УДК 531.36

С. А. Агафонов

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИРКУЛЯЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Исследуется влияние нелинейных диссипативных сил на устойчивость циркуляционной системы. Показано, что влияние неоднозначно: диссипативные силы могут как стабилизировать (до асимптотической устойчивости) устойчивую циркуляционную систему, так и дестабилизировать ее.

Под циркуляционной системой понимается механическая система, находящаяся под действием потенциальных и позиционных неконсервативных сил. Последние линейно зависят от координат и характеризуются кососимметрической матрицей. Влияние линейных диссипативных сил на устойчивость циркуляционной системы неоднозначно: с одной стороны, они могут стабилизировать (до асимптотической устойчивости) устойчивую циркуляционную систему, а с другой — дестабилизировать ее [1, 2]. Действие линейных диссипативных сил на циркуляционную систему приводит к так называемому “парадоксу дестабилизации”, когда граница устойчивости понижается на конечную величину.

Обстоятельный обзор этого явления содержится в работе [3]. Эффект дестабилизации сохраняется и при действии нелинейных диссипативных сил. В работе [4] исследовалось влияние этих сил на устойчивость равновесия маятника Циглера со следящей силой. Показано, что критическая величина следящей силы уменьшается на конечную величину. Аналогичный эффект был обнаружен и при рассмотрении одной континуальной системы [5].

В настоящей работе исследуется влияние нелинейных диссипативных сил на устойчивость циркуляционной механической системы с двумя степенями свободы. Задача устойчивости решается без каких-либо привязок к конкретным механическим системам.

Уравнения движения циркуляционной системы при действии диссипативных сил. Уравнения движения циркуляционной системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием нелинейных диссипативных сил, можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \lambda_1 x_1 + \mu x_2 &= -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1},\\
\ddot{x}_2 + \lambda_2 x_2 - \mu x_1 &= -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2},
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $R = \dfrac{1}{2}(\beta_1 x_1^2 \dot{x}_1^2 + \beta_2 x_2^2 \dot{x}_2^2) + \dfrac{1}{4}(\gamma_1 \dot{x}_1^4 + \gamma_2 \dot{x}_2^4), \quad \beta_i,\, \gamma_i > 0$, — функция Рэлея.

Систему (1) приведем к безразмерной форме посредством введения безразмерного времени $\tau = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} t$. Эта замена корректна, так как необходимым условием устойчивости линейной системы является неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

Система (1) примет вид

$$
\begin{aligned}
&x_1'' + kx_1 + \mu x_2 + \beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3 = 0,\\
&x_2'' + (1-k)x_2 - \mu x_1 + \beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3 = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по τ; $k = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$; обозначения для других параметров сохранены прежними.

Условием устойчивости системы (2) при отсутствии диссипативных сил $(\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0)$ является неравенство

$$
k(1-k) + \mu^2 < \frac{1}{4}. \tag{3}
$$

При выполнении неравенства (3) характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней: $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ $(i^2 = -1)$, где ω_1, ω_2 удовлетворяют уравнению частот

$$
\omega^4 - \omega^2 + k(1-k) + \mu^2 = 0.
$$

Таким образом, задача устойчивости системы (2) сводится к анализу критического случая двух пар чисто мнимых корней.

Линейная и нелинейная нормализация. Чтобы преобразовать систему (2), запишем ее в векторном виде:

$$
\begin{gathered}
x'' + Ax + F(x, x') = 0,\\
x = (x_1,\, x_2)^{\text{т}}, \quad A = \begin{pmatrix} k & \mu \\ -\mu & 1-k \end{pmatrix}, \quad F(x,\, x') = (F_1, F_2)^{\text{т}},\\
F_1 = \beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3, \quad F_2 = \beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3.
\end{gathered} \tag{4}
$$

В системе (4) сделаем замену переменных

$$
x = Ly, \quad y = (y_1,\, y_2)^{\text{т}}, \tag{5}
$$

где

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{\omega_2^2 - k} \\ \dfrac{\mu}{1 - k - \omega_1^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку линейная система является неконсервативной (матрица A не является симметрической), то для перехода к нормальным координатам необходимо провести анализ сопряженной системы $x'' + A^{\text{т}}x = 0$ и найти сопряженную матрицу L^* собственных форм. Поскольку $A^{\text{т}}$ получается из матрицы A заменой μ на $-\mu$, то и L^* имеет вид матрицы L после замены μ на $-\mu$.

