УДК 517.926.4

П. А. Белоусов

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СТРУН СО СВОЙСТВОМ ПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ СМЕЩЕНИЯ

Разработана теория построения функции линейной плотности струны, обладающей свойством сохранения основного тона колебаний любого ее отрезка фиксированной длины. Рассмотрен случай, когда струна заменяется набором материальных точек на невесомой упругой нити, и построен пример дискретного распределения масс в струне.

Рассмотрим бесконечную (в обе стороны) струну. Она характеризуется линейной плотностью (однородности не предполагается) и силой натяжения. Для упрощения считаем, что эта сила равна единице. Вырежем из струны (мысленно) любой отрезок конечной длины и закрепим его концы. Этой конечной струне соответствует спектр частот собственных колебаний. Практический интерес представляет наименьшая частота. Напомним, что именно она определяет высоту звука, издаваемого струной. Рассмотрим различные отрезки с фиксированным значением наименьшей частоты, которое положим равным единице. Изучим следующие вопросы.

1. Предположим, что плотность струны неизвестна, но известны все отрезки с указанным свойством (наименьшая частота равна единице). Можно ли по этому семейству отрезков однозначно восстановить неизвестную плотность? Далее будет показано, что ответ на этот вопрос отрицателен.

2. Как описать бесконечные струны, для которых все отрезки с указанным свойством имеют одинаковую длину? Далее приведем способ нахождения таких плотностей и покажем, что они представляют собой периодические функции.

3. Те же вопросы поставим в случае, когда струна заменяется набором материальных точек (“бусинок”) на невесомой упругой нити. Построим семейство цепочек с указанным свойством.

Общие сведения. Собственные колебания струны, закрепленной в точках с координатами a, b, $a < b$, описываются спектральной задачей

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda p(x)\, y = 0, \\ &y(a) = y(b) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Полагаем, что сила натяжения струны равна единице. Тогда $p(x)$ — линейная плотность. Спектр задачи (1) состоит из чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$

$\lambda_1 > 0, \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, а собственные функции $f_k(x)\,, k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют (при подходящей нормировке) условию

$$\int\limits_a^b f_i(x)\, f_j(x)\, p(x)\, dx = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Функции $f_k(x)$ обращаются в нуль на интервале $(a; b)$ ровно $k-1$ раз. В частности, $f_1(x) \neq 0$ при $x \in (a; b)$.

Рассмотрим бесконечную (в обе стороны) струну с плотностью $p(x)$, $x \in R$; функцию $p(x)$ полагаем непрерывной положительной. Для любых точек a, b, $a < b$, рассмотрим задачу (1). Обозначим ее собственные значения через $\lambda_k(a, b)$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим величину $\lambda_1(a, b)$ как функцию точек a и b. Отметим ее свойства (они следуют из общих фактов, изложенных, например, в работах [1, 2]):

1) для фиксированной точки $a \in R$ функция $\lambda_1(a, b)$ от $b \in (a; +\infty)$ строго убывает, и, следовательно, существует неотрицательный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \lambda_1(a, b)$, который обозначим через $\lambda_1(a, \infty)$;

2) функция $\lambda_1(a, \infty)$ от a является неубывающей;

3) $\lim\limits_{b\to a+0} \lambda_1(a, b) = +\infty$.

Функция смещения. Постановка задачи. Рассмотрим струну с плотностью $p(x)$, $x \in R$, и отрезки $[a; b]$, такие что

$$\lambda_1(a, b) = 1. \tag{2}$$

Из свойств 1)–3) вытекает, что для каждой точки $a \in R$ существует одна, и не более того, точка $b > a$ со свойством (2). Кроме того, точки $a \in R$, для которых существует такая точка b, образуют множество вида $(-\infty; a_0)$, где $a_0 \leqslant +\infty$. Любой отрезок $[a; b]$ со свойством (2) можно представить в виде $[a; a + \rho(a)]$, $a < a_0$, $\rho(a) > 0$. Функцию $\rho(a)$ назовем *функцией смещения*, а точку $a + \rho(a)$ — *сопряженной* точке a.

