

УДК 519.62

А. Н. Морозов, А. В. Скрипкин

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОПИСАНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ, ОКРУЖАЮЩЕМ СФЕРИЧЕСКУЮ ЧАСТИЦУ

*Рассмотрен процесс теплопроводности в окружающей сферическую частицу пространстве при условии наличия флуктуаций теплового потока через ее поверхность. Показано, что соответствующие случайные изменения температуры и теплового потока представляют собой немарковские процессы и для их описания необходимо использование стохастических интегральных уравнений. Найдены статистические характеристики таких флуктуаций, в том числе характеристические функции, спектральные плотности и др.*

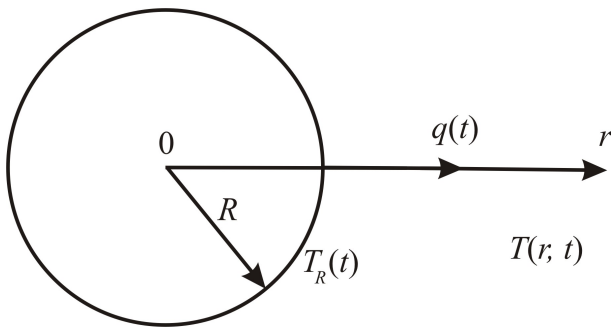
**E-mail:** [press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)

**Ключевые слова:** немарковский случайный процесс, интегральное преобразование, характеристическая функция, теплопроводность.

При изучении явлений теплопроводности во многих случаях приходится учитывать случайные изменения соответствующих физических величин (например, температуры или теплового потока), вызванные флуктуациями мощности тепловых источников, термодинамических потоков, коэффициентов теплопроводности и т.д. Описание процесса распространения теплоты в этом случае обычно проводят с помощью стохастических дифференциальных уравнений теплопроводности с определенными начальными и граничными условиями. Случайные процессы, описываемые такими уравнениями, имеют характер марковских, а для получения статистических характеристик флуктуаций физических величин может быть использована хорошо разработанная теория стохастических дифференциальных систем [1].

Однако такая модель случайных процессов является приближенной, не учитывающей, в частности, наследственные свойства реальных физических сред. Так, в работах [2, 3] показано, что более точное описание процессов броуновского движения, учитывающее увлечение броуновской частицей окружающих ее частиц вязкой среды или флуктуации кинетического коэффициента трения, приводит к немарковскому характеру флуктуаций импульса броуновской частицы.

В настоящей работе показано, что изучение явлений теплопроводности даже в относительно простых случаях требует применения стохастических интегральных уравнений, а флуктуации рассматриваемых



**Рис. 1.** Расчетная схема процесса теплопроводности в среде вокруг сферической частицы

физических величин в общем случае также будут являться немарковскими случайными процессами.

**Постановка задачи.** Рассмотрим неподвижную сферическую частицу радиусом  $R$ , температуропроводностью  $\chi_M$  и объемной теплоемкостью  $c_V$ , в центр которой поместим начало сферической системы координат (рис. 1). Температуру поверхности частицы будем считать некоторой функцией времени  $T_R(t)$ . Среду вне сферической частицы (при  $r > R$ ) считаем однородной с постоянными плотностью  $\rho$ , теплопроводностью  $\kappa$  и температуропроводностью  $\chi$ , причем  $\chi \ll \chi_M$ . Начальная температура во всем пространстве равна некоторой постоянной величине  $T_0$ . Изменением радиуса сферической частицы вследствие изменения температуры пренебрегаем. Ясно, что в рассматриваемом случае температура среды будет зависеть только от расстояния до центра сферы  $r$  и времени  $t$  и уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{\chi}{r} \frac{\partial^2 (rT(r, t))}{\partial r^2} \quad (r > R) \quad (1)$$

с граничным и начальным условиями

$$T(r, t)|_{r=R} = T_R(t); \quad (2)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = T_0. \quad (3)$$

Для потока теплоты  $q_T(t)$  через поверхность сферической оболочки радиусом  $R$  справедливо общее соотношение

$$q_T(t) = -\kappa \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (4)$$

В то же время поток  $q_T(t)$  при учете его флуктуаций через поверхность оболочки радиусом  $R$  может быть определен с помощью выражения

$$q_T(t) = -\frac{c_V R}{3} \frac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{q_T}(t), \quad (5)$$

где  $\xi_{qT}(t)$  — случайный тепловой поток (источник Ланжевена), свойства которого зависят от характера источника флуктуаций, причем  $\langle \xi_{qT}(t) \rangle = 0$ . Отметим, что соотношение (5) справедливо для случая предполагаемой высокой тепловой проводимости частицы.

