, использующей только значения выхода системы, стабилизирующее положение равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (37).

Построим для системы (37) наблюдатель и управление в виде обратной связи по оценке состояния замкнутой системы построенным наблюдателем. При построении наблюдателя для системы (37) используем для удобства новые переменные

$$\chi_1 = x_3, \quad \chi_2 = x_4, \quad \chi_3 = k_2x_1 - k_2x_3 - b_1x_4,$$
$$\chi_4 = -k_2b_1x_1 + k_2x_2 + k_2b_1x_3 + (b_1^2 - k_2)x_4. \qquad (38)$$

Замена переменных $x = \Phi(\chi), \Phi(0) = 0$, определяемая соотношениями (38), является линейной и задает диффеоморфизм пространств $\mathbf{R}^4 = \{\chi\}$ и $\mathbf{R}^4 = \{x\}$. В новых переменных χ систему (37) можно представить следующим образом:

$$\dot\chi_1 = \chi_2, \quad \dot\chi_2 = \chi_3 + u/J, \quad \dot\chi_3 = \chi_4 - b_1u/J,$$

$$\dot\chi_4 = a_4(\chi) + (b_1^2 - k_2)u/J,\ y = \chi_1, \qquad (39)$$

где $a_4(\chi) = -b_1k_1\chi_2 - (k_1+k_2)\chi_3 - b_1\chi_4 - k_2M_1\sin((k_2\chi_1 + b_1\chi_2 + \chi_3)/k_2)$.

Система (39) является частным случаем систем вида (11), и, следовательно, глобальный экспоненциальный наблюдатель для системы (39) можно построить, например, в виде

$$\dot{\hat\chi} = a(\hat\chi) + Bu - S^{-1}C^{\text{т}}(C\hat\chi - y); \qquad (40)$$

здесь $a(\hat\chi) = (\hat\chi_2, \hat\chi_3, \hat\chi_4, a_4(\hat\chi))^{\text{т}}$; $B = (0, 1/J, -b_1/J, (b_1^2 - k_2)/J)^{\text{т}}$; $C = (1,0,0,0)$; квадратная матрица $S > 0$ порядка 4 является решением матричного уравнения (13). Далее, поскольку определяемая соотношениями (38) замена переменных $x = \Phi(\chi)$ линейна, то система (40), записанная в переменных $\hat x = \Phi(\hat\chi)$, является глобальным экспоненциальным наблюдателем для системы (37) и имеет вид

$$\dot{\hat x}_1 = \hat x_2 + \left(\frac{l_3}{k_2} + l_1 + \frac{b_1l_2}{k_2}\right)(\hat x_3 - x_3),$$

$$\dot{\hat x}_2 = -M_1\sin\hat x_1 - k_1(\hat x_1 - \hat x_3) + \left(\frac{l_4}{k_2} + l_2 + \frac{b_1l_3}{k_2}\right)(\hat x_3 - x_3),$$

$$\dot{\hat x}_3 = \hat x_4 + l_1(\hat x_3 - x_3),\ \dot{\hat x}_4 = -b_1\hat x_4 + k_2(\hat x_1 - \hat x_3) + l_2(\hat x_3 - x_3) + \frac{1}{Ju}, \qquad (41)$$

где $(l_1, l_2, l_3, l_4)^{\mathrm{т}} = -S^{-1}C^{\mathrm{т}} = (-4\theta, -6\theta^2, -4\theta^3, -\theta^4)^{\mathrm{т}}$.

Заметим, что для системы (37) и наблюдателя (41) выполнены предположения 1 и 2. Управление в виде обратной связи по состоянию, глобально экспоненциально стабилизирующее заданное положение равновесия $x = 0$, $u = 0$ аффинной системы (37) (без выхода), можно найти, например, с помощью метода нелинейной стабилизации, предложенного в работе [21], поскольку эта система во всем пространстве состояний эквивалентна регулярной системе канонического вида, также определенной во всем ее пространстве состояний. Преобразование аффинной системы (37) к каноническому виду определяется функцией $\varphi(x) = x_1$. Дифференцируя эту функцию в силу системы (37), находим новые переменные для записи системы канонического вида:

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = \dot{z}_1 = x_2, \quad z_3 = \dot{z}_2 = -M_1 \sin x_1 - k_1(x_1 - x_3),$$
$$z_4 = \dot{z}_3 = -M_1 x_2 \cos x_1 - k_1 x_2 + k_1 x_4. \tag{42}$$

В переменных $z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ система (37) (без выхода) имеет канонический вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \; \dot{z}_4 = f(z) + \frac{k_1 u}{J}, \tag{43}$$

где $f(z) = -k_2 M_1 \sin z_1 - M_1 \cos z_1 (z_3 + b_1 z_2) + M_1 z_2^2 \sin z_1 - (k_1 + {} + k_2) z_3 - b_1 z_2 k_1 - b_1 z_4$.

