

А. В. Копаев, В. И. Рязанцев

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО
РЕГУЛИРОВАНИЯ УГЛА СХОЖДЕНИЯ
КОЛЕС АВТОМОБИЛЯ**

Рассмотрена математическая модель системы автоматического регулирования угла схождения управляемых колес автомобиля, описываемая двумя линейными однородными дифференциальными уравнениями. Получено аналитическое решение этой системы дифференциальных уравнений. Проведен анализ полученного решения и указаны условия устойчивой работы системы автоматического регулирования.

В течение последних десятилетий в конструкцию автомобиля внедряют автоматические системы различного рода, улучшающие его эксплуатационные свойства, например автоматические системы, влияющие на безопасность автомобиля: усилители рулевого управления, усилители тормозного управления, автоматически регулируемая подвеска, антиблокировочная система, повышающая устойчивость и улучшающая управляемость автомобиля при торможении. В настоящей работе проведен анализ системы автоматического регулирования угла схождения управляемых колес автомобиля при движении по прямой с постоянной скоростью; изучение этой системы начато авторами в работе [1]. Работа этой системы при других режимах движения автомобиля, также представляющих практический интерес, является предметом дальнейших исследований авторов.

Известно, что при движении автомобиля по прямой наибольшая устойчивость автомобильного колеса к боковому скольжению, наименьшие износ и сопротивление качению обеспечиваются при совпадении плоскости колеса с плоскостью его прямолинейного движения. Боковая реакция дороги в этом случае отсутствует. Поэтому желательно, чтобы при прямолинейном движении автомобиля плоскости левого и правого колес были параллельны, т.е. чтобы угол между ними был равен нулю. В соответствии с автомобильной терминологией угол между главными плоскостями левого и правого колес, установленных с нулевым развалом, называется углом схождения. Если при этом плоскости колес пересекаются впереди автомобиля, то угол схождения считается положительным, а если позади — отрицательным. Под действием сил сопротивления движению нулевой угол схождения, установленный в начале движения, вследствие конечной жесткости конструкции при-

нимает отрицательное значение. Это имеет негативные последствия, такие как снижение устойчивости и ухудшение управляемости автомобиля, увеличение износа шин и расхода топлива. Чтобы избежать этих негативных последствий, предварительной регулировкой в стационарных условиях (на стендах регулировки схода и развала) устанавливается некоторый положительный угол схождения. Его значение рекомендуется заводом-изготовителем. Однако в связи с большим разнообразием реальных режимов движения автомобиля значения силы сопротивления движению изменяются весьма существенно, что приводит к значительному изменению угла схождения и к перечисленным негативным последствиям. Отметим также негативные последствия изменения угла схождения в связи с наездом на какое-либо препятствие и вызванными этим необратимыми деформациями элементов конструкции. Поэтому в последнее время в конструкцию подвесок управляемых и даже неуправляемых колес автомобиля стали включать рычажные системы, обеспечивающие некоторую автоматическую компенсацию неблагоприятной вариации угла схождения при изменении продольных реакций в плоскости дороги, например при торможении. Такие системы, однако, не в состоянии компенсировать изменения угла схождения, возникающие, например, при перегрузках, вызывающих остаточную деформацию элементов, так что требуется периодическая повторная регулировка угла схождения на стендах регулировки схода и развала.

В рассматриваемой далее системе угол схождения регулируется путем принудительного изменения длины поперечной тяги рулевой трапеции управляемого моста автомобиля с помощью исполнительного механизма (например, гидроцилиндра) в зависимости от значений боковых сил, действующих на колеса автомобиля. В рассматриваемом режиме прямолинейного движения эти силы симметричны. Они направлены внутрь при положительном угле схождения и вовне при отрицательном угле схождения. Силы, направленные внутрь, вызывают перемещение поршня гидроцилиндра, уменьшающее длину поперечной тяги и угол схождения. Таким образом, автоматически поддерживается значение угла схождения, близкое к нулю.

