

РАСЧЕТ АМПЛИТУД ОТРАЖЕННЫХ И ПРЕЛОМЛЕННЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Представлена методика нахождения амплитуд электромагнитной волны после преломления и отражения на границе раздела изотропных и анизотропных сред.

В работе [1] предложено решение задачи преломления на границе раздела анизотропных сред. Это решение позволяет найти направления нормалей к волновым фронтам и поляризации преломленных и отраженных волн, но не позволяет найти амплитуды указанных волн. Настоящая работа, дополняя результаты работ [1, 2], дает возможность сформировать единую модель оптической системы на основе общего подхода, ориентированную на практическое использование в компьютерных системах анализа и автоматизированного проектирования.

Постановка задачи. Электромагнитная волна $\vec{E} = \bar{E} \exp(-i(\omega\tau - \vec{r}\bar{t}))$, где τ — время, ω — круговая частота, r — радиус-вектор, \bar{E} — амплитуда напряженности электрического поля, \bar{t} — нормаль к волновому фронту, падает на границу раздела диэлектриков (изотропных или анизотропных сред). Необходимо найти амплитуды отраженных и преломленных волн.

Решение задачи. Общие положения. При решении задачи будем использовать следующие прямые следствия уравнений Максвелла, справедливые для любых сред [3].

1. Тангенциальные составляющие \vec{E}_τ и \vec{H}_τ электрической и магнитной напряженностей соответственно непрерывны на границе раздела, т.е. выполнено условие

$$\vec{E}_{\tau 1} = \vec{E}_{\tau 2}, \quad \vec{H}_{\tau 1} = \vec{H}_{\tau 2}; \quad (1)$$

здесь индексы 1 и 2 обозначают соответственно первую и вторую среду.

2. Амплитуды \bar{E} и \bar{H} электрической и магнитной напряженностей и нормаль \bar{t} к волновому фронту связаны соотношением

$$\mu \bar{H} = \frac{c}{v} [\bar{t}, \bar{E}], \quad (2)$$

где c — скорость света в вакууме, μ — магнитная проницаемость среды (для прозрачных материалов $\mu = 1$); v — фазовая скорость волны.

Выберем систему координат, связанную с поверхностью так, чтобы ось z совпадала с нормалью \bar{N} к поверхности, ось x была касательной к поверхности, лежала в плоскости падения и проекция \bar{t} на эту ось была положительна, а ось y дополняла систему координат до правой ортогональной.

Изотропные среды. Из решения задачи преломления [2] известны нормали к фронтам \bar{t}' и \bar{t}'' отраженной и преломленной волн (рис. 1).

Из условия (1) получаем

$$\begin{aligned} E_x + E'_x &= E''_x, \\ E_y + E'_y &= E''_y, \\ H_x + H'_x &= H''_x, \\ H_y + H'_y &= H''_y; \end{aligned} \quad (3)$$

здесь величины с одним штрихом относятся к отраженной волне, а с двумя штрихами — к преломленной.

Выразим вектор магнитной напряженности через компоненты вектора электрической напряженности. Из соотношения (2) в выбранной системе координат имеем

$$\bar{H} = n \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ t_x & t_y & t_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix},$$

где $n = c/\nu$ — показатель преломления среды. Компонент H_z вектора \bar{H} в решении не используется. Величины H_x и H_y выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_x &= n(t_y E_z - t_z E_y), \\ H_y &= n(t_x E_z - t_z E_x). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку в изотропных средах $\bar{E}\bar{t} = 0$ и в выбранной системе координат $t_y = 0$, выразим проекцию E_z через E_x и E_y :

$$E_x t_x + E_y t_y + E_z t_z = 0, \quad E_z = -\frac{t_x}{t_z} E_x. \quad (5)$$

Подставляя полученное выражение в соотношения (4), получим проекции вектора магнитной напряженности для всех трех волн:

$$\begin{aligned} H_x^{(i)} &= -n^{(i)} t_z^{(i)} E_y^{(i)} = \beta^{(i)} E_y^{(i)}, \\ H_y^{(i)} &= n^{(i)} (t_x^{(i)} E_z^{(i)} - t_z^{(i)} E_x^{(i)}) = -n^{(i)} \frac{1}{t_z^{(i)}} E_x^{(i)} = \alpha^{(i)} E_x^{(i)}, \quad i = 0, \dots, 3, \end{aligned} \quad (6)$$

