

2. Проектирование полноприводных колесных машин / Б.А. Афанасьев, Н.Ф. Бочаров, Л.Ф. Желгов и др. Под ред. А.А. Полунгяна. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 610 с.
3. Литвинов А. С. Управляемость и устойчивость автомобиля. – М.: Машиностроение, 1971. – 416 с.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.

Статья поступила в редакцию 16.10.2003

Анатолий Владимирович Кобаев родился в 1951 г., окончил в 1972 г. Орловский государственный педагогический институт. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ, в основном в области теории функций комплексного переменного и подземной гидродинамики.

A.V. Kobayev (b. 1951) graduated from the Orlovsky State Pedagogical Institute. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications, mainly, in the field of theory functions of complex variable and underground hydrodynamics.



Виктор Иванович Рязанцев родился в 1941 г., окончил в 1964 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Колесные машины” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области конструирования и расчета колесных машин.

V.I. Ryazantsev (b. 1941) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1964. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Wheeled Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of design and computation of wheeled vehicles.

УДК 531.36

А. И. И в а н о в а

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХЗВЕННОГО МАЯТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрена устойчивость вертикального положения равновесия маятника, состоящего из трех невесомых стержней одинаковой длины, которые соединены упругими шарнирами одинаковой массы с равными коэффициентами жесткости (маятник находится под действием следящей силы).

Постановка задачи. Равновесие двухзвенного маятника исследовалось в работе [1], в которой были получены условия его устойчивости. Нелинейный анализ устойчивости этого маятника приведен в работе [2]. В настоящей работе рассмотрена устойчивость положения рав-

новесия трехзвенного маятника (рис. 1). Условия устойчивости устанавливаются с помощью линеаризованных уравнений движения.

Маятник состоит из трех невесомых стержней AB , BC и CD одинаковой длины l . В точках B , C и D помещены три одинаковых груза, масса каждого из которых равна m . Шарниры в точках A , B и C характеризуются коэффициентом жесткости a . На стержень CD действует постоянная по своему значению следящая сила P . Направление этой силы совпадает с направлением CD . Положение маятника определяется углами φ_i , $i = 1, 2, 3$, которые характеризуют отклонение стержней от вертикального положения. В положении равновесия маятника имеем $\varphi_i = 0$.

Получим уравнения движения маятника. Введем систему отсчета (см. рис. 1). Координаты точек B , C и D имеют вид

$$x_i = \sum_{j=1}^i l \sin \varphi_j, \quad y_i = \sum_{j=1}^i l \cos \varphi_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда их скорости соответствуют выражениям

$$\dot{x}_j = \sum_{j=1}^i l \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j, \quad \dot{y}_i = - \sum_{j=1}^i l \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j.$$

Вариации координат имеют вид

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^i l \cos \varphi_j \delta \varphi_j, \quad \delta y_i = - \sum_{j=1}^i l \sin \varphi_j \delta \varphi_j.$$

Для нахождения уравнений движения используем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^{\Pi} + Q_i^P, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $q_i = \varphi_i$; T — кинетическая энергия маятника; Q_i^{Π} — обобщенная потенциальная сила, $Q_i^{\Pi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, Π — потенциальная энергия; Q_i^P — обобщенная сила, возникающая в результате действия следящей силы P .

Кинетическая энергия маятника имеет вид

$$T = \frac{ml^2}{2} (3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

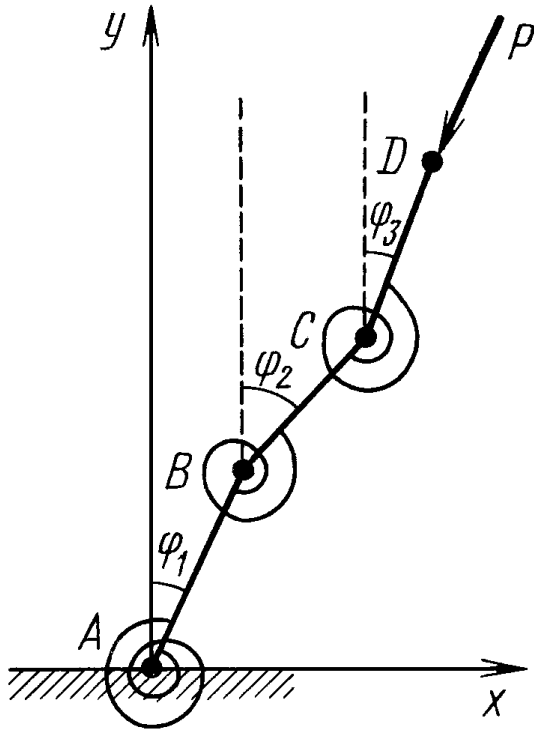


Рис. 1. Трехзвенный маятник, состоящий из трех невесомых стержней AB , BC и CD

$$+2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)).$$

Линеаризуя это выражение в окрестности $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, получим

$$T = \frac{ml^2}{2} (3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3). \quad (2)$$

