УДК 51.73

А. И. Филиппов, А. С. Хисматуллин,
Э. В. Мухаметзянов, А. И. Леонтьев

ТЕПЛОВОЙ ТРАНСЦИЛЛЯТОР БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Рассмотрены явления теплопереноса, инициированные волновым полем в среде. Показано, что значения коэффициентов переноса возрастают даже в случае распространения плоской волны в однородной среде. Полученное спектральное представление позволяет построить выражения коэффициентов трансциляторного переноса для различных волновых пакетов.

E-mail: filippovai@rambler.ru; hism5az@rambler.ru

Ключевые слова: трансциляторный перенос теплоты, монохроматическая волна, число Маха, акустические поля.

Экспериментально установлено [1], что при воздействии волновых полей в сложных средах возрастают значения коэффициентов переноса. Физический механизм этого явления достаточно сложен, и до настоящего времени нет полной теории этого явления. Одним из механизмов, объясняющих явление возрастания коэффициентов переноса, является так называемый трансциляторный [2–4] механизм. Его суть состоит в увеличении потока за счет относительного смещения частиц среды, вызываемого волновым полем. Трансциляторный теплоперенос относится к диффузионно-конвективным процессам, возникающим при колебательном относительном перемещении участков или частей среды [5]. Теория явления трансцилляторного переноса приводит к уравнениям в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами.

Рассмотрим простейший случай однородной среды, находящейся под воздействием плоской монохроматической или немонохроматической волны. Уравнение, описывающее эволюцию температуры T в однородной изотропной среде, имеет вид

$$a\Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{U}\left(\vec{r}, t\right)\,\nabla T, \tag{1}$$

где a — коэффициент диффузии; $\vec{U}\left(\vec{r}, t\right)$ — поле скоростей в волновой зоне. Это уравнение учитывает диффузионные и конвективные процессы, возникающие за счет смещений в волновой зоне.

Получение аналитических решений уравнения (1) для волновых полей затруднено вследствие сложной зависимости скорости колебательного движения от координат и времени. Ниже, в отличие от работы [1], для решения уравнения (1) использован метод редукции к эквивалентному интегральному уравнению, не требующий построения точного аналитического решения. Для простоты полагаем, что волна является поперечной и распространяется вдоль оси Ox со скоростью v, а отличной от нуля является координата скорости колебаний среды $U_y(x,t)$. Начальное температурное поле предполагается заданным: $T(x,y,t)|_{t=0} = -\Gamma_y y$. Составляющую градиента скалярного поля Γ_y полагаем постоянной. Построение модели теплового трансциллятора бегущей волны при этих предположениях сводится к отысканию решений вида

$$T(x,y,z,t) = T'(x,t) - \Gamma_y y. \tag{2}$$

Рассмотрим случай монохроматической волны. Для плоской упругой поперечной волны, распространяющейся вдоль оси Ox с плоскостью колебаний, параллельной оси Oy, имеем

$$U_y(x,\, t) = A\omega \sin(\omega t - kx)\,, \quad U_z = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}, \tag{3}$$

где ω — частота колебаний.

Для соответствующего уравнения относительно $T'(x,t)$

$$a\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} - \frac{\partial T'}{\partial t} = U_y \frac{\partial T'}{\partial y} - U_y \Gamma_y = q(x,y,t) \tag{4}$$

($q(x,y,t)$ — эквивалентный источник теплоты) с однородным начальным условием

$$T'|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

с использованием представления T' обобщенной функцией

$$T' = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} q(x',t')\, G(x-x',t-t')\, dx'dt', \tag{6}$$

получим уравнение для функции Грина

$$\hat{L}G = \delta(x-x')\,\delta(t-t')\,, \tag{7}$$

где $\hat{L} = a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ — оператор теплопроводности.