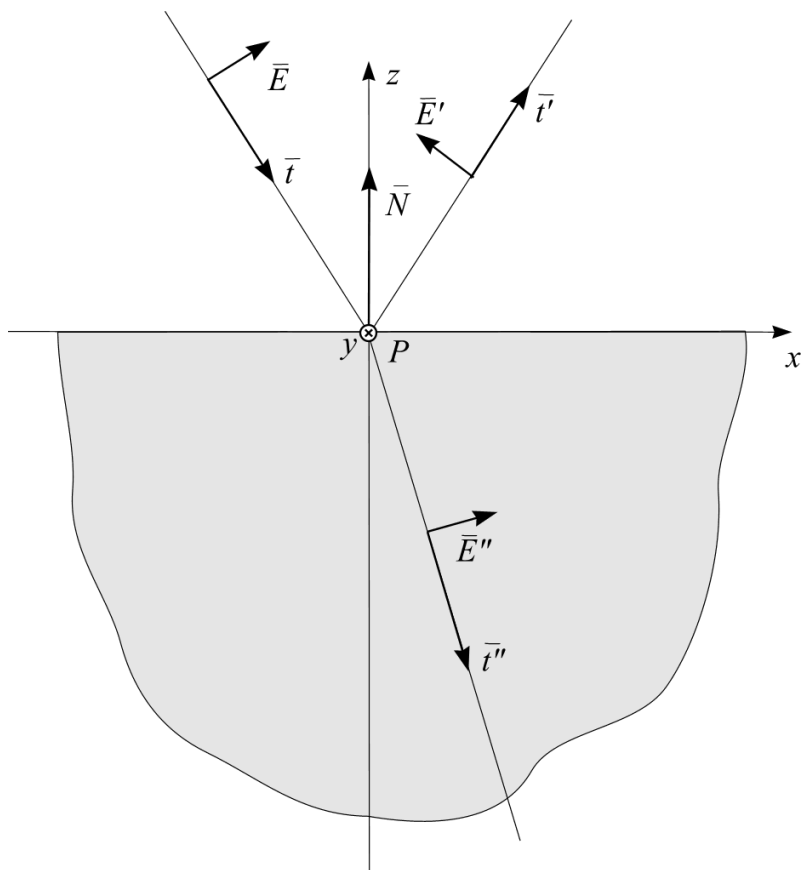


Рис. 1. Поведение электромагнитной волны на границе раздела изотропных сред

где $\alpha^{(i)} = -n^{(i)}/t_z^{(i)}$ и $\beta^{(i)} = -n^{(i)}t_z^{(i)}$ — коэффициенты, связывающие для каждой из трех волн компоненты E_x и E_y с компонентами H_y и H_x соответственно. После подстановки выражений (6) в систему (3) получим

$$\begin{aligned} E_x + E'_x &= E''_x, & \alpha E_x + \alpha' E'_x &= \alpha'' E''_x, \\ E_y + E'_y &= E''_y, & \beta E_y + \beta' E'_y &= \beta'' E''_y. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы (7) позволяет найти тангенциальные составляющие амплитуды:

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha'' - \alpha'} E_x, & E'_y &= \frac{\beta - \beta''}{\beta'' - \beta'} E_y, \\ E''_x &= \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha'' - \alpha'} E_x, & E''_y &= \frac{\beta - \beta'}{\beta'' - \beta'} E_y. \end{aligned} \quad (8)$$

Из выражений (5) получаем соответствующие нормальные составляющие:

$$\begin{aligned} E'_z &= \lambda' E'_x, \\ E''_z &= \lambda'' E''_x, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda^{(i)} = -t_x^{(i)}/t_z^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Фаза волны определяется уравнением (1). В выражениях (8), как и в классической форме записи уравнений Френеля, если показатель преломления второй среды больше, чем первой, то направление вектора электрической напряженности изменяется на противоположное (что может быть представлено фазовым сдвигом на 180°).

Анизотропные среды. В отличие от случая изотропных сред, в задаче присутствует до пяти волн: падающая волна \bar{E}_0 , две отраженные \bar{E}_1 , \bar{E}_2 и две преломленные волны \bar{E}_3 , \bar{E}_4 (рис. 2). Из уравнения (1) имеем

$$\begin{aligned} E_{0x} + E_{1x} + E_{2x} &= E_{3x} + E_{4x}, \\ E_{0y} + E_{1y} + E_{2y} &= E_{3y} + E_{4y}, \\ H_{0x} + H_{1x} + H_{2x} &= H_{3x} + H_{4x}, \\ H_{0y} + H_{1y} + H_{2y} &= H_{3y} + H_{4y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из решения задачи преломления для анизотропных сред [1] известны как нормали к отраженным (\bar{t}_1 , \bar{t}_2) и преломленным (\bar{t}_3 , \bar{t}_4) волнам, так и поляризации этих волн (единичные векторы \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 , \bar{e}_4).