Соответственно, для потенциальной энергии получим

$$\Pi = \frac{a}{2} (2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3). \quad (3)$$

Найдем Q_i^P , записывая элементарную работу силы P в виде $\delta A(P) = P_x \delta x_D + P_y \delta y_D$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} Q_1^P &= -Pl(\sin(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin(\varphi_3 - \varphi_1)), \\ Q_2^P &= -Pl \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \\ Q_3^P &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Линеаризуя уравнения (4) и подставляя выражения (2)–(4) в уравнения (1), получим линеаризованную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} ml^2 (3\ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3) + a (2\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + Pl (\varphi_3 - \varphi_2) + Pl (\varphi_3 - \varphi_1) = 0, \\ ml^2 (2\ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3) + a (2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) + Pl (\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \\ ml^2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3) + a (\varphi_3 - \varphi_2) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения движения (5) приведем к безразмерному виду [3], вводя безразмерное время $\tau = l^{-1}(a/m)^{1/2}t$ и параметр $p = Pla^{-1}$:

$$\begin{aligned} 3\varphi_1'' + 2\varphi_2'' + \varphi_3'' + (2-p)\varphi_1 - (p+1)\varphi_2 + 2p\varphi_3 = 0, \\ 2\varphi_1'' + 2\varphi_2'' + \varphi_3'' - \varphi_1 + (2-p)\varphi_2 + (p-1)\varphi_3 = 0, \\ \varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3'' - \varphi_2 + \varphi_3 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрихом обозначена производная по τ . Уравнения движения системы в первом приближении допускают очевидное решение

$$\varphi_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

соответствующее вертикальному положению маятника.

Характеристическое уравнение. Система (6) — система шестого порядка, содержащая вторые производные. Представим ее в виде уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_4, \\ \varphi_2' &= \varphi_5, \\ \varphi_3' &= \varphi_6, \\ \varphi_4' &= (p-3)\varphi_1 + 3\varphi_2 - (p+1)\varphi_3, \\ \varphi_5' &= (4-p)\varphi_1 + (p-6)\varphi_2 + 3\varphi_3, \\ \varphi_6' &= -\varphi_1 + (4-p)\varphi_2 + (p-3)\varphi_3 \end{aligned} \quad (8)$$

или в матричной форме

$$\vec{\varphi}' = A \cdot \vec{\varphi},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (p-3) & 3 & -(p+1) & 0 & 0 & 0 \\ (4-p) & (p-6) & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (4-p) & (p-3) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}.$$

Для исследования устойчивости положения равновесия, соответствующего решению (7), рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

которое приводится к виду

$$\lambda^6 + \lambda^4(12 - 3p) + \lambda^2(3p^2 - 19p + 20) + 1 = 0.$$

Введем переменную $\mu = \lambda^2$ и получим

$$\mu^3 + \mu^2(12 - 3p) + \mu(3p^2 - 19p + 20) + 1 = 0. \quad (9)$$

Для устойчивости положения равновесия корни уравнения (9) должны быть отрицательными и, кроме того, действительными. В соответствии с критерием Рауса–Гурвица все решения уравнения (9) имеют отрицательные действительные части в том случае, если все миноры матрицы Гурвица положительны. Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} 12 - 3p &> 0, \\ 3p^2 - 19p + 20 &> 0, \\ (12 - 3p)(3p^2 - 19p + 20) - 1 &> 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме условий (10), должно быть выполнено условие Кардано для кубического уравнения [4].

Известно, что кубическое уравнение $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ приводится к виду $x^3 + p_0x + q = 0$, дискриминант которого имеет вид $D = -4p_0^3 - 27q^2$. В рассматриваемом случае $A = 12 - 3p$, $B = 3p^2 - 19p + 20$, $C = 1$. Соответственно, $p_0 = 5p - 28$, $q = p^3 - 7p^2 + 49$.

Если дискриминант удовлетворяет условию

$$D > 0, \quad (11)$$

то соответствующее уравнение имеет только действительные корни.