Для нахождения функции Грина воспользуемся представлением δ-функции Дирака в виде

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\gamma(x-x'))d\gamma, \\ \delta(t-t') &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\beta(t-t'))d\beta. \end{aligned} \tag{8}$$

С помощью процедуры “деления на оператор” имеем

$$G\left(x-x',t-t'\right)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\gamma\left(x-x'\right)+i\beta\left(t-t'\right)\right)}{a\gamma^2+i\beta}d\gamma d\beta. \tag{9}$$

Вычислив интегралы в выражении (9), получим

$$G\left(x-x',t-t'\right)=-\exp\left[-\frac{\left(x-x'\right)^2}{4a\left(t-t'\right)}\right]\frac{\Phi\left(t-t'\right)}{2\sqrt{\pi a\left(t-t'\right)}}, \tag{10}$$

где $\Phi\left(x\right)$ — единичная функция Хевисайда.

С использованием соотношений (6), (4) и (10) запишем эквивалентное исходной задаче интегро-дифференциальное уравнение

$$T'=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{t}U_y\left(\Gamma_y-\frac{\partial T'}{\partial y}\right)\exp\left[-\frac{\left(x-x'\right)^2}{4a\left(t-t'\right)}\right]\frac{dx'dt'}{2\sqrt{\pi a\left(t-t'\right)}}. \tag{11}$$

Учитывая, что $\Gamma_y\gg\dfrac{\partial T'}{\partial y}$, подставляя выражение (3) в (11) и используя формулы Эйлера, после упрощения получаем

$$T'=\frac{A\,\omega\Gamma_y}{2i}\times$$
$$\times\left[e^{-ikx-k^2a\,t}\int\limits_0^t e^{i\omega t'+k^2a\,t'}dt'-e^{ikx-k^2a\,t}\int\limits_0^t e^{-i\omega t'+k^2a\,t'}dt'\right] \tag{12}$$

и в окончательном виде

$$T'=\frac{A\,\omega\,\Gamma_y}{2i}\left[e^{-ikx}\frac{e^{i\omega t}-e^{-k^2a\,t}}{i\omega+k^2a}-e^{ikx}\frac{e^{-i\omega t}-e^{-k^2a\,t}}{-i\omega+k^2a}\right]. \tag{13}$$

Для достаточно больших времен ($t\gg 1/\left(k^2a\right)$) из (13) следует

$$T'=\frac{A\omega\,\Gamma_y}{k^4a^2+\omega^2}\left[k^2a\sin\left(\omega t-kx\right)-\omega\cos\left(\omega t-kx\right)\right]. \tag{14}$$

Поток теплоты вдоль оси Oy складывается из диффузионного и конвективного потоков:

$$j_y=-ac\rho\frac{\partial T}{\partial y}+c\rho U_yT, \tag{15}$$

где $c\rho$ — объемная теплоемкость среды. Рассмотрим конвективную составляющую потока

$$j_y^{conv} = c\rho U_y T' =$$
$$= \frac{c\rho A^2\omega^2\Gamma_y}{k^4a^2+\omega^2}\left[k^2 a\sin^2(\omega t - kx) - \omega\cos(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx)\right]. \tag{16}$$

Усреднение выражения (16) по периоду колебаний приводит к следующему выражению:

$$\left\langle j_y^{conv}\right\rangle = \frac{c\rho A^2\omega^2k^2\,a\Gamma_y}{2\left(k^4a^2+\omega^2\right)}. \tag{17}$$

Соответствующий коэффициент переноса

$$\lambda_{tr} = \frac{\left\langle j_y^{conv}\right\rangle}{\Gamma_y} = \frac{c\rho A^2\omega^2k^2a}{2\left(k^4a^2+\omega^2\right)} = \frac{c\rho A^2v^2}{2a\left(1+\dfrac{v^4}{a^2\omega^2}\right)} \tag{18}$$

называется коэффициентом трансцилляторного переноса (КТП). Трансцилляторный перенос теплоты возникает за счет диффузного обмена между слоями среды, участвующими в колебательном движении. Он отличается от чисто конвективного, поскольку регулярного переноса частиц среды в этом случае нет.

Разложим (18) в степенной ряд и, удерживая два члена, получим

$$\lambda_{tr} = \frac{c\rho A^2v^2}{2a\left(1+\dfrac{v^4}{a^2\omega^2}\right)} = \frac{c\rho a}{2}M^2\left(1-\frac{a^2M^2}{A^2\mathrm{v}^2}\right),$$

где $M = A\omega/v$ — число Маха.

Результирующий коэффициент переноса вдоль оси Oy представляется в виде суммы диффузного и трансцилляторного коэффициентов: $a_y = a + \lambda_{tr}$.