Итак, любой положительной непрерывной функции $p(x)$ (плотности струны), $x \in R$, поставим в соответствие функцию $\rho(a)$, $a < a_0$. Переформулируем задачу в терминах функции смещения.

1. Имея $\rho(a)$, $a < a_0$, необходимо определить соответствующую плотность $p(x)$, $x \in R$. Требуется выяснить, в частности, восстанавливается ли плотность однозначно по данной функции смещения $\rho(a)$. Далее покажем, что ответ отрицателен.

2. Необходимо найти все струны (т.е. их плотности $p(x)$), для которых функция смещения постоянна.

Полярное представление решения дифференциального уравнения $y'' + p(t)y = 0$ (представление Боля). Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(t)y = 0, \tag{3}$$

где $t \in R$, $p(t)$ — положительная непрерывная функция. Пусть $(u(t); v(t))^{\text{т}}$ — некоторая фундаментальная система решений уравнения (3). Несложно показать, что вронскиан этой фундаментальной системы решений, т.е. функция $w(t) = u(t)\, v'(t) - u'(t)\, v(t)$, постоянен и отличен от нуля для всех t. Зафиксируем такую фундаментальную систему решений, что $w(t) \equiv 1$ при $t \in R$. Получим кривую, параметрически заданную на плоскости x, y уравнениями

$$\begin{aligned} x &= u(t), \\ y &= v(t), \end{aligned}$$

где $t \in R$. Эта кривая не проходит через точку $(0; 0)$ и, следовательно, может быть задана уравнениями в полярных координатах $(r(t)\,; \varphi(t))$. Тогда

$$\begin{aligned} u(t) &= r(t) \cos \varphi(t), \\ v(t) &= r(t) \sin \varphi(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Подставим уравнения (4) во вронскиан $w(t) = u(t)\, v'(t) - u'(t)\, v(t)$ и выразим производную полярного угла через полярный радиус:

$$\varphi' = \frac{1}{r^2}. \tag{5}$$

Из последнего соотношения следует два важных вывода:

а) функция $\varphi(t)$ строго возрастает при всех t;

б) функция $r(t)$ ни при каких t не обращается в нуль.

Из пункта б) следует, что нули функций $u(t)$ и $v(t)$ определяются полностью только функцией $\varphi(t)$.

С учетом равенства (5) рассматриваемую фундаментальную систему решений уравнения представим в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\sqrt{\varphi'(t)}} \cos \varphi(t), \\ v(t) &= \frac{1}{\sqrt{\varphi'(t)}} \sin \varphi(t), \end{aligned}$$

т.е. в виде формул Боля [3]. Любое частное решение $y(t)$ представляется линейной комбинацией функций из фундаментальной системы решений и, следовательно, имеет вид

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{\varphi'(t)}} \sin(\varphi(t) + B), \tag{6}$$

где A и B — постоянные.

Наконец, выразим функцию $p(t)$ через $\varphi(t)$. Для этого воспользуемся равенством (6) и тем, что

$$p(t) = -\frac{u''(t)}{u(t)}.$$

Введем обозначение $\varphi' = \theta$ и непосредственным подсчетом убедимся, что

$$p(t) = \theta(t)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta''(t)}{\theta(t)}. \tag{7}$$

Выразим также $p(t)$ через функцию

$$\omega(t) = \frac{1}{\theta(t)} = r^2(t) = u^2(t) + v^2(t)\,,$$

получим

$$p(t) = \frac{1}{\omega^2(t)} + \frac{1}{4}\left(\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\omega''(t)}{\omega(t)}. \tag{8}$$

Рассмотрим простой пример. Пусть $p(t) \equiv 0$. В этом случае любая фундаментальная система решений со вронскианом, равным единице, имеет вид

$$u(t) = a_1 t + b_1,$$
$$v(t) = a_2 t + b_2,$$
$$b_1 a_2 - b_2 a_1 = 1.$$

Таким образом,

$$\omega(t) = (a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2\,. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что последнюю функцию можно представить в виде

$$\omega(t) = A(t+B)^2 + \frac{1}{A}, \quad A > 0. \tag{10}$$

Верно и обратное: любая функция вида (10) представима в виде (9).