Математическое описание системы регулирования основано на схематическом представлении механики этой системы (рис. 1). Поскольку система регулирования симметрична, то достаточно получить уравнения движения ее правой половины. Дифференциальное уравнение движения поршня гидроцилиндра с приведенными к нему массами, движущимися вместе с ним, имеет вид

$$m_{\text{п}}\ddot{y} = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

где $m_{\text{п}}$ — масса поршня и приведенных к нему элементов привода

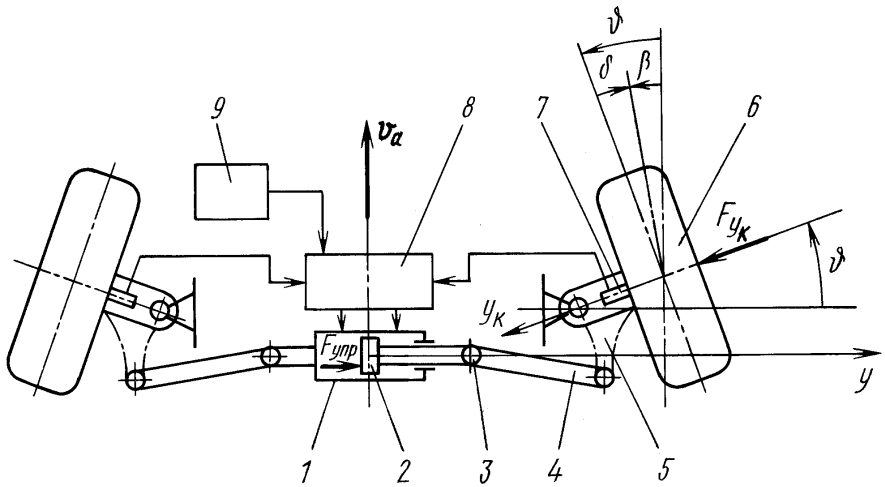


Рис. 1. Схема системы автоматического регулирования угла схождения управляемых колес автомобиля (вид сверху):

1 — корпус гидроцилиндра, регулирующего угол схождения; 2 — поршень гидроцилиндра; 3 — шарнир рулевой трапеции; 4 — боковая тяга рулевой трапеции; 5 — поворотный рычаг цапфы колеса; 6 — управляемое колесо; 7 — датчик боковой силы; 8 — блок управления; 9 — гидронасос

(включая массу колеса); $F_{упр}$ — управляющая сила, приложенная к поршню гидроцилиндра; $F_{тр}$ — сила трения в приводе к управляемому колесу.

Как показали испытания, при движении автомобиля в нормальных условиях (при благоприятных условиях на дороге и скорости от 60 до 100 км/ч) управляющую силу $F_{упр}$ можно считать прямо пропорциональной боковой силе $F_{ук}$, действующей на колесо, и, следовательно, боковому перемещению y_k центра колеса:

$$F_{упр} = -n_1 y_k.$$

Примем такой закон управления и исследуем условия устойчивости его действия.

Силу трения $F_{тр}$ в приводе при перемещении поршня можно считать прямо пропорциональной скорости \dot{y} перемещения поршня [2]:

$$F_{тр} = -k\dot{y};$$

здесь k — некоторый коэффициент.

Таким образом, уравнение (1) принимает вид

$$m_n \ddot{y} = -n_1 y_k - k\dot{y}.$$

Связь скорости \dot{y}_k поперечного упругого перемещения колеса (в реальности это упругая поперечная деформация шины) и скорости автомобиля v_a описывается уравнением

$$\dot{y}_k = v_a \operatorname{tg} \beta, \quad (2)$$

где β — угол между траекториями движения колеса и автомобиля,

$$\beta = \theta - \delta;$$

здесь θ — угол поворота ступицы управляемого колеса, прямо пропорциональный перемещению поршня y :

$$\theta = n_2 y;$$

δ — угол увода колеса. Согласно линейной теории увода автомобильных колес угол увода δ прямо пропорционален боковой силе F_{y_k} и, следовательно, поперечной деформации колеса y_k [3]:

$$\delta = n_3 y_k.$$

Таким образом, уравнение (2) имеет вид

$$\dot{y}_k = v_a \operatorname{tg}(n_2 y - n_3 y_k).$$

Поскольку при рассматриваемом режиме движения автомобиля угол β не превышает 5-6 градусов, то последнее уравнение можно линеаризовать, заменив $\operatorname{tg} \beta$ на аргумент β . Тогда уравнение (2) примет вид

$$\dot{y}_k = v_a (n_2 y - n_3 y_k).$$

Окончательно систему дифференциальных уравнений (1) и (2) получаем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y} + A\dot{y} + By_k &= 0, \\ \dot{y}_k - Dy + Ey_k &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A = \frac{k}{m_{\Pi}}, \quad B = \frac{n_1}{m_{\Pi}}, \quad D = n_2 v_a, \quad E = n_3 v_a, \quad A, B, D, E > 0.$$

