УДК 519.22+368

А.Л. Ветрова

РАСЧЕТ СТРАХОВЫХ ПРЕМИЙ С УЧЕТОМ ПРЕДЫСТОРИИ

Рассмотрена задача назначения страховых премий с учетом истории страхового договора. В основу решения этой задачи положен принцип рандомизации, согласно которому предполагается, что каждый договор характеризуется некоторым случайным параметром.

В основе назначения страховых премий лежит принцип эквивалентных затрат, по которому страховая премия p_i представляется в виде $p_i = E(x_i) + l_i$; здесь x_i — случайная величина, равная суммарным выплатам по всем страховым случаям по i-му договору; $E(x_i)$ — среднее значение страховых выплат; l_i — добавочная сумма, являющаяся платой за то, что страховая компания принимает на себя риск по i-му договору. Величина $E(x_i)$ называется нетто-премией, l_i — страховой надбавкой.

Если в портфеле страховой компании содержится N договоров, то резервы компании имеют вид

$$u = \sum_{i=1}^{N}(E(x_i) + l_i) = E(s) + l,$$

где

$$s = \sum_{i=1}^{N} x_i, \quad l = \sum_{i=1}^{N} l_i.$$

Следовательно, вероятность разорения можно представить в виде

$$R = P\{s > u\} = P\{s > E(s) + l\}.$$

При больших значениях N можно использовать приближение Гаусса

$$R = P\left\{\frac{s - E(s)}{\sqrt{\mathrm{var}(s)}} > \frac{l}{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{l}{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}\right) = \alpha;$$

здесь α — число, близкое к нулю, $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $\mathrm{var}(s)$ — дисперсия s. Отсюда имеем

$$l = x_\alpha \sqrt{\mathrm{var}(s)},$$

где x_a — квантиль функции распределения $\Phi(x)$ уровня $1-\alpha$.

Поскольку дисперсия $\mathrm{var}(s)$ описывает отклонения s от среднего значения, то страховая премия l является компенсацией за непредсказуемость величины суммарного иска s.

Обычно страховую надбавку $E(s)$ распределяют между договорами пропорционально ожидаемому иску, т.е.

$$l_i = kE(x_i)\,, \quad k = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}{E(s)}.$$

Соответственно, имеем

$$p_i = (1+k)\,E(x_i) = E(x_i)\left(1 + x_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}{E(s)}\right).$$

Отметим один недостаток, которым обладает такой порядок назначения страховых премий. При таком назначении страховых премий относительная страховая надбавка имеет вид

$$\theta_i = \frac{l_i}{E(x_i)} = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}{E(s)}.$$

Она одинакова для всех страховых договоров, что несправедливо по отношению к страхователям, договоры которых имеют малую дисперсию возможного иска $\mathrm{var}(x_i)$. Поэтому более справедливо делить суммарную страховую надбавку между договорами пропорционально дисперсиям $\mathrm{var}(x_i)$ или среднеквадратическим отклонениям. Тогда

$$l_i' = k'\,\mathrm{var}(x_i), \quad l_i'' = k''\sqrt{\mathrm{var}(x_i)};$$

здесь

$$k' = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}, \quad k'' = \frac{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{\mathrm{var}(x_i)}}.$$

Соответственно, имеем

$$p_i' = E(x_i) + \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}\,\mathrm{var}(x_i), \tag{1}$$

$$p_i'' = E(x_i) + \frac{x_\alpha\sqrt{\mathrm{var}(s)}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{\mathrm{var}(x_i)}}\sqrt{\mathrm{var}(x_i)}. \tag{2}$$

Относительные страховые надбавки имеют вид

$$\theta_i' = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}\frac{\mathrm{var}(x_i)}{E(x_i)}, \qquad \theta_i'' = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{var}(s)}}{\sum\limits_{i=1}^{N}\sqrt{\mathrm{var}(x_i)}}\frac{\sqrt{\mathrm{var}(x_i)}}{E(x_i)}. \tag{3}$$

Вопрос о том, какой из этих двух принципов назначения страховых премий является более предпочтительным (для страхуемого), в актуарной математике однозначно не решен. Для страховой компании он не является принципиальным, так как в любом случае компания получает страховую надбавку

$$l = x_\alpha\sqrt{\mathrm{var}(s)}.$$

Таким образом, для того, чтобы учесть особенности конкретных договоров, необходимо знать величины среднего значения $E(x_i)$ и дисперсии $\mathrm{var}(x_i)$ ожидаемого иска x_i. В настоящей работе исследуется зависимость страховых премий от количества ожидаемых страховых случаев.

Для описания модели конкретных исков воспользуемся идеей рандомизации.

Положим, что каждый договор характеризуется двумя случайными величинами: числом υ_i страховых случаев за период страхования и размером выплат x_i^j, $j = 1, 2, \ldots, \upsilon_i$, в каждом из страховых случаев.