Связь функции смещения и угловой координаты. Найдем явную связь между функцией смещения $\rho(x)$ и угловой координатой $\varphi(x)$ в полярном представлении решения уравнения (3). Рассмотрим частное решение $y(x)$ уравнения из задачи (1) при $\lambda = 1$, записанное в виде (6). Решение, обращающееся в нуль в точке a, имеет вид (с точностью до ненулевого множителя)

$$y(x) = r(x)\sin(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

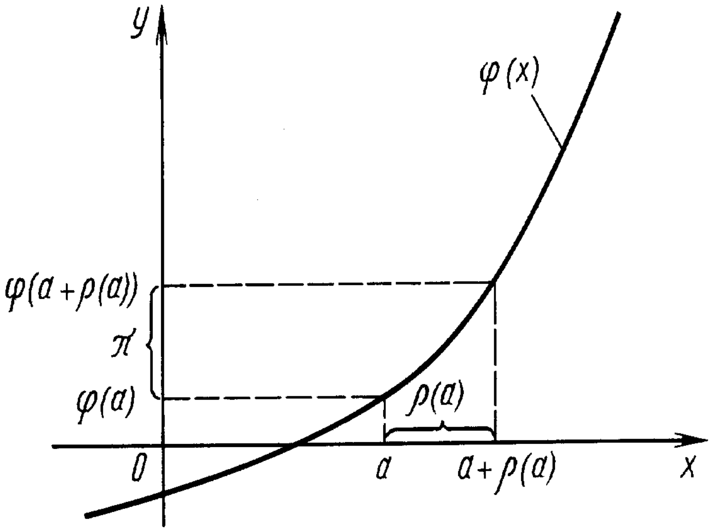

Рис. 1. К уравнению (11)

Отсюда несложно определить, когда решение в следующий раз после $x = a$ обратится в нуль. Это произойдет в точке $x = b$, в которой

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \pi.$$

Это соотношение определяет связь функций $\rho(x)$ и $\varphi(x)$. В самом деле, с учетом того, что сопряженной для a точкой является, по определению $\rho(x)$, точка $a + \rho(a)$, получим функциональную связь (рис. 1)

$$\varphi(x + \rho(x)) = \pi + \varphi(x). \tag{11}$$

Таким образом, функция смещения определяется через угловую координату:

$$\rho(x) = \varphi^{-1}(\pi + \varphi(x)) - x.$$

Можно сформулировать обратную задачу. Пусть задана функция $\rho(x)$. Требуется подобрать такую функцию плотности $p(x)$, чтобы заданная $\rho(x)$ была функцией смещения для этой струны. В частном случае, когда $\rho(x) \equiv c$, эта задача может быть решена, что и будет сделано далее.

Определение производной угловой функции для случая постоянной функции смещения. Рассмотрим простейшую функцию смещения $\rho(x) \equiv c$. Уравнение (11) принимает вид

$$\varphi(x + c) = \pi + \varphi(x)\,.$$

Положим $\theta(x) = \varphi'(x)$. Тогда последнее уравнение равносильно тому, что

$$\theta(x+c) = \theta(x),$$
$$\int\limits_0^c \theta(x)\,dx = \pi.$$

Ранее было установлено, что $\theta(x) > 0$ при всех x. Кроме того, функция $p(x)$, определенная по формуле (7), должна быть положительной. Для того чтобы некоторая C^2-гладкая функция $\theta(x)$ была производной угловой координаты при условии постоянства функции смещения $\rho(x) \equiv c$, необходимо и достаточно, чтобы для всех x она удовлетворяла следующим требованиям:

$$1)\ \theta(x+c) = \theta(x),$$
$$2)\ \theta(x) > 0,$$
$$3)\ \int\limits_0^c \theta(t)\,dt = \pi,$$
$$4)\ \theta(x)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta''(x)}{\theta(x)} > 0.$$

Назовем эти требования *c-требованиями*. При удовлетворении этим требованиям плотность струны выражается формулой (7).