Во многих случаях можно считать, что поток  $\xi_{qT}(t)$  представляет собой белый шум с интенсивностью  $\nu$ . Граничную частоту  $\omega_{\text{гр}}$  такого шума можно оценить с помощью характеризующих задачу параметров — радиуса частицы  $R$  и коэффициента температуропроводности материала частицы  $\chi_M$ , согласно соотношению

$$\omega_{\text{гр}} \sim \frac{\chi_M}{R^2}. \quad (6)$$

Для медной частицы с коэффициентом температуропроводности  $\chi_M = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$  и радиусом 10 мкм получим  $\omega_{\text{гр}} \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

Значение интенсивности  $\nu$  случайного теплового потока можно оценить по формуле

$$\nu \sim \frac{\kappa}{R^3} k_B T^2, \quad (7)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана. Для рассматриваемой выше частицы, помещенной в воду, получим оценку  $\nu \sim 10^{-3} \text{ Дж}^2/(\text{м}^4 \cdot \text{с})$ .

**Стохастическое интегральное уравнение.** Решение задачи (1)–(3) будем искать с помощью введения вспомогательной функции

$$f(r, t) = rT(r, t). \quad (8)$$

В этом случае уравнения (1)–(3) запишутся в виде

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial r^2} \quad (r > R); \quad (9)$$

$$f(r, t)|_{r=R} = RT_R(t), \quad (10)$$

$$f(r, t)|_{t=0} = T_0 r. \quad (11)$$

Последние выражения формально соответствуют одномерному уравнению теплопроводности для величины  $f(r, t)$ . Решение подобного рода задач представляет собой, как известно [4], сумму двух слагаемых. Первое слагаемое связано с первоначальным распределением температуры (и не зависит от изменений температуры на границах), второе — с присутствием граничных функций температур или потоков. Из физических соображений ясно, что в рассматриваемой задаче ввиду наличия термодинамического равновесия в начальный момент времени неслучайная составляющая потока теплоты через границу среды, вызванная начальным распределением температуры, будет иметь нулевое значение. Тогда решение задачи (9)–(11) запишем

как

$$f(r, t) = \frac{R}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{r - R}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(r - R)^2}{4\chi(t - \tau)} \right] T_R(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Для получения уравнения, определяющего значение теплового потока  $q_T(t)$ , воспользуемся соотношением, следующим из (4) и (8):

$$\left. \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{R}{\kappa} q_T(t) + T_R(t). \quad (13)$$

Производную  $\frac{\partial f(r, t)}{\partial r}$  определим из формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} &= \\ &= \frac{R}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \left[ \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} - \frac{2(r - R)^2}{4\chi(t - \tau)^{5/2}} \right] \exp \left[ -\frac{(r - R)^2}{4\chi(t - \tau)} \right] T_R(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрирование по частям позволяет записать последнее выражение в виде

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial r} = -\frac{R}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \exp \left[ -\frac{(r - R)^2}{4\chi(t - \tau)} \right] \frac{dT_R(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (15)$$

Нахождение из формулы (15) величины  $\left. \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R}$  и ее подстановка в (13) приводят к следующему соотношению для теплового потока:

$$q_T(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} + \frac{\sqrt{\pi\chi}}{R} \right) \frac{dT_R(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (16)$$

Введя замены

$$Z(t) = \frac{dT_R(t)}{dt}, \quad \tilde{\xi}_{qT} = \frac{3}{c_V R} \xi_{qT} \quad (17)$$

и воспользовавшись выражением (5), получим искомое соотношение, связывающее случайный тепловой поток  $\xi_{qT}(t)$  через границу сферической оболочки и производную температуры  $T_R(t)$  на поверхности по времени, имеющее вид интегрального уравнения Вольтерра второ-

го рода:

$$Z(t) + \frac{3\kappa}{c_V R \sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi\chi}}{R} \right) Z(\tau) d\tau = \tilde{\xi}_{qT}(t). \quad (18)$$

Полученное уравнение (18), ядро которого представляет собой сумму слагаемого абелевого типа и постоянной величины, не может быть сведено к конечной системе стохастических дифференциальных уравнений [5]. Таким образом, случайные процессы  $Z(t)$  и  $q_T(t)$ , а также флуктуации температуры  $T_R(t)$ , представляющей собой интеграл по времени от функции  $Z(t)$ , являются немарковскими [6].