Соотношение $z = \mu^{-1}(x)$, задаваемое формулами (42), разрешимо относительно x, $x = \mu(z)$, и задает отображение, являющееся диффеоморфизмом пространств $\mathbf{R}^4 = \{z\}$ и $\mathbf{R}^4 = \{x\}$, причем $z = \mu^{-1}(x)$ и $x = \mu(z)$ таковы, что $\mu^{-1}(0) = 0$ и

$$|z| = |\mu^{-1}(x)| \leq \gamma_1 |x|, \quad |x| = |\mu(z)| \leq \gamma_2 |z| \qquad \forall z \in \mathbf{R}^n, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

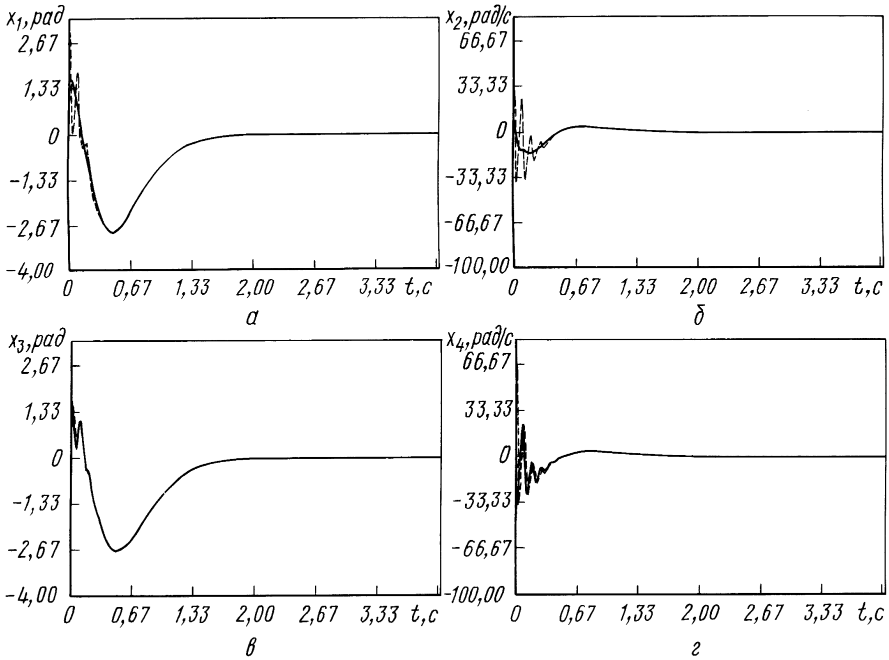
где γ_1, γ_2 — некоторые положительные константы. Поэтому задача глобальной экспоненциальной стабилизации положения равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (37) эквивалентна аналогичной задаче для положения равновесия $z = 0$, $u = 0$ системы (43). Непрерывно дифференцируемой обратной связью, глобально экспоненциально стабилизирующей положение равновесия $z = 0$, $u = 0$ системы (43), является

$$u^*(z) = J k_1^{-1} \left(-f(z) - \sum_{i=0}^{3} \kappa_i z_{i+1} \right), \tag{44}$$

где κ_i — постоянные, $i = \overline{0,3}$. Замкнутая этим управлением система (43) принимает вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -\kappa_0 z_1 - \kappa_1 z_2 - \kappa_3 z_3 - \kappa_4 z_4.$$

Постоянные κ_s, $s = \overline{0,3}$, выбираются таким образом, чтобы $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$ было асимптотически устойчивым решением замкнутой системы.



Переходные процессы системы (сплошные кривые) и наблюдателя (штриховые кривые) для $x_1(a)$**,** $x_2(б)$**,** $x_3(в)$**,** $x_4(г)$

Как уже отмечалось, из глобальной экспоненциальной устойчивости положения равновесия системы (43), замкнутой управлением (44), следует глобальная экспоненциальная устойчивость соответствующего положения равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (37), замкнутой управлением $u(x) = u^*(\mu^{-1}(x))$. Следовательно, согласно теореме 3 управление $u(\hat{x}) = u^*(\mu^{-1}(\hat{x}))$, где $\hat{x}$ — оценка вектора состояния системы (37), получаемая с помощью наблюдателя (41), будет глобально асимптотически стабилизировать положение равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (37).

Замечание. Глобальный экспонециальный наблюдатель для системы (37) можно построить также, например, в виде (9) или (11).