Разумеется, этим требованиям удовлетворяет функция $\theta(x) = \pi/c$. Соответствующая плотность $p(x)$ постоянна и равна $(\pi/c)^2$. Далее, им удовлетворяет любая из функций семейства

$$\theta(x) = \frac{\pi}{c} + \varepsilon \sin\frac{2\pi n x}{c}, \quad n \in N,$$

если ε достаточно мало для того, чтобы требование 4) было выполнено.

Таким образом, набор отрезков со свойством постоянства основного тона не определяет однозначно функцию плотности $p(x)$ как в самом простом случае постоянной $\rho(x)$, так и в более сложных случаях.

Получено полное описание всех струн (плотностей) со свойством постоянства основного тона. Как видим, все такие плотности являются периодическими.

Дискретное распределение масс в струне. Рассмотрим случай, когда струну можно полагать невесомой, при этом в некоторых местах к ней прикреплены грузы (“бусины”) существенной массы, но пренебрежимо малых размеров. Требуется найти такое распределение “бусин” на струне, которое обеспечило бы выполнение следующего условия: свободные колебания любого конечного отрезка фиксированной длины c такой струны, жестко закрепленного в обоих концах, должны иметь одинаковую минимальную частоту (основной тон). Введем дополнительное ограничение: ни в одном из концов этого отрезка не должно быть груза. Решение задачи существует.

Приведем пример одного из таких распределений. Обоснование его будет приведено далее. Зафиксируем отрезок $[0; c]$ и произвольное число $0 < \xi < c/4$. На этом отрезке в точках

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \frac{c}{2}, \quad x_3 = c - \xi$$

поместим грузы массами

$$m_1 = m_3 = \frac{1}{\frac{c}{2} - \xi}, \quad m_2 = \frac{c - 4\xi}{\left(\frac{c}{2} - \xi\right)^2},$$

а затем, разделив всю числовую прямую на отрезки длины c, аналогичным образом разместим на каждом из них такие же массы. Вид такой струны представлен на рис. 2.

Приведем строгое описание указанной механической системы. Перенесем на систему "бусин" понятия, введенные ранее для непрерывной струны. Роль плотности играет обобщенная функция вида

$$p(x) = \sum_k m_k \delta(x - x_k), \tag{12}$$

где $m_k > 0$ — масса расположенного в точке x_k груза ("бусинки"). Итак, необходимо найти две последовательности чисел $\{x_k\}$ и $\{m_k\}$.

Задачу будем решать следующим методом. Рассмотрим уравнение

$$y'' + p(x)\, y = 0, \tag{13}$$

где $p(x)$ имеет вид (12). Его решением назовем такую непрерывную и кусочно гладкую функцию $y(x)$, которая будет удовлетворять ему как обобщенная функция.

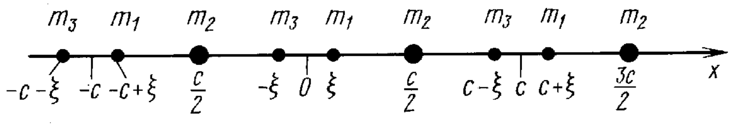

Рис. 2. Пример распределения грузов

В промежутках между точками излома $\{x_k\}$ уравнение (13) может рассматриваться как классическое:

$$y'' = 0.$$

Таким образом, функция $y(x)$ линейна (многочлен степени не более единицы). В точках $\{x_k\}$ уравнение (13) преобразуется в условие “стыка” первой производной:

$$(y'(x_k + 0) - y'(x_k - 0)) + m_k y(x_k) = 0.$$

Итак, любое решение (в терминах обобщенных функций) уравнения (13) задается формулами

$$y(x) = a_k x + b_k \ \text{при} \ x \in [x_{k-1}; x_k], \tag{14}$$

где числа a_k, b_k удовлетворяют следующим условиям:

$$a_k x_k + b_k = a_{k+1} x_k + b_{k+1}$$

(условию непрерывности) и

$$a_{k+1} - a_k + m_k(a_k x_k + b_k) = 0$$

(условию “стыка”).