Подставляя (5) в систему (4) и умножая слева на L^*, получим

$$\begin{aligned} & y'' + \Lambda y + \alpha^{-1} L^* F(Ly, Ly') = 0, \\ & \Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2), \quad \alpha = 1 - \frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2} > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В системе (6) сделаем еще одну замену переменных:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + \bar{u}_1), \quad y_1' = \frac{i\omega_1}{2}(u_1 - \bar{u}_1), \\ y_2 &= \frac{1}{2}(u_2 + \bar{u}_2), \quad y_2' = \frac{i\omega_2}{2}(u_2 - \bar{u}_2); \end{aligned} \tag{7}$$

здесь черта означает комплексное сопряжение. Система (6) примет вид

$$\begin{aligned} u_1' &= i\omega_1 u_1 + \frac{i}{\omega_1}\alpha^{-1}\Phi_1, \\ u_2' &= i\omega_2 u_2 + \frac{i}{\omega_2}\alpha^{-1}\Phi_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3 - \frac{\mu}{\omega_2^2 - k}(\beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3), \\ \Phi_2 &= \beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3 - \frac{\mu}{\omega_2^2 - k}(\beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3). \end{aligned} \tag{9}$$

В выражениях (9) необходимо сделать последовательно замены переменных (5) и (7). Уравнения для сопряженных переменных не выписаны.

Для того чтобы воспользоваться критерием Каменкова в случае двух пар чисто мнимых корней [6], необходимо в системе (8) провести нелинейную нормализацию, после которой в преобразованной системе будут присутствовать только резонансные члены. Предполагая, что отсутствует внутренний резонанс четвертого порядка $\omega_1 \neq 3\omega_2$, с помощью полиномиального преобразования

$$u_k = z_k + Z_k(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad k = 1, 2, \tag{10}$$

систему (8) можно привести к нормальной форме до членов третьего порядка включительно (присутствуют только члены тождественного резонанса):

$$\begin{aligned} z_1' &= i\omega_1 z_1 - A_{11} z_1^2 \bar{z}_1 - A_{12} z_1 z_2 \bar{z}_2, \\ z_2' &= i\omega_2 z_2 - A_{21} z_2 z_1 \bar{z}_1 - A_{22} z_2^2 \bar{z}_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{8\alpha}\left[\beta_1 + 3\gamma_1\omega_1^2 - \frac{\mu^4}{(\omega_2^2 - k)^4}(\beta_2 + 3\omega_1^2\gamma_2)\right], \\ A_{12} &= \frac{1}{4\alpha}\frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\left[\beta_1 + 3\omega_2^2\gamma_1 - (\beta_2 + 3\omega_2^2\gamma_2)\right], \\ A_{21} &= \frac{1}{4\alpha}\frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\left[\beta_2 + 3\omega_1^2\gamma_2 - (\beta_1 + 3\omega_1^2\gamma_1)\right], \\ A_{22} &= \frac{1}{8\alpha}\left[\beta_2 + 3\gamma_2\omega_2^2 - \frac{\mu^4}{(\omega_2^2 - k)^4}(\beta_1 + 3\omega_2^2\gamma_1)\right]. \end{aligned}$$

Анализ устойчивости. Рассмотрим ряд частных случаев.

Пусть $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда коэффициенты $A_{12} = A_{21}$ равны нулю. Система (11) имеет вид

$$\begin{aligned} z_1' &= i\omega_1 z_1 - \frac{1}{8}(\beta + 3\gamma\omega_1^2)\left(1 + \frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\right) z_1^2 \bar{z}_1, \\ z_2' &= i\omega_2 z_2 - \frac{1}{8}(\beta + 3\gamma\omega_2^2)\left(1 + \frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\right) z_2^2 \bar{z}_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Коэффициенты при $z_1^2\bar{z}_1$ и $z_2^2\bar{z}_2$ отрицательны, и на основании критерия Каменкова [6] система (12) асимптотически устойчива.