Рассмотрим далее случай плоской немонохроматической волны, бегущей вдоль оси Oy. Представив соответствующую координату скорости смещения среды в виде интеграла Фурье, получим

$$U_y(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_y(\omega)\exp\left\{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}d\omega, \tag{19}$$

где $U_y(\omega)$ — спектральная компонента скорости.

Подставив (19) в (11), получим выражение для поля скаляра T' в виде

$$T' = \frac{\Gamma_y}{\pi\sqrt{8a}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' \int\limits_{0}^{t} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_y\left(\omega\right) \times$$

$$\times \exp\left[i\omega\left(t' - \frac{x'}{v}\right) - \frac{\left(x - x'\right)^2}{4a\ \left(t - t'\right)}\right] \frac{d\omega}{\sqrt{\left(t - t'\right)}}. \quad (20)$$

Для достаточно больших $t \gg \dfrac{1}{k^2 a}$ выражение (20) принимает вид

$$T' = \frac{\Gamma_y}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_y\left(\omega\right) \exp\left[i\omega\left(t' - \frac{x'}{v}\right)\right] \frac{d\omega}{a\dfrac{\omega^2}{v^2} + i\omega}. \quad (21)$$

Усредняя выражение для конвективного потока посредством интеграла

$$\int\limits_{t}^{t+\tau} e^{i(\omega+\omega')t'} dt' = \left\{e^{i(\omega+\omega')(t+\tau)} - e^{i(\omega+\omega')\,t}\right\} \Big/ \left(i\left(\omega + \omega'\right)\right), \quad (22)$$

где τ — период усреднения, получаем

$$\left\langle j_y^{conv} \right\rangle =$$

$$= \frac{c\rho\Gamma_y}{2\,\pi i\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_y\left(\omega'\right) U_y\left(\omega\right) e^{i(\omega+\omega')\left(t - \frac{x}{v}\right)} \frac{e^{i(\omega+\omega')\tau} - 1}{\left(a\dfrac{\omega^2}{v^2} + i\omega\right)\left(\omega + \omega'\right)} d\omega' d\omega. \quad (23)$$

Выражение (23) позволяет построить искомое спектральное представление КТП в волновой зоне

$$\lambda_{tr} = \frac{c\rho}{2\pi i\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_y\left(\omega'\right) U_y\left(\omega\right) e^{i(\omega+\omega')\left(t - \frac{x}{v}\right)} \times$$

$$\times \frac{e^{i(\omega+\omega')\tau} - 1}{\left(a\dfrac{\omega^2}{v^2} + i\omega\right)\left(\omega + \omega'\right)} d\omega' d\omega. \quad (24)$$

Практическое значение формулы (24) заключается в возможности вычисления коэффициента переноса, если известны спектральные компоненты поля скорости в волновой зоне. Передаточная функция согласно (24) может быть определена в виде

$$\lambda_{\text{тр}}(\omega,\omega') = e^{i(\omega+\omega')\left(t-\frac{x}{v}\right)} \frac{\left(e^{i(\omega+\omega')\tau}-1\right)}{\left(a\dfrac{\omega^2}{v^2}+i\omega\right)(\omega+\omega')}. \tag{25}$$

Проиллюстрируем это на следующих примерах. Для произвольных периодических колебаний представим поле скорости в виде экспоненциального ряда

$$U_y\left(t-\frac{x}{v}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0\left(t-\frac{x}{v}\right)}, \tag{26}$$

где $C_m = \dfrac{a_m - ib_m}{2}$, $C_{-m} = \dfrac{a_m + ib_m}{2}$, a_m и b_m — коэффициенты разложения Фурье. Будем полагать, что $C_0 = 0$. Тогда

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m\, e^{i\,m\,\omega_0\,t'} \right) e^{-i\,\omega\,t'} dt' =$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ C_m \delta(\omega - m\omega_0) + C_{-m}\delta(\omega + m\omega_0) \right\} = \sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} U_m(\omega). \tag{27}$$