Исключая из второго уравнения системы (3) функцию $y(t)$, для нахождения функции $y_k(t)$ получаем линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\ddot{y}_k + (A + E)\dot{y}_k + AEy_k + BDy_k = 0. \quad (4)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$s^3 + (A + E)s^2 + AEs + BD = 0. \quad (5)$$

Поскольку многочлен третьей степени имеет три (комплексных) корня, то общее решение дифференциального уравнения (4) имеет вид [4]

$$y_k(t) = C_0 y_0(t) + C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные,

$$y(t) = \frac{\dot{y}_k(t) + E y_k(t)}{D}.$$

Отсюда следует, что для нахождения постоянных C_0, C_1, C_2 необходимо задать три начальных условия. В качестве первых двух начальных условий естественно принять $y(0) = 0, y_k(0) = 0$ (что соответствует началу работы системы), а в качестве третьего условия выберем $\ddot{y}_k(0) = a$ (что равносильно заданию возмущающей внешней силы). Итак, будем решать систему дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad y_k(0) = 0, \quad \ddot{y}_k(0) = a. \quad (6)$$

Рассмотрим многочлен третьей степени

$$f(s) = s^3 + (A + E)s^2 + AEs.$$

Этот многочлен имеет три действительных корня: $0, -A < 0, -E < 0$; один локальный максимум и один локальный минимум. При этом

$$\begin{aligned} f_{\max} &= f\left(\frac{-\sqrt{3P} - (A + E)}{3}\right) = \\ &= \frac{(A + E)(2A - E)(A - 2E) + 6P\sqrt{3P}}{27} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\min} &= f\left(\frac{\sqrt{3P} - (A + E)}{3}\right) = \\ &= \frac{(A + E)(2A - E)(A - 2E) - 6P\sqrt{3P}}{27} < 0, \end{aligned}$$

где

$$P = \frac{A^2 - AE + E^2}{3} > 0.$$

График многочлена $f(s)$ представлен на рис. 2. Представим уравнение (5) в виде

$$f(s) = -BD. \quad (7)$$

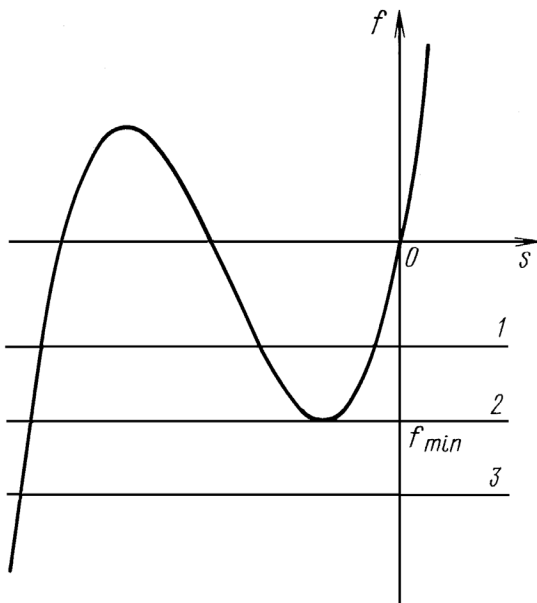


Рис. 2. Относительные положения графика многочлена $f(s)$ и прямой $f = -BD$ для трех случаев:

1 — три точки пересечения; 2 — одна точка пересечения и одна точка касания; 3 — одна точка пересечения

Возможны следующие случаи.

Первый случай — $0 > -BD > f_{\min}$. В этом случае уравнение (7) имеет три различных действительных корня $s_2 < s_1 < s_0 < 0$,

$$y_0(t) = \exp(s_0 t), \quad y_1(t) = \exp(s_1 t), \quad y_2(t) = \exp(s_2 t),$$

$$y(t) = C_0 \frac{E + s_0}{D} y_0(t) + C_1 \frac{E + s_1}{D} y_1(t) + C_2 \frac{E + s_2}{D} y_2(t).$$

Второй случай — $0 > -BD = f_{\min}$. В этом случае уравнение (7) имеет два различных действительных корня $s_2 < s_1 < 0$, один из которых s_2 (бóльший по модулю) — простой, а другой корень s_1 — кратный двум,

$$y_0(t) = \exp(s_1 t), \quad y_1(t) = \exp(s_1 t)t, \quad y_2(t) = \exp(s_2 t),$$

$$y(t) = \left(C_0 \frac{E + s_1}{D} + \frac{C_1}{D} \right) y_0(t) + C_1 \frac{E + s_1}{D} y_1(t) + C_2 \frac{E + s_2}{D} y_2(t).$$

