

Ольга Юрьевна Чигирева родилась в 1979 г., окончила в 2002 г. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Аспирантка кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э.Баумана.

O.Yu. Chigiryova (b. 1979) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Post-graduate of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University.

УДК 539.3+678.5

Ю. И. Димитриенко, В. В. Минин,
А. С. Корепанов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ НАГРЕВЕ

Предложена модель термомеханических процессов в композитных тонкостенных оболочках при высоких температурах с учетом эффектов термодеструкции, учитывающая межслойные и поперечные напряжения в оболочке, а также изменение свойств композита при нагреве. Разработан численный метод расчета композитных термодеструктирующих оболочек, основанный на методе конечных элементов и методе малого параметра в сочетании с пошаговым конечно-разностным методом для системы уравнений внутреннего теплопереноса. Представлен пример расчета термонапряжений в цилиндрической композитной оболочке при локальном лазерном нагреве.

Исследование эффектов взаимодействия лазерного излучения с композитными полимерными материалами в настоящее время остается достаточно актуальной проблемой. В работах [1, 2] была разработана модель четырехфазного аблирующего композита, описывающая процессы при его нагреве до высоких температур. Целью настоящей работы является применение этой модели для композитных тонкостенных оболочечных конструкций при локальном лазерном нагреве, разработка эффективного численного метода расчета термонапряжений и внутреннего теплопереноса в оболочках, а также численное исследование возможности термомеханического разрушения оболочек при относительно малых уровнях мощности локального нагрева.

Уравнения теории термодеструктирующих композитных оболочек. Согласно классификации [1] процессы абляции материалов подразделяются на поверхностные (линейный унос) и объемные (термодеструкция материала). Рассмотрим случай объемной абляции, которая реализуется в композитах при температурах 300–1500 °С.

Система уравнений теории термодеструктурирующих композитных оболочек включает в себя следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(A_\beta T_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial q_\beta}(A_\alpha T_{\alpha\beta}) - \\
 & \quad - \frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} T_{\beta\beta} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} T_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta k_\alpha Q_\alpha - A_\beta \frac{\partial P_g}{\partial q_\alpha} = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(A_\beta M_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial q_\beta}(A_\alpha M_{\alpha\beta}) - \\
 & \quad - \frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} M_{\beta\beta} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} M_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta Q_\alpha - A_\beta \frac{\partial P_g}{\partial q_\alpha} = 0, \\
 & - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) + \frac{\partial A_2 Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial A_1 Q_2}{\partial q_2} - p_e A_1 A_2 - \\
 & \quad - (k_1 + k_2) A_1 A_2 \varphi_g P_g = 0, \\
 & \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta,
 \end{aligned} \tag{1}$$

— уравнения равновесия;

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} U_\beta + k_\alpha W, \\
 2e_{\alpha 3} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} + \gamma_\alpha - k_\alpha U_\alpha, \\
 2e_{12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_2} U_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} U_2 \right), \\
 \kappa_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} \gamma_\beta, \quad 2\kappa_{\alpha 3} = -k_\alpha \gamma_\alpha, \\
 2\kappa_{12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial q_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_2} \gamma_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \gamma_2 \right), \quad \alpha = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{2}$$

— кинематические соотношения;

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\alpha} &= \sum_{\beta=1}^2 (C_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + N_{\alpha\beta} \kappa_{\beta\beta}) - P_{g\alpha} - \overset{\circ}{T}_\alpha, \\
 M_{\alpha\alpha} &= \sum_{\beta=1}^2 (N_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + D_{\alpha\beta} \kappa_{\beta\beta}) - M_{g\alpha} - \overset{\circ}{M}_\alpha, \\
 T_{12} &= 2(C_{66} e_{12} + N_{66} \kappa_{12}), \quad M_{12} = 2(N_{66} e_{12} + D_{66} \kappa_{12}), \\
 Q_\alpha &= C_{\alpha+3, \alpha+3} e_{\alpha 3}, \quad \alpha = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

— определяющие соотношения;

$$\begin{aligned}
 \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\lambda_1 \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\lambda_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\lambda_3 \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \right) + c_g R_g \left(\frac{K_1}{A_1^2} \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \frac{\partial \rho_g \theta}{\partial q_1} + \frac{K_2}{A_2^2} \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \frac{\partial \rho_g \theta}{\partial q_2} + \right. \\
 &\quad \left. + K_3 \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \frac{\partial \rho_g \theta}{\partial q_2} \right) - \Delta e^0 J, \\
 \frac{\partial \rho_g}{\partial t} &= \frac{R_g}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(K_1 \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial \rho_g \theta}{\partial q_1} \right) + \frac{R_g}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(K_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial \rho_g \theta}{\partial q_2} \right) + \\
 &\quad + R_g \frac{\partial}{\partial q_3} \left(K_3 \frac{\partial \rho_g \theta}{\partial q_3} \right) + \Gamma J, \\
 \rho_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} &= -J, \quad J = J_0 \varphi_b \exp \left(-\frac{E_a}{R_g \theta} \right), \quad p_g = R_g \rho_g \theta, \\
 \rho c &= \rho_b \varphi_b c_b + \rho_f \varphi_f c_f + \rho_p \varphi_p c_p + \rho_g \varphi_g c_g,
 \end{aligned} \tag{4}$$

— уравнения внутреннего теплопереноса в оболочке.