Подстановка (27) в (24) приводит к необходимости вычисления следующих двух интегралов с использованием передаточной функции:

$$I_1^m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_m(\omega')\lambda_{\text{тр}}(\omega,\omega')\, d\omega' = \frac{\sqrt{2\pi}}{a\dfrac{\omega^2}{v^2}+i\omega} \times$$

$$\times \left\{ C_m\, e^{i(\omega+m\omega_0)\left(t-\frac{x}{v}\right)} \cdot \frac{\exp\left[i(\omega+m\omega_0)\tau - 1\right]}{\omega+m\omega_0} + \right.$$

$$\left. + C_{-m}\, e^{i(\omega-m\omega_0)\left(t-\frac{x}{v}\right)} \cdot \frac{\exp\left[i(\omega-m\omega_0)\tau - 1\right]}{\omega+m\omega_0} \right\}, \tag{28}$$

$$I_2^m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_m(\omega) I_1^m(\omega)\, d\omega =$$

$$= 2\pi \left[\frac{C_m^2 \exp\left[2im\omega_0\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] \dfrac{\exp(2im\omega_0\tau)-1}{2m\omega_0} + C_m C_{-m}\tau i}{\left(a\dfrac{m^2\omega_0^2}{v^2}+i\omega\omega_0\right)} + \right.$$

$$+\frac{C_m C_{-m}\tau i + C_{-m}^2 \exp(-2im\omega_0)\left(t-\frac{x}{v}\right)\frac{\exp[-2im\omega_0\tau]-1}{2m\omega_0}}{a\frac{m^2\omega_0^2}{v^2}+i\omega\omega_0}\Bigg]. \quad (29)$$

Выбирая в качестве τ основной период функции $\tau = 2\pi/\omega_0$, получаем

$$\lambda_{tr} = \frac{c\rho a}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m^2+b_m^2}{v^2\left(a^2\frac{m^2\omega_0^2}{v^4}+1\right)}. \quad (30)$$

Для заданных коэффициентов Фурье смещений A_m и B_m в волновом поле имеем следующее выражение для КТП:

$$\lambda_{tr} = \frac{c\rho v^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m^2+B_m^2}{a\left(1+\frac{v^4}{a^2m^2\omega_0^2}\right)}. \quad (31)$$

Полученное выражение свидетельствует об аддитивности КТП относительно гармоник Фурье. Для частного случая монохроматической волны, когда колебания представлены только одной первой гармоникой $A_1 = A$, а остальные гармоники отсутствуют ($B_m = 0$ и $A_m = 0$ при $m \neq 1$), из (31) получим выражение, совпадающее с (18):

$$\lambda_{tr} = \frac{c\rho A^2 v^2}{2a\left(1+\frac{v^4}{a^2\omega_0^2}\right)}. \quad (32)$$

Формула (32) показывает, что КТП пропорционален квадрату амплитуды колебаний. При увеличении частоты ω_0 он монотонно возрастает, стремясь к предельному значению $\lambda_{tr\,\max} = c\rho A^2 v^2/(2a)$.

Оценки показывают, что трансцилляторный коэффициент теплопроводности сравним с диффузионным только при больших амплитудах, достижимых только в специальных акустических резонаторах. Однако более существен вклад трансцилляторного переноса в периодических движениях жидкости, инициированных всплыванием цепочек пузырьков. Основные соотношения, полученные выше, применимы и в этом случае, поскольку поле скоростей при периодическом всплывании пузырьков описывается соотношениями типа бегущей волны (присоединенная волна). Например, при всплывании пузырьков миллиметрового диаметра в воде, как показывают расчеты на основе полученных выше соотношений, КТП в десятки и сотни раз превышает коэффициент молекулярного переноса.

Выводы. При распространении поперечных волновых возмущений в среде возникает дополнительный перенос тепла (трансцилляторный

ный). Коэффициент теплопроводности получает максимальное приращение в плоскости колебаний. Изотропная среда в волновом поле проявляет анизотропию по отношению к коэффициентам переноса. Трансцилляторный перенос обуславливает дополнительную необратимость процессов переноса.

Полученные спектральные соотношения позволили получить выражения коэффициентов переноса для немонохроматической волны.