Следовательно, для устойчивости системы (6) необходимо и достаточно выполнение условий (10) и (11). В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned}
D(p) = & -27p^6 + 378p^5 - 1323p^4 - 3146p^3 + \\
& + 26922p^2 - 47040p + 22981; \\
& 12 - 3p > 0, \\
& 3p^2 - 19p + 20 > 0, \\
& (12 - 3p)(3p^2 - 19p + 20) - 1 > 0, \\
-27p^6 + 378p^5 - 1323p^4 - 3146p^3 + 26922p^2 - 47040p + 22981 > 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Для уравнений $(12 - 3p)(3p^2 - 19p + 20) - 1 = 0$ и $-27p^6 + 378p^5 - 1323p^4 - 3146p^3 + 26922p^2 - 47040p + 22981 = 0$ получим решения, используя метод Ньютона [5].

Уравнение $(12 - 3p)(3p^2 - 19p + 20) - 1 = 0$ имеет три решения: $p_{11} = 1,32205$, $p_{12} = 4,04284$, $p_{13} = 4,96844$; уравнение $3p^2 - 19p + 20 = 0$ имеет два решения: $p_{21} = 5$, $p_{22} = 8/6 \approx 1,33$.

Уравнение $-27p^6 + 378p^5 - 1323p^4 - 3146p^3 + 26922p^2 - 47040p + 22981 = 0$ имеет четыре действительных корня и два комплексно-сопряженных: $p_{31} \approx -4,01187$, $p_{32} \approx 0,84838$, $p_{33} \approx 1,88856$, $p_{34} \approx 5,2596$.

В итоге получаем ограничения для параметра p : для того, чтобы исходная система (5) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы параметр p принадлежал интервалу $(0; 0,85)$.

Численное решение системы (6). Получим численное решение исходной системы, используя метод Рунге–Кутты [5]. Пусть векторы начальных значений имеют вид

$$\bar{y}_{01} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_{02} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_{03} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

Решения системы (6) для двух различных значений параметра p представлены на рис. 2, 3.

Заключение. Исследована устойчивость вертикального положения механической системы с тремя степенями свободы на основе методов линеаризации. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости. Результаты численного расчета совпадают с результатами, полученными аналитически.

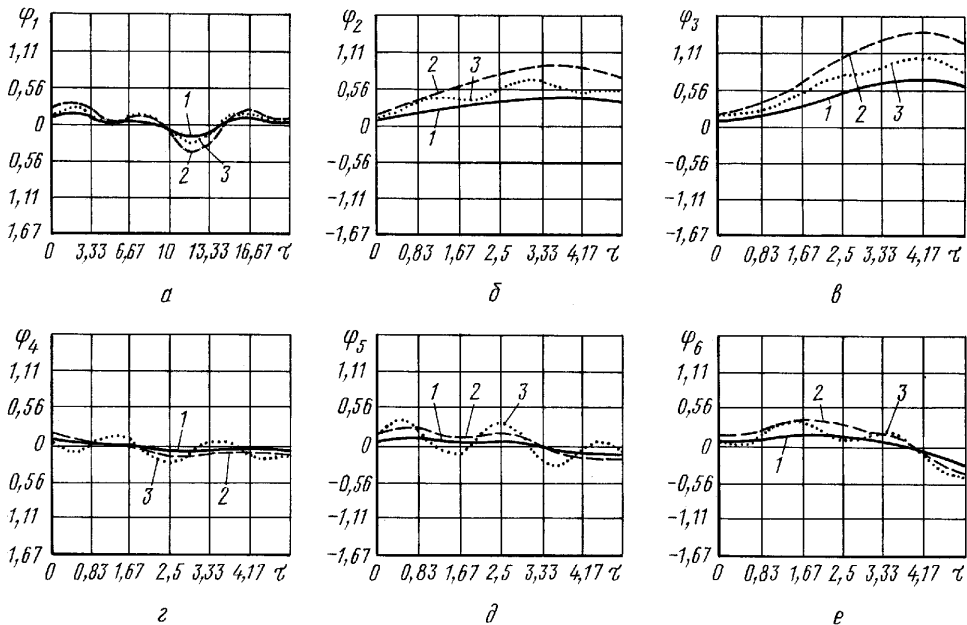


Рис. 2. Графики зависимости $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ и φ_6 от $\tau = l^{-1}(a/m)^{1/2}t$ для $p = 0,7$ и различных начальных условий:

1 — $\bar{\varphi}(0) = \bar{y}_{01}$; 2 — $\bar{\varphi}(0) = \bar{y}_{02}$; 3 — $\bar{\varphi}(0) = \bar{y}_{03}$