Тангенциальные составляющие амплитуды электрической напряженности выражаются следующим образом:

$$E_{ix} = (\bar{e}_i \bar{s}_x) E_i = \delta_i E_i, \quad E_{iy} = (\bar{e}_i \bar{s}_y) E_i = \gamma_i E_i, \quad i = 0, \dots, 4, \quad (11)$$

где $\delta_i = (\bar{e}_i \bar{s}_x)$ и $\gamma_i = (\bar{e}_i \bar{s}_y)$ — коэффициенты, равные соответствующим проекциям на орты \bar{s}_x и \bar{s}_y вдоль осей x и y .

Поскольку из соотношения (2) имеем

$$\bar{H} = \frac{c}{\nu} [\bar{t}, \bar{e}] E,$$

то для тангенциальных составляющих вектора электрической напряженности получим

$$H_{ix} = \frac{c}{\nu_i} [\bar{t}_i, \bar{e}_i] \bar{s}_x E_i = \beta_i E_i, \quad H_{iy} = \frac{c}{\nu_i} [\bar{t}_i, \bar{e}_i] \bar{s}_y E_i = \alpha_i E_i, \quad i = 0, \dots, 4; \quad (12)$$

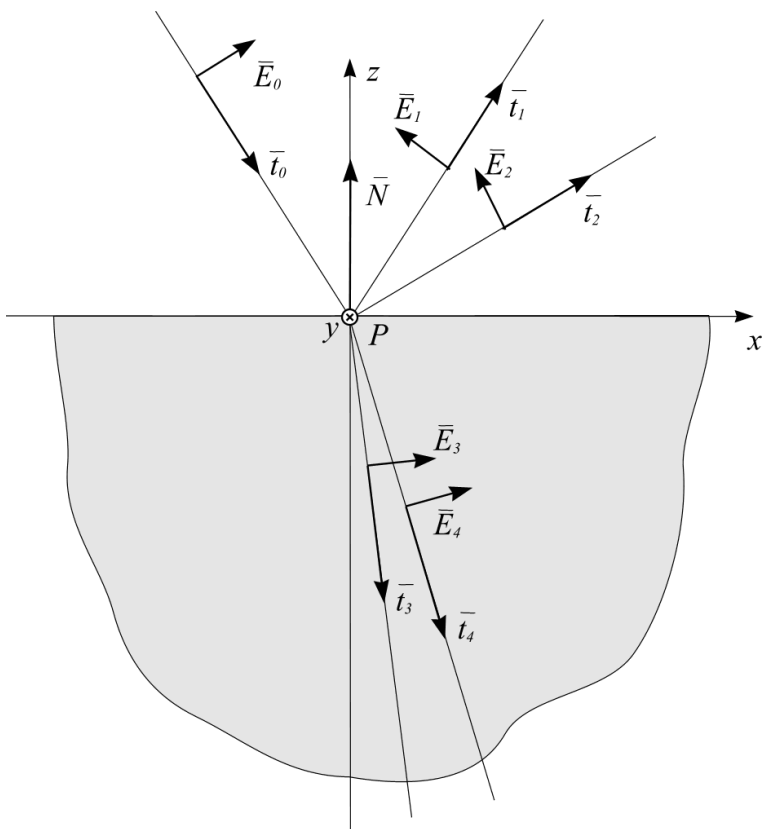


Рис. 2. Поведение электромагнитной волны на границе раздела анизотропных сред

здесь

$$\alpha_i = \frac{c}{v_i} [\bar{t}_i, \bar{e}_i] \bar{s}_x, \quad \beta_i = \frac{c}{v_i} [\bar{t}_i, \bar{e}_i] \bar{s}_y$$

— коэффициенты, связывающие для каждой из трех волн компоненты E_x и E_y с компонентами H_y и H_x соответственно.