Следует отметить, что уравнение, аналогичное (18), получено при описании броуновского движения сферической частицы в вязкой среде при учете увлечения ею окружающих частиц среды [2].

Отметим также, что выражение (18) справедливо при описании одномерного процесса теплопроводности в полупространстве над поверхностью плоского слоя конечной толщины. Действительно, рассмотрим сферическую оболочку радиусом  $R$  и толщиной  $h$ , такой, что  $h \ll R$ . Теплоемкость  $C$  такой оболочки определяется равенством  $C = c_V \cdot 4\pi R^2 h$ . Введя величину  $c_S = \frac{C}{4\pi R^2} = c_V h$ , представляющую собой теплоемкость оболочки, отнесенную к единице площади ее поверхности, вместо формулы (5) получим равенство  $q_T(t) = -\frac{c_V \cdot 4\pi R^2 h}{4\pi R^2} \frac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{qT}(t) = -c_S \frac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{qT}(t)$ . Тогда для интегрального стохастического уравнения, описывающего процесс распространения теплоты в среде, ограниченной бесконечным плоским слоем, вместо соотношения (18) запишем выражение

$$Z(t) + \frac{\kappa}{c_S \sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} Z(\tau) d\tau = \tilde{\xi}_{qT}(t), \quad (19)$$

где  $c_S$  — теплоемкость единицы площади рассматриваемого плоского слоя.

Общий вид решения уравнения (18) можно представить с помощью интегрального оператора

$$Z(t) = \tilde{\xi}_{qT}(t) + \int_0^t K(t-\tau) \tilde{\xi}_{qT}(\tau) d\tau, \quad (20)$$

где  $K(t-\tau)$  — резольвента для уравнения (18), которая может быть записана с помощью бесконечного ряда [7]

$$K(t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t - \tau), \quad (21)$$

в котором

$$u_{n+1}(t - \tau) = - \int_{\tau}^t u_1(t - s) u_n(s - \tau) ds; \quad (22)$$

$$u_1(t - \tau) = \frac{3\kappa}{c_V R \sqrt{\pi\chi}} \left( \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} + \frac{\sqrt{\pi\chi}}{R} \right). \quad (23)$$

Расчет по формуле (22) показывает, что для не слишком больших значений  $t - \tau$  ряд (21) с хорошей степенью точности может быть определен с помощью суммы первых его членов. На рис. 2 изображен схематический график функции  $K(t - \tau)$  в случае, если сохранены первые 10 слагаемых (для простоты все постоянные приняты за единицу). Хорошо видно, что построенный график представляет убывающую функцию. Аппроксимируя его степенной функцией, получаем в хорошем приближении зависимость

$$K(t - \tau) = 0,61(t - \tau)^{-0,57}. \quad (24)$$

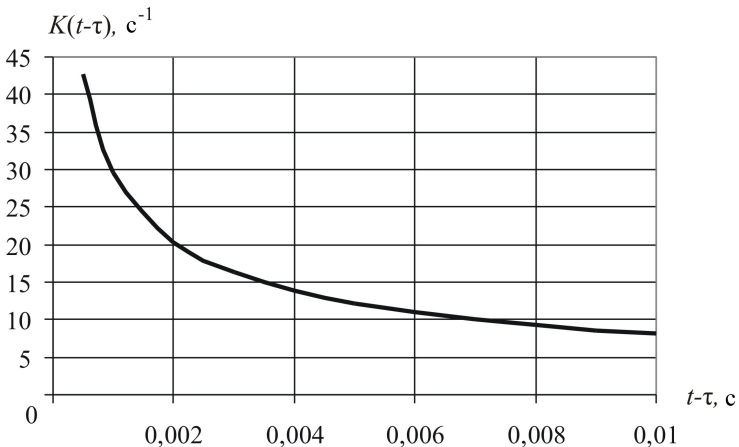
В частном случае теплопроводности над плоскостью (при  $R = \infty$ ) ряд (21) принимает вид [8]

$$K(t - \tau) = \frac{1}{t - \tau} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n (t - \tau)^{n/2}, \quad (25)$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left( \frac{3\kappa}{c_V R \sqrt{\chi}} \right)^n; \quad (26)$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция.