Случайные величины x_i^j полагаются независимыми и одинаково распределенными с известным средним значением $m_i = E(x_i^j)$ и дисперсией $\sigma_i^2 = \mathrm{var}(x_i^j)$, а случайные величины υ_i — не зависящими от величин x_i^j и имеющими распределение Пуассона.

$$\pi_{\lambda_i,k} = P\{\upsilon_i = k\} = \frac{\lambda_i^k e^{-\lambda_i}}{k!}.$$

Здесь интенсивность λ_i наступления страховых случаев по i-му договору зависит от договора и предполагается случайной величиной с заданной плотностью распределения $f_\lambda(x)$ (одинаковой для всех договоров). В принятых обозначениях суммарный иск по i-му договору составляет

$$x_i = \sum_{j=1}^{\upsilon_i} x_i^j,$$

и, следовательно,

$$E(x_i) = m_i E(\upsilon_i), \qquad \mathrm{var}(x_i) = \sigma_i^2 E(\upsilon_i).$$

Рассмотрим случайно выбранный договор и обозначим через υ и x^j, $j = 1, \ldots, \upsilon$, число страховых случаев и иски по этому договору соответственно (в дальнейшем при описании случайно выбранного договора индекс i опускаем). Суммарный иск представим в виде

$$X = \sum_{j=1}^{\upsilon} x^j.$$

Тогда

$$E(X) = E(x_i)E(\upsilon) = mE(\upsilon), \quad \operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(x_i)E(\upsilon) = \sigma^2 E(\upsilon),$$

где υ и σ^2 предполагаются известными.

Совместная плотность распределения случайных величин υ и λ имеет вид

$$f(x, n) = \pi_{x,n} f_\lambda(x), \quad x > 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Плотность распределения случайной величины υ представим в виде

$$p_\upsilon(n) = \int_0^{+\infty} \pi_{x,n} f_\lambda(x) dx,$$

а ее среднее значение — в виде

$$E(\upsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_\upsilon(n).$$

Для суммарного иска имеем

$$E(s) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) E(\upsilon), \tag{4}$$

$$\operatorname{var}(s) = \left(\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2\right) E(\upsilon). \tag{5}$$

В случае отсутствия информации о значениях λ_i (например, в случае нового договора) индивидуальные страховые премии рассчитываются по формулам (1), (2), где $E(s)$ и $\operatorname{var}(s)$ определены по формулам (4), (5). При этом

$$E(x_i) = m_i E(\upsilon), \quad \operatorname{var}(x_i) = \sigma_i^2 E(\upsilon);$$

$$p_i = m_i E(\nu)\left(1 + \frac{x_\alpha \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \sqrt{E(\nu)}}\right),$$

$$p_i' = m_i E(\nu)\left(1 + \frac{x_\alpha \sigma_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \sqrt{E(\nu)}}\right),$$

$$p_i'' = m_i E(\nu)\left(1 + \frac{x_\alpha \sigma_i \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_i \sqrt{E(\nu)}}\right).$$

Пусть известно, что по i-му договору за предыдущий период страхования зарегистрировано k страховых случаев. Тогда естественно при назначении страховой премии p_i для случайной величины λ_i использовать условную плотность распределения

$$f_\lambda(x|\upsilon = n) = \frac{f(x, n)}{p_\upsilon(n)}.$$

В этом случае величины υ_i имеют распределение Пуассона с параметром

$$\lambda_i^{(k)} = E(\lambda|\upsilon = k) = \frac{\int\limits_0^{+\infty} x\pi_{x,k} f_\lambda(x)dx}{\int\limits_0^{+\infty} \pi_{x,k} f_\lambda(x)dx}.$$

При подсчете индивидуальных страховых премий следует учитывать, что

$$E(x_i) = m_i \lambda_i^{(k)}, \quad \mathrm{var}(x_i) = \sigma_i^2 \lambda_i^{(k)}.$$

Рассмотрим частный случай, когда параметр λ имеет плотность гамма-распределения с параметрами α и β:

$$f_\lambda(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}.$$

В этом случае

$$E(\lambda) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathrm{var}(\lambda) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Случайная величина υ имеет плотность распределения

$$p_\upsilon(n) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}p^\alpha q^n$$

— отрицательное биноминальное распределение с параметрами α и $p = \beta/(\beta+1), q = 1-p$. При этом $E(\upsilon) = \alpha q/p$.

Итак, если при отсутствии информации о страховом договоре при назначении страховой премии используется величина $E(\upsilon) = \alpha/\beta$, то при наличии информации о том, что за предыдущий период имелось k страховых случаев, следует использовать величину

$$E(\lambda|\upsilon = k) = \frac{\alpha+k}{\beta+1},$$

так как

$$E(\lambda|\upsilon = k) = \frac{1}{p_\upsilon(k)}\int\limits_0^\infty \frac{xx^k e^{-x}}{k!}\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}dx = \frac{\alpha+k}{\beta+1}.$$

Отсюда видим, что при $k = 0$ страховая премия уменьшается, а с возрастанием k она увеличивается.