Далее, следуя стратегии, описанной для струны, введем функцию $\omega(x)$. Для случая $p(x) \equiv 0$ она будет иметь вид (10), а для $p(x)$, соответствующих выражению (12), вид

$$\omega(x) = \omega_k(x) = A_k(x + B_k)^2 + \frac{1}{A_k}, \quad A_k > 0 \ \text{при} \ x \in [x_{k-1}; x_k]\,. \tag{15}$$

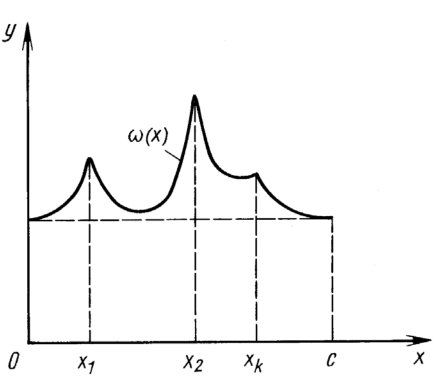

Рис. 3. Функция $\omega(x)$

Потребуем также выполнения условия

$$\omega_k(x_k) = \omega_{k+1}(x_k) \tag{16}$$

для всех k (рис. 3). Тогда функция $p(x)$ будет выражаться через $\omega(x)$ формально так же, как в формуле (8), но в терминах обобщенных функций. Легко убедиться, что $p(x)$ будет иметь вид (12), где

$$m_k = -\frac{1}{2}\frac{\omega'_{k+1}(x_k) - \omega'_k(x_k)}{\omega(x_k)}. \tag{17}$$

Используя функции $\omega(x)$, представим равенства (16) и (17) в следующем виде:

$$A_k(x_k + B_k)^2 + \frac{1}{A_k} = A_{k+1}(x_k + B_{k+1})^2 + \frac{1}{A_{k+1}}, \quad k = \overline{1,n}, \qquad (18)$$

$$m_k = \frac{A_k(x_k + B_k) - A_{k+1}(x_k + B_{k+1})}{\left(A_k(x_k + B_k)^2 + \dfrac{1}{A_k}\right)}, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (19)$$

Будем рассматривать только периодические распределения точечных масс. Это означает, что можно ограничиться описанием размещения n “бусин” на отрезке $[0; c]$. Условимся, что ни в точке 0, ни в точке c “бусин” нет (так как в противном случае достаточно было бы просто сдвинуть начало отсчета так, чтобы это условие удовлетворялось). Итак, набор “бусин” определяется точками $\{x_k\}_{k=1}^n$, $x_0 < x_1 < \ldots$, и числами $A_k > 0$ и B_k, соответствующими условиям (18), а также условию положительности правой части равенства (19) для всех k.

Массы $\{m_k\}_{k=1}^n$ определяются по формуле (19).

Наконец, решение (в терминах обобщенных функций) уравнения (3), в котором $p(x)$ имеет вид (12), выражается по формуле (14) и связано с функцией $\omega(x)$ аналогично тому, как это имело место в случае непрерывной функции плотности.

Таким образом, задача нахождения распределения “бусин” с необходимыми свойствами свелась к нахождению коэффициентов A_k и B_k в представлении (15).

Обеспечение условия равенства основного тона на отрезках длины c в дискретном случае. Рассмотрим c-условия применительно к дискретному случаю. Условие ее периодичности и положительности уже установлено ранее.