**Рис. 2.** Схематический график функции  $K(t - \tau)$

**Статистические характеристики.** С помощью метода, изложенного в работе [9], для одномерной ( $g_1(\lambda; t)$ ) и многомерной ( $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ ) характеристических функций случайного процесса  $Z(t)$  получаем соотношения

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[ -\frac{9\nu\lambda^2}{2c_V^2 R^2} \int_0^t K^2(t-\tau) d\tau \right]; \quad (27)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) =$$

$$= \exp \left[ -\frac{9\nu}{c_V^2 R^2} \sum_{\substack{l,k=1, \\ k \leq l}}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{t_k} K(t_l - \tau) K(t_k - \tau) d\tau \right]. \quad (28)$$

Следует отметить, что в полученных выражениях (20), (27), (28), так же как и в последующих, предел интегрирования по времени фактически не значение  $t$ , а величина  $t - \delta t$ , где  $\delta t$  — малый параметр, близкий к времени свободного пробега частиц среды. Это вызвано отсутствием физического влияния на флуктуации рассматриваемых величин тех процессов, которые происходят при  $t - \tau < \delta t$ .

Найденные формулы (27) и (28) позволяют определить моменты любого порядка для процесса  $Z(t)$ . В частности, для математического ожидания  $\langle Z(t) \rangle$ , момента второго порядка  $\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle$  и дисперсии  $\sigma^2(t) = \langle Z^2(t) \rangle$  получим

$$\langle Z(t) \rangle = \left. \frac{\partial g_1(\lambda; t)}{i\partial\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle &= \left. \frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{i\partial\lambda_1 i\partial\lambda_2} \right|_{\substack{\lambda_1=0, \\ \lambda_2=0}} = \\ &= \frac{9\nu}{c_V^2 R^2} \int_0^{t_1} K(t_2 - \tau) K(t_1 - \tau) d\tau; \quad (30) \end{aligned}$$

$$\sigma^2(t) = \langle Z^2(t) \rangle = \langle Z(t)Z(t) \rangle = \frac{9\nu}{c_V^2 R^2} \int_0^t K^2(t-\tau) d\tau. \quad (31)$$

Уравнение (27) позволяет найти также одномерную плотность вероятности  $p(Z)$  флуктуаций величины  $Z(t)$  с помощью опреде-

ления [1]

$$p(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda; t) e^{-i\lambda Z} d\lambda. \quad (32)$$

Получим

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2(t)}\right), \quad (33)$$

что соответствует нормальному распределению Гаусса. Из выражения (31) видно, что дисперсия величины  $Z(t)$  растет с течением времени, из чего следует “размывание” плотности вероятности  $p(Z)$  при увеличении  $t$ .

Найдем теперь спектральные плотности флуктуаций величины  $Z(t)$ , температуры поверхности  $T_R(t)$  и теплового потока  $q_T(t)$ . Для этого проведем преобразование Лапласа исходного интегрального уравнения (18). Имеем

$$\hat{Z}(p) + \frac{3\kappa}{c_V R \sqrt{\chi}} \left( \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{\chi}}{Rp} \right) \hat{Z}(p) = \hat{\xi}_{qT}(p), \quad (34)$$

где символами со “шляпкой” обозначены образы соответствующих функций,  $p$  – фурье-образ переменной  $t$ .

С помощью определения спектральной плотности установившегося случайного процесса (при  $t = \infty$ ), согласно которому

$$G_Z(\omega) = \left| \hat{Z}(i\omega) \right|^2, \quad (35)$$

а также при учете того, что спектральная плотность белого шума равна его интенсивности, для спектральной плотности флуктуаций  $Z(t)$  получим

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\frac{c_V^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2}\kappa c_V R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2} + \frac{\kappa^2}{\chi} \omega + \frac{\sqrt{2}\kappa}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \nu. \quad (36)$$

Из выражения (36), пользуясь заменой (17) и формулой (5), находим спектральные плотности флуктуаций  $T_R(t)$  и  $q_T(t)$ :

$$G_{T_R}(\omega) = \frac{1}{\frac{c_V^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2}\kappa c_V R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2} + \frac{\kappa^2}{\chi} \omega + \frac{\sqrt{2}\kappa}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \nu; \quad (37)$$

$$G_{q_T}(\omega) = \left( 1 + \frac{\frac{c_V^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2}\kappa c_V R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2}}{\frac{\kappa^2}{\chi} \omega + \frac{\sqrt{2}\kappa}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \right)^{-1} \nu. \quad (38)$$