Подставив выражения (11) и (12) в систему (10), получаем систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} \alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 &= \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4, \\ \beta_0 E_0 + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 &= \beta_3 E_3 + \beta_4 E_4, \\ \gamma_0 E_0 + \gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2 &= \gamma_3 E_3 + \gamma_4 E_4, \\ \delta_0 E_0 + \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 &= \delta_3 E_3 + \delta_4 E_4. \end{aligned} \tag{13}$$

Запишем решение системы (13) в явном виде:

$$E_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} E_0, \quad i = 1, \dots, 4, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta = & (0 + (\gamma_3\delta_4 - \gamma_4\delta_3)\beta_2 + (\gamma_4\delta_2 - \gamma_2\delta_4)\beta_3 + (\gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2)\beta_4)\alpha_1 + \\ & + ((\gamma_4\delta_3 - \gamma_3\delta_4)\beta_1 + 0 + (\gamma_1\delta_4 - \gamma_4\delta_1)\beta_3 + (\gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3)\beta_4)\alpha_2 + \\ & + ((\gamma_2\delta_4 - \gamma_4\delta_2)\beta_1 + (\gamma_4\delta_1 - \gamma_1\delta_4)\beta_2 + 0 + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\beta_4)\alpha_3 + \\ & + ((\gamma_3\delta_2 - \gamma_2\delta_3)\beta_1 + (\gamma_1\delta_3 - \gamma_3\delta_1)\beta_2 + (\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2)\beta_3 + 0)\alpha_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 = & (0 + (\gamma_4\delta_3 - \gamma_3\delta_4)\beta_2 + (\gamma_2\delta_4 - \gamma_4\delta_2)\beta_3 + (\gamma_3\delta_2 - \gamma_2\delta_3)\beta_4)\alpha_0 + \\ & + ((\gamma_3\delta_4 - \gamma_4\delta_3)\beta_0 + 0 + (\gamma_4\delta_0 - \gamma_0\delta_4)\beta_3 + (\gamma_0\delta_3 - \gamma_3\delta_0)\beta_4)\alpha_2 + \\ & + ((\gamma_4\delta_2 - \gamma_2\delta_4)\beta_0 + (\gamma_0\delta_4 - \gamma_4\delta_0)\beta_2 + 0 + (\gamma_2\delta_0 - \gamma_0\delta_2)\beta_4)\alpha_3 + \\ & + ((\gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2)\beta_0 + (\gamma_3\delta_0 - \gamma_0\delta_3)\beta_2 + (\gamma_0\delta_2 - \gamma_2\delta_0)\beta_3 + 0)\alpha_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = & (0 + (\gamma_4\delta_3 - \gamma_3\delta_4)\beta_0 + (\gamma_0\delta_4 - \gamma_4\delta_0)\beta_3 + (\gamma_3\delta_0 - \gamma_0\delta_3)\beta_4)\alpha_1 + \\ & + ((\gamma_3\delta_4 - \gamma_4\delta_3)\beta_1 + 0 + (\gamma_4\delta_1 - \gamma_1\delta_4)\beta_3 + (\gamma_1\delta_3 - \gamma_3\delta_1)\beta_4)\alpha_0 + \\ & + ((\gamma_4\delta_0 - \gamma_0\delta_4)\beta_1 + (\gamma_1\delta_4 - \gamma_4\delta_1)\beta_0 + 0 + (\gamma_0\delta_1 - \gamma_1\delta_0)\beta_4)\alpha_3 + \\ & + ((\gamma_0\delta_3 - \gamma_3\delta_0)\beta_1 + (\gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3)\beta_0 + (\gamma_1\delta_0 - \gamma_0\delta_1)\beta_3 + 0)\alpha_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 = & (0 + (\gamma_4\delta_0 - \gamma_0\delta_4)\beta_2 + (\gamma_2\delta_4 - \gamma_4\delta_2)\beta_0 + (\gamma_0\delta_2 - \gamma_2\delta_0)\beta_4)\alpha_1 + \\ & + ((\gamma_0\delta_4 - \gamma_4\delta_0)\beta_1 + 0 + (\gamma_4\delta_1 - \gamma_1\delta_4)\beta_0 + (\gamma_1\delta_0 - \gamma_0\delta_1)\beta_4)\alpha_2 + \\ & + ((\gamma_4\delta_2 - \gamma_2\delta_4)\beta_1 + (\gamma_1\delta_4 - \gamma_4\delta_1)\beta_2 + 0 + (\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2)\beta_4)\alpha_0 + \\ & + ((\gamma_2\delta_0 - \gamma_0\delta_2)\beta_1 + (\gamma_0\delta_1 - \gamma_1\delta_0)\beta_2 + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\beta_0 + 0)\alpha_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_4 = & (0 + (\gamma_0\delta_3 - \gamma_3\delta_0)\beta_2 + (\gamma_2\delta_0 - \gamma_0\delta_2)\beta_3 + (\gamma_3\delta_2 - \gamma_2\delta_3)\beta_0)\alpha_1 + \\ & + ((\gamma_3\delta_0 - \gamma_0\delta_3)\beta_1 + 0 + (\gamma_0\delta_1 - \gamma_1\delta_0)\beta_3 + (\gamma_1\delta_3 - \gamma_3\delta_1)\beta_0)\alpha_2 + \\ & + ((\gamma_0\delta_2 - \gamma_2\delta_0)\beta_1 + (\gamma_1\delta_0 - \gamma_0\delta_1)\beta_2 + 0 + (\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2)\beta_0)\alpha_3 + \\ & + ((\gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2)\beta_1 + (\gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3)\beta_2 + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\beta_3 + 0)\alpha_0.\end{aligned}$$