Результаты численного моделирования систем (37) и (41) с управлением $u = u^*(\mu^{-1}(\hat{x}))$ представлены на рисунке для следующих значений параметров и начальных данных рассматриваемой системы и наблюдателя: $M_1 = 26$ рад $\cdot$ с$^{-2}$; $k_1 = 230$ с$^{-2}$; $k_2 = 1783$ с$^{-2}$; $b_1 = 1{,}75$ с$^{-1}$; $J = 0{,}004$ кг $\cdot$ м^2; $\theta = 50$; $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^{\text{т}} = (1{,}5; 0{,}02; 1{,}41; 0{,}01)^{\text{т}}$; $(\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0), \hat{x}_3(0), \hat{x}_4(0))^{\text{т}} = (0, 0, 0, 0)^{\text{т}}$.

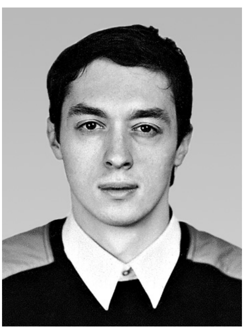
Заключение. В настоящей работе показана справедливость глобального принципа разделения для класса нелинейных динамических систем достаточно общего вида. Рассматриваемый класс включает системы, для которых строятся глобальные экспоненциальные наблюдатели с помощью основных известных в настоящее время методов их построения для нелинейных динамических систем с управлением. Однако, как показывают результаты численного моделирования системы гибкого однозвенного робота-манипулятора, даже при выполнении глобального принципа разделения замена вектора состояния системы в стабилизирующей обратной связи по состоянию на его оценку может привести к резкому возрастанию амплитуды колебаний переходного процесса системы, что нежелательно. Одним из путей решения данной проблемы является, например, введение ограничений управления и переформулировка полученных результатов для случая стабилизации в большом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машиностроение: Энцикл. Автоматическое управление. Теория. Т.1–4. – М., 2000.
2. Freeman R. Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1995. – V. 40. – № 12. – P. 2119–2122.
3. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P. Nonlinear and Adaptive Control Design. – N. Y.: John Wiley and Sons, 1995.
4. Tsinias J. A generalization of Vidyasagar's theorem on stabilizability using state detection // Systems and Control Letters. – 1991. – № 17. – P. 37–42.
5. Atassi A. N., Khalil H. K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1999. – V. 44. – № 9. – P. 1672–1687.
6. Teel A., Praly L. Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback // Systems and Control Letters. – 1994. – № 22. – P. 313– 325.
7. Gauthier J. P., Hammouri H., Othman S. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1992. – V. 37. – № 6. – P. 875–880.
8. Krener A. J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers // Systems and Control Letters. – 1983. – № 3. – P. 47–52.
9. Krener A. J., Respondek W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics // SIAM J. Control and Optimization. – 1985. – V. 23. – № 2. – P. 197–216.
10. Крищенко А. П., Ткачев С. Б. Нелинейные $k(x)$-двойственные системы // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 21–34.
11. Голубев А. Е., Крищенко А. П., Ткачев С. Б. Принцип разделения для аффинных систем // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 11. – С. 1468–1475.
12. Крищенко А. П., Ткачев С. Б. Нелинейные $k(x)$-двойственные системы и синтез наблюдателей // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 5. – С. 648–663.

13. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
14. T h a u F. E. Observing the state of non-linear dynamic systems // Int. J. Control. – 1973. – № 17. – P. 471–479.
15. R a g h a v a n S., H e d r i c k J. K. Observer design for a class of nonlinear systems // Int. J. Control. – 1994. – V. 59. – № 2. – P. 515–528.
16. R a j a m a n i R. Observers for Lipschitz nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1998. – V. 43. – № 3. – P. 397–401.
17. A r c a k M., K o k o t o v i ć P. V. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities // IEEE Trans. Autom. Contr. – 2001. – V. 46. – № 7. – P. 1146–1150.
18. S o n t a g E. D. Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1989. – V. 34. – P. 435–443.
19. K h a l i l H. K. Nonlinear systems. – N. Y.: Prentice-Hall, 1996.
20. M a r i n o R., T o m e i P. Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust. – London: Prentice-Hall, 1995.
21. К р и щ е н к о А. П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Сер. Технич. кибернетика. – 1985. – № 6. – С. 103–112.

Статья поступила в редакцию 31.01.2003



Алексей Евгеньевич Голубев родился в 1978 г., окончил в 2002 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех научных работ в области стабилизации нелинейных динамических систем обратной связью по выходу.

A.Ye. Golubev (b. 1978) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Post-graduate of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of output feedback control of nonlinear dynamical systems.

УДК 519.872

В. В. Ч а п л ы г и н

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $SM/MSP/1/r$[1]

Рассмотрена однолинейная система массового обслуживания с полумарковским входящим потоком, марковским процессом обслуживания и накопителем конечной или бесконечной емкости. Для этой системы с помощью метода построения вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных характеристик обслуживания.

Описание системы. Рассмотрим систему массового обслуживания $SM/MSP/1/r$ $(r \leq \infty)$ с накопителем емкости r.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №02-07-90147).