Отметим следующее: если на устойчивую циркуляционную систему действуют линейные диссипативные силы с равными коэффициентами диссипации, то циркуляционная система становится асимптотически устойчивой [1]. Аналогичный результат имеет место и в случае нелинейных диссипативных сил.

Рассмотрим случай $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Система (11) примет вид

$$\begin{aligned} z_1' &= i\omega_1 z_1 - \frac{1}{8\alpha}\beta_2(\beta - a) z_1^2 \bar{z}_1 - \frac{1}{4\alpha}\beta_2\frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}(\beta - 1) z_1 z_2 \bar{z}_2, \\ z_2' &= i\omega_2 z_2 + \frac{1}{4\alpha}\beta_2\frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}(\beta - 1) z_1 z_2 \bar{z}_1 - \frac{1}{8\alpha}\beta_2(1 - a\beta) z_2^2 \bar{z}_2, \end{aligned} \tag{13}$$

$$a = \frac{\mu^4}{(\omega_2^2 - k)^4} < 1, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq 1.$$

Поскольку коэффициенты при $z_1 z_2 \bar{z}_2$ и $z_1 z_2 \bar{z}_1$ имеют разные знаки, то условием асимптотической устойчивости системы (13) является положительность коэффициентов при $z_1^2 \bar{z}_1$ и $z_2^2 \bar{z}_2$ [6], т.е. неравенство

$$a < \beta < \frac{1}{a}. \tag{14}$$

При выполнении неравенств

$$0 < \beta < a \quad \text{или} \quad \beta > \frac{1}{a} \tag{15}$$

система (13) неустойчива. Это следует из существования неограниченно растущего решения по $\rho_1 \ (\rho_2 \equiv 0)$ или по $\rho_2 \ (\rho_1 \equiv 0)$. Переменные ρ_1, ρ_2 связаны с z_1, z_2 соотношениями $z_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}$, $z_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}$.

Случай $\beta_1 = \beta_2 = 0$ рассматривается аналогично. Условие асимптотической устойчивости и условия неустойчивости совпадают с неравенствами (14) и (15) при замене β на $\gamma = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Заметим, что выводы об устойчивости сохраняются и для полной нелинейной системы [7].

Из полученных результатов следует, что влияние нелинейных диссипативных сил на циркуляционную систему неоднозначно: они могут как стабилизировать до асимптотической устойчивости устойчивую циркуляционную систему, так и дестабилизировать ее. Действительно, при $\mu^4 < \left(k - \dfrac{1}{2}\right)^4$ линейная циркуляционная система устойчива, а, например, при $\beta < 1$ становится неустойчивой.

Случай внутреннего резонанса $\omega_1 = 3\omega_2$ резко усложняет задачу устойчивости и требует отдельного рассмотрения. Анализ устойчивости при этом резонансе является предметом дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов С. А. К вопросу устойчивости неконсервативных систем // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 1. – С. 47–51.
2. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
3. Сейранян А. П. Парадокс дестабилизации в неконсервативных системах // Успехи механики. – 1990. – Т. 13, № 2. – С. 89–124.
4. Hagedorn P. On the destabilizing effect of non-linear damping in non-conservative systems with follower forces // Int. J. Non-Linear Mech. – 1970. – V. 5, № 2. – P. 341–358.
5. Агафонов С. А., Георгиевский Д. В. Динамическая устойчивость стержня с нелинейной внутренней вязкостью под действием следящей силы // Докл. АН. – 2004. – Т. 396, № 3. – С. 339–342.

6. К а м е н к о в Г. В. Избранные труды. Т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

7. Х а з и н Л. Г., Ш н о л ь Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. – Пущино: Центр. биол. иссл. АН СССР, 1985. – 216 с.

Статья поступила в редакцию 25.04.2005

Сергей Алексеевич Агафонов родился в 1947 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, лауреат Премии Совета Министров РФ. Автор 60 работ по механике, устойчивости движения.

S.A. Agafonov (b. 1947) graduated from the Lomonosov Moscow State University D. Sc. (Phys.-Math.), professor, winner of the Prize of Council of Ministers of the Russian Federation. Author of 60 publications in the field of mechanics, stability of motion.