Пусть теперь известно, что за последние m лет имело место k страховых случаев. Для того, чтобы использовать эту информацию при расчете индивидуальной страховой премии, введем новую единицу измерения времени $T' = mT$. Обозначим через υ' число страховых случаев за m лет. В этом случае

$$P(\upsilon' = k|\lambda = x) = \frac{(xm)^k e^{-mx}}{k!} = \pi_{mx,k}.$$

Пусть $\lambda' = m\lambda$. Тогда

$$f_{\lambda'}(x) = \frac{1}{m}f_\lambda\left(\frac{x}{m}\right)$$

является плотностью гамма-распределения

$$\Gamma\left(\alpha, \frac{\beta}{m}\right) = \Gamma(\alpha, \beta'),$$

где $\beta' = \beta/m$. Отсюда имеем

$$E(\lambda') = \frac{\alpha}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta}m, \quad E(\lambda'|\upsilon' = k) = \frac{\alpha+k}{\beta'+1},$$

$$E(\lambda|\upsilon' = k) = E\left(\frac{\lambda'}{m}\middle|\upsilon' = k\right) = \frac{1}{m}\frac{\alpha+k}{\beta'+1} = \frac{\alpha+k}{\beta+m}.$$

Таким образом, в этом случае в качестве λ_i следует использовать величину $(\alpha+k)/(\beta+m)$ вместо α/β.

Рассмотрим численный пример [2]. Предположим, что в портфеле страховой компании имеется $N = 50000$ договоров о страховании автомобилей. О предыдущем периоде страхования известно, что 40544 человека не попали в аварию ни разу, 8082 человека — попали в аварию 1 раз, 1205 человек — 2 раза, 145 человек — 3 раза, 20 человек — 4 раза, 3 человека — 5 раз и 1 человек — 6 раз.

Используя эти данные, оценим параметры отрицательного биномиального распределения

$$p = \frac{\bar{x}}{s^2} \approx 0{,}934, \quad \alpha = \frac{\bar{x}^2}{s^2-\bar{x}} \approx 2{,}065,$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$$

— выборочное среднее значение и выборочная дисперсия соответственно. Отсюда находим параметр $\beta = p/q = 14{,}244$ и среднее ожидаемое число страховых случаев для случайно выбранного страхового договора $E(v) = \alpha q/p = 0{,}145$.

Предположим для простоты, что для всех страховых договоров одинаков размер ожидаемого предъявляемого иска, т.е. $m_i = 10000$, $\sigma_i = 20000$ при всех i. Тогда в случае договора, для которого отсутствует информация о предыдущих периодах страхования, страховая премия равна

$$p_i = m\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{x_\alpha\sigma}{m\sqrt{N}E(\nu)}\right) \approx 1455.$$

Если же известно, что за предыдущий период страхования страховых случаев не было, то страховая премия равна $p_i = 1360$. В таблице представлены величины страховых премий, рассчитанные при условии, что по данному договору за последние m страховых периодов было зафиксировано k страховых случаев $(m = 1,\ldots,4,\ \ k = 0,\ldots,6)$.

m	k						
	0	1	2	3	4	5	6
1	1360	2017	2674	3331	3988	4645	5301
2	1276	1893	2510	3126	3743	4359	4975
3	1203	1784	2364	2945	3526	4106	4687
4	1137	1686	2235	2784	3333	3882	4430

В принятых предположениях о том, что размеры предъявляемых исков одинаковы, величины страховых премий p'_i и p''_i будут совпадать с величиной p_i.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г.Д. Карташову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков В. Н., Карташов Г. Д. Введение в актуарную математику. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 63 с.
2. Фалин Г. И. Математический анализ рисков в страховании. – М.: Росс. юрид. издательский дом, 1994. – 130 с.
3. Фалин Г. И., Фалин А. И. Введение в актуарную математику. – М.: Финансово-актуарный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994. – 85 с.

Статья поступила в редакцию 25.09.2003

Анна Леонидовна Ветрова родилась в 1981 г. Студентка МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области теории вероятностей, математической статистики, актуарной математики.

A.L. Vetrova (b. 1981). Student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of probability theory, mathematical statistics, actuarial mathematics.

УДК 658.5

В. А. Павлов, С. В. Юрицына

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕИНВЕСТИРОВАНИЯ СРЕДСТВ В РЕАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЯХ

Рассмотрена задача оптимального распределения прибыли на вложения в производство и выплату дивидендов. Предложена концептуальная модель одного варианта условий инвестирования, исследование которого позволяет оптимизировать принятие решений о реинвестировании средств. В качестве критериев оптимальности рассмотрены экономические показатели. В аналитических и численных решениях показана экономическая обоснованность полного реинвестирования прибыли на начальных этапах проектов.

Инвесторы, как правило, вкладывают средства с целью приумножения капиталов. Инвестируемые средства могут расходоваться на создание предприятия, которое существует в течение ряда лет, принося прибыль, после чего ликвидируется, и тогда “отдача” вложений складыва-