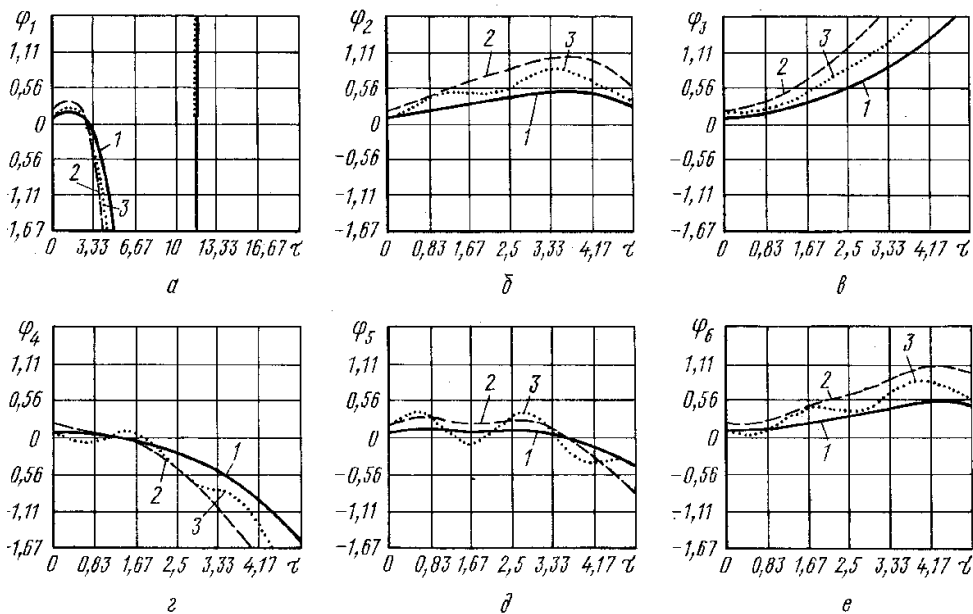


Рис. 3. Графики зависимости $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ и φ_6 от $\tau = l^{-1}(a/m)^{1/2}t$ для $p = 1,5$ и различных начальных условий:

1 — $\bar{\varphi}(0) = \bar{y}_{01}$; 2 — $\bar{\varphi}(0) = \bar{y}_{02}$; 3 — $\bar{\varphi}(0) = \bar{y}_{03}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Z i e g l e r H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. – 1952. – V. 20. – № 1. – P. 49–56.
2. А г а ф о н о в С. А. Об устойчивости и автоколебании двойного маятника с упругими элементами под действием следящей силы // Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 185–190.
3. A g a f o n o v S. A. Stability and Motion. Stabilization of Nonconservative Mechanical Systems // Journal of Math. Sciences. – 2002. – V. 112. – № 5. – P. 4419–4497.
4. К у р о ш А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 432 с.
5. А м о с о в А. А., Д у б и н с к и й Ю. А., К о п ч е н о в а Н. В. Численные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994. – С. 105–112, 443–445.

Статья поступила в редакцию 12.09.2003

Александра Игоревна Иванова родилась в 1983 г. Студентка МГТУ им. Н.Э. Баумана.

A.I. Ivanova (b. 1983), student of the Bauman Moscow State Technical University.

УДК 621.313.322

А. Л. Н а з о л и н

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ В УПРУГОЙ ПОДВЕСКЕ МАШИНЫ НА ПЕРЕДАЧУ ВИБРАЦИИ

Разработана математическая модель влияния неидеальных связей в упругой подвеске сердечника статора на вибрацию корпуса турбогенератора. Выявлены общие закономерности изменения спектра изгибных колебаний корпуса, которое вызвано дефектом ослабления плотности посадки.

Упругая подвеска машин применяется в технике для уменьшения коэффициента передачи вибрации на корпус или фундамент. При идеальном соединении машины с упругой подвеской, имеющей линейную характеристику восстанавливающей силы, передача вибрации на корпус описывается линейным дифференциальным уравнением, а уменьшение вибрации корпуса по сравнению с вибрацией машины происходит в условиях, когда собственная частота колебаний машины на упругой подвеске мала по сравнению с частотой вынуждающей силы.

Причинами возникновения неидеальных связей в упругой подвеске машин (дефекта подвески) могут быть погрешности изготовления элементов конструкции и некачественная сборка. Кроме того, с течением времени происходит естественный износ узлов подвески с появле-