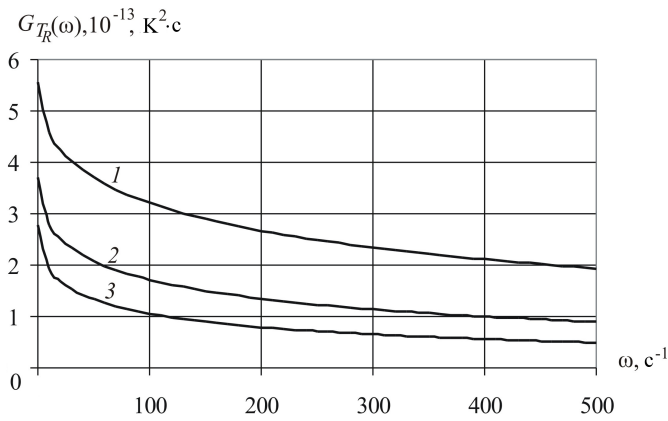


Рис. 3. Графики спектральной плотности флуктуаций температуры поверхности медной частицы  $G_{T_R}(\omega)$  при  $R = 10$  (1);  $R = 12,5$  (2);  $R = 15$  мкм (3)

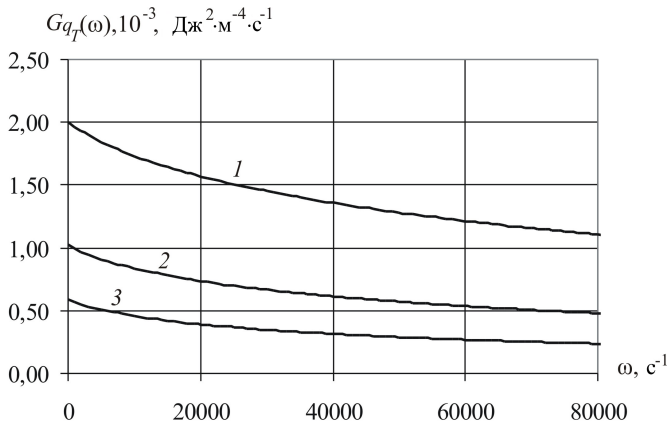


Рис. 4. Графики спектральной плотности флуктуаций теплового потока через поверхность медной частицы  $G_{q_T}(\omega)$  при  $R = 10$  (1);  $R = 12,5$  (2);  $R = 15$  мкм (3)

Графики на рис. 3 и 4 иллюстрируют найденные зависимости (37) и (38) для различных значений радиуса  $R$ . При построении графиков параметр  $\nu$  рассчитывался согласно выражению (7). На рис. 3 хорошо видно, что с увеличением радиуса  $R$  графики спектральной плотности  $G_{T_R}(\omega)$  флуктуаций температуры  $T_R(t)$  располагаются ниже аналогичных графиков, соответствующих меньшим по размеру частицам. Это означает уменьшение дисперсии флуктуаций температуры сферической частицы с ростом ее радиуса. Спектральная плотность  $G_{T_R}(\omega)$  в области низких частот обратно пропорциональна радиусу:

$$G_{T_R}(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{R^2 \nu}{\kappa^2} \sim \frac{k_B T^2}{\kappa R}. \quad (39)$$

Таким образом, рассмотрение процесса теплопроводности даже в случае относительно простых моделей (вне сферической поверхности

и в полупространстве) требует для описания флуктуаций соответствующих физических величин применения интегральных стохастических уравнений, а сами флуктуации в этом случае представляют собой немарковские случайные процессы. Полученные результаты имеют значение при описании случайных флуктуаций температуры микрочастиц в средах с малой теплопроводностью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П у г а ч е в В. С., С и н и ц ы н И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
2. М о р о з о в А. Н., С к р и п к и н А. В. Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса // Изв. вузов. Физика. – 2009. Т. 2. – С. 66–74.
3. М о р о з о в А. Н., С к р и п к и н А. В. Статистическое описание осциллятора, находящегося под воздействием флуктуирующего коэффициента трения // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. – 2008. – № 2. – С. 3–15.
4. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
5. В о л ь т е р р а В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
6. М о р о з о в А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.
7. В е р л а н ь А. Ф., С и з и к о в В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 542 с.
8. В и б р а ц и и в технике. Справочник. Т. 1. – М.: Машиностроение, 1978. – 560 с.
9. М о р о з о в А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2004. – № 3. – С. 47–56.

Статья поступила в редакцию 15.01.2010

Андрей Николаевич Морозов родился в 1959 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1981 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.

A.N. Morozov (b. 1959) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1981. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Physics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of high precision measuring systems and physical kinetics theory.

Алексей Владимирович Скрипкин родился в 1983 г., окончил Курский государственный университет в 2005 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 работ в области физической кинетики и электродинамики.

A.V. Skripkin (b. 1983) graduated from the Kursk State University in 2005. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 15 publications in the field of physical kinetics theory and electrodynamics.