Третий случай — $0 > f_{\min} > -BD$. В этом случае уравнение (7) имеет один действительный корень $s_0 < 0$ и два комплексных сопряженных корня $s_1 = v + iw, s_2 = v - iw$,

$$y_0(t) = \exp(s_0 t), \quad y_1(t) = \exp(vt) \cos(wt), \quad y_2(t) = \exp(vt) \sin(wt),$$

$$y(t) = C_0 \frac{E + s_0}{D} y_0(t) + \left(C_1 \frac{E + v}{D} + C_2 \frac{w}{D} \right) y_1(t) + \left(C_2 \frac{E + v}{D} - C_1 \frac{w}{D} \right) y_2(t).$$

Рассмотрим подробнее каждый из этих случаев.

Первый случай. Решая уравнение (7) по формулам Кардано [5], получим

$$s_0 = \frac{2\sqrt{3P} \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - A - E}{3}, \quad s_1 = \frac{2\sqrt{3P} \cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right) - A - E}{3},$$

$$s_2 = \frac{2\sqrt{3P} \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) - A - E}{3},$$

где

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{9Q}{2P\sqrt{3P}}\right), \quad Q = \frac{(A + E)(A - 2E)(2A - E)}{27} + BD.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями (6) имеет вид

$$y_{\kappa}(t) = \frac{a((s_1 - s_2) \exp(s_0 t) - (s_0 - s_2) \exp(s_1 t) + (s_0 - s_1) \exp(s_2 t))}{(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)(s_1 - s_2)},$$

$$y(t) = \frac{a((E + s_0)(s_1 - s_2) \exp(s_0 t))}{D(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)(s_1 - s_2)} - \frac{a((E + s_1)(s_0 - s_2) \exp(s_1 t) + (E + s_2)(s_0 - s_1) \exp(s_2 t))}{D(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)(s_1 - s_2)}.$$

Отметим, что $\dot{y}_{\kappa}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = a/D$. При $t \rightarrow +\infty$ функции $y_{\kappa}(t)$ и $y(t)$ являются бесконечно малыми, причем

$$y_{\kappa}(t) \sim \frac{a}{(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} \exp(s_0 t), \quad y(t) \sim \frac{a(E + s_0)}{D(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} \exp(s_0 t),$$

так что в рассматриваемом случае система автоматического регулирования угла схождения устойчива.

Второй случай. В этом случае корень s_1 уравнения (7) является точкой локального минимума

$$s_1 = \frac{\sqrt{3P} - (A + E)}{3},$$

а поскольку по теореме Виета имеем $2s_1 + s_2 = -(A + E)$, то

$$s_2 = \frac{-2\sqrt{3P} - (A + E)}{3}.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями (6) в этом случае имеет вид

$$y_k(t) = \frac{a((s_1 - s_2) \exp(s_1 t)t - \exp(s_1 t) + \exp(s_2 t))}{(s_1 - s_2)^2},$$

$$y(t) = \frac{a((E + s_1)(s_1 - s_2) \exp(s_1 t)t - (E + s_2) \exp(s_1 t))}{D(s_1 - s_2)^2} +$$

$$+ \frac{a(E + s_2) \exp(s_2 t)}{D(s_1 - s_2)^2}.$$

В этом случае также имеем $\dot{y}_k(0) = 0, \dot{y}(0) = a/D$. При $t \rightarrow +\infty$ функции $y_k(t)$ и $y(t)$ являются бесконечно малыми, причем

$$y_k(t) \sim \frac{a}{s_1 - s_2} \exp(s_1 t)t, \quad y(t) \sim \frac{a(E + s_1)}{D(s_1 - s_2)} \exp(s_1 t)t.$$

В этом случае система автоматического регулирования угла схождения также устойчива, однако второй случай не представляет практического интереса из-за постоянного изменения параметров D и E в процессе реального движения автомобиля.