Результаты работы могут найти применение при использования волновых полей в химической технологии, где коэффициенты теплопроводности и диффузии определяют скорость реакций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А. И., Филиппов К. А. О диффузии под воздействием звука // Акустический журнал. – 1991. – Т. 45. – № 3. – С. 414–417.
2. Несис Е. И., Шаталов А. Ф., Кармацкий Н. П. Зависимость коэффициента теплоотдачи от амплитуды и частоты вибрации вертикального тонкого нагревателя // Инженерно-физический журнал. – 1994. – Т. 67, № 1–3. – С. 20–22.
3. Нигматулин Р. И., Филиппов А. И., Ахатов И. Ш., Ниязгулов С. А. Уравнения с периодическими коэффициентами и теория хаоса // Статика и динамика упорядоченных сред: Межвузовск. научн. сб. Башк. ун-т. – Уфа. – 1994. – С. 81–93.
4. Филиппов А. И., Котельников В. А., Минлибаев М. Р. Некоторые особенности явления переноса тепла при колебаниях в пористой среде // Теплофизика высоких температур. – 1996. – Т. 34, № 65. – С. 708–713.
5. Mols B., Oliemans R. A turbulent diffusion model for particle dispersion and deposition in horizontal tube flow // Int. J. Multiphase Flow. – 1998. – V. 24, № 1. – P. 55–75.
6. Gavignet E., Ballandars S., Bigler E. Analysis and experimental study of surface transverse wave resonators on quartz // J. Appl. Phys. – 1996. – V. 79(12). – P. 8944–8950.

Статья поступила в редакцию 11.05.2010

Александр Иванович Филиппов родился в 1949 г., окончил в 1972 г. Башкирский государственный университет. Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Теоретическая физика и методика обучения физике” Стерлитамакской государственной педагогической академии им. З. Биишевой. Автор более 200 научных работ, в том числе 30 изобретений и патентов и шести монографий, в области теплофизики, геофизики, физики пористых тел, математического моделирования термо- и гидродинамических процессов.

A.I Filippov (b. 1949) graduated from the Bashkir State University in 1972. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Theoretical Physics and Methodology of Teaching Physics” department of Sterlitamak State Pedagogical Academy n. a. Z. Biisheva. Author of more than 200 publications including 30 inventions and patents and 6 monographs in the field of thermal physics, geophysics, physics of porous bodies, mathematical simulations of thermo- and hydrodynamical processes.

Азат Салаватович Хисматуллин родился в 1983 г., окончил в 2005 г. Стерлитамакскую государственную педагогическую академию им. З. Биишевой. Ассистент кафедры “Теоретическая физика и методика обучения физике” Стерлитамакской государственной педагогической академии им. З. Биишевой. Автор 39 научных работ в области экспериментальной теплофизики и явления переноса в многокомпонентных системах.

A.S. Khismatulin (b. 1983) graduated from the Sterlitamak State Pedagogical Academy n. a. Z. Biisheva in 2005. Assistant lecturer of “Theoretical Physics and Methodology of Teaching Physics” department of Sterlitamak State Pedagogical Academy n. a. Z. Biisheva. Author of 39 publications in the field of experimental thermal physics and transfer phenomena in multicomponent systems.

Эльвир Венерович Мухаметзянов родился в 1987 г., окончил в 2009 г. Стерлитамакскую государственную педагогическую академию им. З. Биишевой. Аспирант Стерлитамакской государственной педагогической академии им. З. Биишевой Автор пяти научных работ в области математического моделирования теплофизических процессов.

E.V. Mukhametzyanov (b. 1987) graduated from the Sterlitamak State Pedagogical Academy n.a. Z. Biisheva in 2009. Post-graduate of Sterlitamak State Pedagogical Academy n.a. Z. Biisheva. Author of 5 publications in the field of mathematical simulations of thermophysical processes.

Андрей Иванович Леонтьев окончил в 2010 г. Стерлитамакскую государственную педагогическую академию им. З. Биишевой. Аспирант Стерлитамакской государственной педагогической академии им. З. Биишевой Автор четырех научных работ в области математического моделирования теплофизических процессов.

A.I. Leontiev graduated from the Sterlitamak State Pedagogical Academy n.a. Z. Biisheva in 2010. Post-graduate of Sterlitamak State Pedagogical Academy n.a. Z. Biisheva. Author of 4 publications in the field of mathematical simulations of thermophysical processes.