Третьим из c-условий является применительно к $\omega(x)$ следующее:

$$\int_0^c \frac{dt}{\omega(t)} = \int_0^{x_1} \frac{dt}{\omega_1(t)} + \ldots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dt}{\omega_k(t)} + \ldots + \int_{x_n}^{c} \frac{dt}{\omega_{n+1}(t)} = \pi. \qquad (20)$$

Несложно убедиться в том, что с учетом вида функций $\omega_k(x)$ справедливы равенства

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dt}{\omega_k(t)} = \int_{A_k x_{k-1} + B_k A_k}^{A_k x_k + B_k A_k} \frac{ds}{s^2+1} = \operatorname{arctg}(s)\Big|_{A_k x_{k-1} + B_k A_k}^{A_k x_k + B_k A_k} =$$
$$= \operatorname{arctg}(A_k x_k + B_k A_k) - \operatorname{arctg}(A_k x_{k-1} + B_k A_k).$$

Подставляя это выражение для интеграла в условие (20), получим общий вид интегрального ограничения:

$$\operatorname{arctg}(s)\Big|_{B_1 A_1}^{A_1 x_1 + B_1 A_1} + \ldots + \operatorname{arctg}(s)\Big|_{A_k x_{k-1} + B_k A_k}^{A_k x_k + B_k A_k} + \ldots$$

$$\ldots + \mathrm{arctg}(s)\Big|_{A_{n+1}x_n+B_{n+1}A_{n+1}}^{A_{n+1}c+B_{n+1}A_{n+1}} = \pi. \quad (21)$$

В частном случае одной "бусины" на период функция $\omega(x)$ имеет следующий вид:

$$\omega(x) = \begin{cases} Ax^2 + \dfrac{1}{A} \text{ при } x \in \left[0; \dfrac{c}{2}\right), \\ A(x-c)^2 + \dfrac{1}{A} \text{ при } x \in \left[\dfrac{c}{2}; c\right]. \end{cases}$$

Очевидно, что в формуле (20) будет только два интеграла, и они будут равны. Выражение (21) представим в виде

$$\mathrm{arctg}(s)\Big|_0^{\frac{Ac}{2}} = \mathrm{arctg}\left(\frac{Ac}{2}\right) - \mathrm{arctg}(0) = \mathrm{arctg}\left(\frac{Ac}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Выполнение этого условия невозможно ни при каких A, что, в свою очередь, означает невозможность построения цепочки с только одной "бусиной" на период.

Аналогом четвертого c-условия для дискретного случая является требование положительности коэффициентов m_k.

Результаты рассмотрения задачи с дискретным распределением масс. Найдем все распределения "бусин", для которых все участки со свойством равенства основного тона имеют одинаковую фиксированную длину. Опишем процесс нахождения функции $\omega(x)$, с учетом которой получим функцию плотности $p(x)$ из выражения (8).

Из формулировки задачи следует, что ни точки, в которых размещены грузы, ни их массы не являются заданными, т.е. количество "бусин" и последовательности $\{x_k\}_{k=1}^n$ и $\{m_k\}_{k=1}^n$ являются неизвестными. Потребуем, чтобы все x_k принадлежали $(0; c)$, а все m_k были положительными.

Итак, для получения необходимой функции $\omega(x)$ вида (15) требуется задать число "бусин" n на период и разрешить относительно $4n + 2$ неизвестных $A_l, B_l, x_k, m_k, l = \overline{1, n+1}, k = \overline{1, n}$, систему из $2n+3$ уравнений, включающую n уравнений вида (18), n уравнений вида (19), одно уравнение вида (21) (следствие интегрального c-условия) и двух условий, учитывающих отсутствие "бусины" в точках 0 и c:

$$A_1 = A_{n+1},$$
$$B_{n+1} = B_1 - c.$$

Пример построения дискретного распределения масс с необходимым свойством. Положим общее число "бусин" в интервале $(0; c)$ равным $n = 3$. Поместим "бусины" в точках $(\xi, c/2, c-\xi)$, где $0 < \xi < c/3$ (смысл этого ограничения будет пояснен далее). Массы точек определим в процессе решения.