Третий случай. Решая уравнение (7) по формулам Кардано [5], получим

$$s_0 = - \left(\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} \right) - \frac{A + E}{3},$$

$$v = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} \right) - \frac{A + E}{3},$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} \right).$$

Решение системы дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями (6) в этом случае имеет вид

$$y_k(t) = \frac{a(w \exp(s_0 t) - w \exp(vt) \cos(wt) + (v - s_0) \exp(vt) \sin(wt))}{w((v - s_0)^2 + w^2)},$$

$$y(t) = \frac{a(w(E + s_0) \exp(s_0 t) - w(E + s_0) \exp(vt) \cos(wt))}{Dw((v - s_0)^2 + w^2)} +$$

$$+ \frac{a((v - s_0)(E + v) + w^2) \exp(vt) \sin(wt)}{Dw((v - s_0)^2 + w^2)}.$$

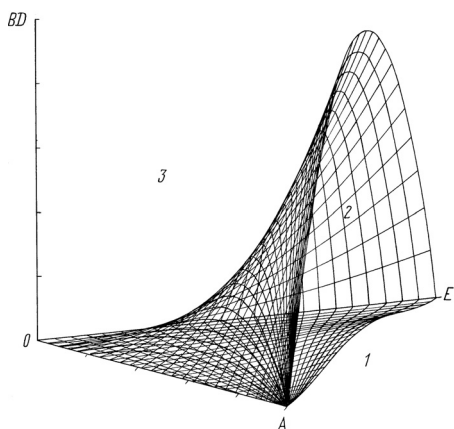


Рис. 3. Области устойчивости системы автоматического регулирования угла схождения:

1 — область устойчивости: экспоненциальный характер стабилизации; 2 — область устойчивости: колебательный характер стабилизации ($v < 0$); 3 — область расходимости процесса регулирования ($v \geq 0$)

Если $v < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$ функции $y_k(t)$ и $y(t)$ в этом случае также являются бесконечно малыми, а система автоматического регулирования угла схождения устойчива (отметим, что $Q > 0, s_0 < v$). Если же $v \geq 0$, то амплитуда колебаний стремится либо к некоторому положительному числу (при $v = 0$), либо к плюс-бесконечности (при $v > 0$).

Отметим, что неравенство $v < 0$ равносильно неравенству $BD < AE(A + E)$. Зоны устойчивости системы автоматического регулирования угла схождения представлены на рис. 3 (в координатах A, E, BD).

В заключение отметим, что проведенный анализ позволяет наилучшим образом подобрать значения параметров при конструировании системы автоматического регулирования угла схождения. Неравенство $BD < AE(A + E)$, определяющее устойчивость системы автоматического регулирования, равносильно неравенству

$$v_a > \frac{n_1 n_2}{k n_3^2} - \frac{k}{n_3 m_n}. \quad (8)$$

Если правая часть неравенства (8) отрицательна или равна нулю, то система регулирования устойчива при любой скорости движения автомобиля v_a . Если же правая часть неравенства (8) положительна, то скорость движения автомобиля должна удовлетворять этому неравенству. Таким образом, при конструировании системы автоматического регулирования угла схождения необходимо достигать неположительности правой части неравенства (8) (например, уменьшая величины n_1, n_2, m_n или увеличивая величину k). Если же это невозможно, то систему следует использовать, если скорость автомобиля v_a удовлетворяет неравенству (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рязанцев В. И., Копаев А. В. Математическая модель системы автоматического регулирования угла схождения управляемых колес автомобиля // Вестник машиностроения. – 2001. – №7. – С. 14–18.

2. Проектирование полноприводных колесных машин / Б.А. Афанасьев, Н.Ф. Бочаров, Л.Ф. Желгов и др. Под ред. А.А. Полунгяна. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 610 с.
3. Литвинов А. С. Управляемость и устойчивость автомобиля. – М.: Машиностроение, 1971. – 416 с.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.

Статья поступила в редакцию 16.10.2003

Анатолий Владимирович Копаяев родился в 1951 г., окончил в 1972 г. Орловский государственный педагогический институт. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ, в основном в области теории функций комплексного переменного и подземной гидродинамики.

A.V. Kopaev (b. 1951) graduated from the Orlovsky State Pedagogical Institute. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications, mainly, in the field of theory functions of complex variable and underground hydrodynamics.



Виктор Иванович Рязанцев родился в 1941 г., окончил в 1964 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Колесные машины” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области конструирования и расчета колесных машин.

V.I. Ryazantsev (b. 1941) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1964. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Wheeled Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of design and computation of wheeled vehicles.

УДК 531.36

А. И. И в а н о в а

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХЗВЕННОГО МАЯТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрена устойчивость вертикального положения равновесия маятника, состоящего из трех невесомых стержней одинаковой длины, которые соединены упругими шарнирами одинаковой массы с равными коэффициентами жесткости (маятник находится под действием следящей силы).

Постановка задачи. Равновесие двухзвенного маятника исследовалось в работе [1], в которой были получены условия его устойчивости. Нелинейный анализ устойчивости этого маятника приведен в работе [2]. В настоящей работе рассмотрена устойчивость положения рав-