Приведенное решение позволяет найти амплитуды соответствующих волн. Векторы электрической напряженности представим в виде

$$\bar{E}_i = \bar{e}_i E_i, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Рассмотрим теперь случай, когда одна из сред изотропна. Пусть, например, изотропна первая среда. Поскольку в этом случае направление поляризации не задано, примем $E_1 \equiv E_x$, $E_2 \equiv E_y$. Тогда систему (10) представим в виде

$$\begin{aligned} E_{0x} + E_x + 0 &= E_{3x} + E_{4x}, \\ E_{0y} + 0 + E_y &= E_{3y} + E_{4y}, \\ H_{0x} + H_x + 0 &= H_{3x} + H_{4x}, \\ H_{0y} + 0 + H_y &= H_{3y} + H_{4y}. \end{aligned}$$

Отсюда видно сходство этой системы с системами (3) и (10). Фактически ее можно свести к системе (10), если принять

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \alpha', \\ \beta_1 &= \beta', & \beta_2 &= 0, \\ \gamma_1 &= 1, & \gamma_2 &= 0, \\ \delta_1 &= 0, & \delta_2 &= 1. \end{aligned}$$

Решение находится в соответствии с выражением (14). Нормальная составляющая отраженной волны (в изотропной среде) вычисляется по формуле (9).

Если изотропна вторая среда, то примем коэффициенты с индексами 3 и 4:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 0, & \alpha_4 &= \alpha'', \\ \beta_3 &= \beta'', & \beta_4 &= 0, \\ \gamma_3 &= 1, & \gamma_4 &= 0, \\ \delta_3 &= 0, & \delta_4 &= 1. \end{aligned}$$

Если изотропны обе среды, то после замены коэффициентов система (10) сводится к системе (3).

Выводы. Предложен метод расчета амплитуд отраженных и преломленных волн на границе изотропных и анизотропных сред. Полученные выражения ориентированы на практические расчеты, в них используется аппарат векторной алгебры, не содержится тригонометри-

ческих функций и используется система координат, связанная с поверхностью раздела сред, — та же, в которой решается задача преломления. Это позволяет создать на основе предложенной методики эффективные математические модели анизотропных сред, которые могут использоваться в системах автоматизированного проектирования и анализа оптических систем.

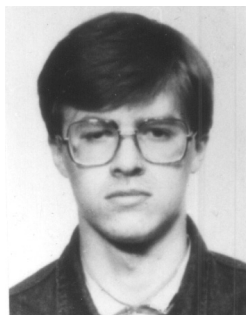
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заварзин В. И., Калужный А. И. Решение задачи преломления электромагнитной волны на границе раздела с анизотропной средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2003. – № 1 – С. 20–25.
2. Заварзин В. И., Калужный А. И. Расчет хода лучей через оптическую систему с произвольным расположением поверхностей в пространстве // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. – 2001. – № 4 – С. 58–66.
3. Сивухин Д. В. Оптика. – М.: Наука, 1985. – 752 с.

Статья поступила в редакцию 19.06.2003

Валерий Иванович Заварзин родился в 1956 г., окончил в 1980 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Оптико-электронные приборы научных исследований”, декан факультета “Оптико-электронное приборостроение” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области оптического приборостроения.

V.I. Zavarzin (b. 1956) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1980. Ph. D. (Eng.), ass. professor of “Optical-and-Electronic Devices for Research Application” department, dean of “Optical-and-Electronic Devices Engineering” faculty of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 70 publications in the field of optical devices engineering.



Алексей Иванович Калужный родился в 1977 г., окончил в 2001 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Оптико-электронные приборы научных исследований” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 6 научных работ в области оптического приборостроения.

A.I. Kalyuzhny (b. 1977) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2001. Post-graduate of “Optical-and-Electronic Devices for Research Application” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 6 publications in the field of optical devices engineering.