Функцию $\omega(x)$ представим в следующем виде:

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) = Ax^2 + \dfrac{1}{A} \text{ при } x \in [0;\xi), \\ \omega_2(x) = A(x - B_2)^2 + \dfrac{1}{A} \text{ при } x \in \left[\xi; \dfrac{c}{2}\right), \\ \omega_3(x) = A(x - c + B_2)^2 + \dfrac{1}{A} \text{ при } x \in \left[\dfrac{c}{2}; c - \xi\right), \\ \omega_4(x) = A(x - c)^2 + \dfrac{1}{A} \text{ при } x \in [c - \xi; c]. \end{cases} \tag{22}$$

Уже было учтено, что $\omega_4(x) \equiv \omega_1(x - c)$. Очевидная симметричность графика функции относительно вертикальной прямой $x = c/2$, в частности, означает, что симметричны и функции $\omega_2(x)$, $\omega_3(x)$, и параметр $B_1 = 0$, что также соответствует формуле (22).

Рассмотрим условие “стыка” $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ в точке ξ. Оно будет иметь вид

$$A\xi^2 + \frac{1}{A} = A(\xi + B_2)^2 + \frac{1}{A}.$$

Приходим к равенству

$$\xi^2 = (\xi + B_2)^2,$$

которое удовлетворяется при $B_2 = 0$ и $B_2 = -2\xi$. Случай $B_2 = 0$ соответствует одной “бусине” и поэтому не рассматривается. Таким образом,

$$B_2 = -2\xi.$$

Интегральное c-условие в силу симметричности представим в виде

$$\mathrm{arctg}(A_1\xi) - \mathrm{arctg}(0) + \mathrm{arctg}\left(\frac{A_2 c}{2} + B_2 A_2\right) - \mathrm{arctg}(A_2\xi + B_2 A_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда несложно получить выражения для A и B_2:

$$A = \frac{1}{\sqrt{c\xi - 3\xi^2}},$$
$$B_2 = -2\xi.$$

Очевидно, что требование $\xi < c/3$ необходимо для существования A.

Итак, функция $\omega(x)$ полностью определена и с ее учетом необходимо определить функцию плотности $p(x)$. Найдем значения m_1, m_2, m_3:

$$m_1 = m_3 = -\frac{1}{2}\frac{\omega_2'(\xi) - \omega_1'(\xi)}{\omega(\xi)} = \frac{1}{\dfrac{c}{2} - \xi}, \quad m_2 = \frac{c - 4\xi}{\left(\dfrac{c}{2} - \xi\right)^2}.$$

Для обеспечения неотрицательности m_2 наложим ограничение $\xi \leqslant c/4$. В случае $\xi = c/4$ остаются две "бусины".

Запишем функцию плотности полученного распределения в виде (12):

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta(x-\xi+kc)}{\dfrac{c}{2}-\xi} + \frac{c-4\xi}{\left(\dfrac{c}{2}-\xi\right)^2}\,\delta\left(x-\frac{c}{2}+kc\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta(x-(c-\xi)+kc)}{\dfrac{c}{2}-\xi} \right).$$

Из рассмотренного примера распределения масс следует, что функция плотности $p(x)$ не может быть однозначно определена по заданной функции $\rho(x)$. Это показано на самом простом примере постоянной функции смещения при всего трех "бусинах". Получено однопараметрическое семейство распределений, определяемое параметром $\xi \in (0; c/4]$. Очевидно, что существуют варианты и с бóльшим количеством грузов. Разумеется, однозначное определение $p(x)$ невозможно и при более сложных $\rho(x)$.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю Р. С. Исмагилову, чье деятельное участие проявилось на всех этапах работы: от постановки задачи до составления окончательного текста настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: Ин. лит., 1962.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1964.
3. Каменев И. В. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. – М.: Изд-во МИЭМ, 1982.
4. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник для студентов вузов / Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1996.
5. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – М.: Ин. лит., 1961.

Статья поступила в редакцию 18.09.2003

Павел Андреевич Белоусов родился в 1981 г., студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области теории функций, функционального анализа и его приложений в квантовой механике.

P.A. Belousov (b. 1981), student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in theory of functions, functional analysis and its applications in quantum mechanics.