Здесь $T_{\alpha\alpha}$, $T_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\alpha}$, $M_{\alpha\beta}$ — усилия и моменты в оболочке; Q_α — перерезывающие усилия; P_g и M_g — усилие и момент порового давления в оболочке; $P_{g\alpha}$ и $M_{g\alpha}$ — усилие и момент межфазного взаимодействия; $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\alpha\beta}$, e_{12} — деформации срединной поверхности оболочки; $\kappa_{\alpha\alpha}$, $\kappa_{\alpha\beta}$, κ_{12} — искривления срединной поверхности; U_α , γ_α и W — перемещения, углы искривления и прогиб срединной поверхности; A_α и k_α — параметры первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки [3]; θ — температура; Δe^0 — теплота терморазложения; p_g — давление газообразных продуктов в композите; p_e — перепад давлений на оболочке; ρ_b , ρ_f , ρ_p и ρ_g — плотности полимера, волокна, коксового остатка и газа; φ_b , φ_f , φ_p и φ_g — их объемные концентрации соответственно; c_b , c_f , c_p и c_g — их теплоемкости соответственно; R_g — газовая постоянная; E_a — энергия активации процесса термодеструкции матрицы; Γ — коэффициент газификации; J — массовая скорость термодеструкции; λ_1 , λ_2 , λ_3 — коэффициенты теплопроводности композита; K_1 , K_2 , K_3 — коэффициенты газопроницаемости композита; q_1 , q_2 , q_3 — ортонормированные координаты оболочки (ось q_3 направлена по нормали); $C_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$ и $D_{\alpha\beta}$ — мембранные, смешанные и изгибные жесткости оболочки.

На поверхность оболочки $q_3 = \pm h/2$, где h — толщина оболочки, действует локальное лазерное излучение; соответствующее условие теплового баланса на поверхности оболочки для системы (4) имеет вид $q_\lambda = q_0$, где $q_\lambda = \pm \lambda_3 \partial \theta / \partial q_3$ — тепловой поток, расходуемый

на нагрев оболочки; $q_0 = (q_e + q_r - q_{rs} - q_{bl})$ — суммарный тепловой поток к поверхности; $q_e = (\alpha^T/c_p)(c_p\theta_g - c_s\theta_s)$ — конвективный тепловой поток; α^T — коэффициент теплообмена; θ_g и θ_s — температуры внешнего газового потока и поверхности композита; $q_r(q_1, q_2)$ — лучистый тепловой поток, подводимый к оболочке за счет локального лазерного нагрева; $q_{rs} = \varepsilon_s \sigma_{SB} \theta_s^4$ — тепловой поток, отдаваемый газу от нагретой поверхности твердого топлива, σ_{SB} — постоянная Стефана–Больцмана; ε_s — интегральный коэффициент излучения; $q_{bl} = -\gamma_{bl} \rho_g K_3 (\partial p_g / \partial q_3) (c_p \theta_g - c_s \theta_s)$ — конвективный тепловой поток, отводимый от поверхности вследствие вдува продуктов через поры, γ_{bl} — коэффициент вдува.

Мембранные, смешанные и изгибные жесткости оболочки $C_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$ вследствие размягчения полимерной матрицы и ее термострукции изменяются при нагреве. Это изменение для ортотропных композитных оболочек согласно модели из работы [1] описывается с помощью функций $a_{\theta 1}$, $a_{\theta 2}$:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(0)}, & N_{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(1)}, & M_{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(2)}, \\ C_{\alpha+3, \alpha+3} &= \overset{\circ}{C}_{\alpha+3, \alpha+3} a_{\theta 2}^{(0)}, & \alpha &= 1, 2, \\ a_{\theta k}^{(j)} &= \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta k} q_3^j dq_3, & k &= 1, 2, & j &= 0, 1, 2; \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $\overset{\circ}{C}_{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{D}_{\alpha\beta}$ — жесткости при нормальной температуре $\theta = \theta_0 = 293$ К. Функции $a_{\theta k} = a_{\theta k}(\theta, \varphi_b)$ зависят от температуры θ и концентрации φ_b полимера в материале; выражения для них приведены в работе [1].

Усилия и моменты тепловых напряжений $\overset{\circ}{T}_\alpha$, $\overset{\circ}{M}_\alpha$ зависят от тепловой деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha$ композита:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T}_\alpha &= \sum_{\beta=1}^3 \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta^{(0)}, & \overset{\circ}{M}_\alpha &= \sum_{\beta=1}^3 \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta^{(1)}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta^{(j)} &= \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta 1} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta q_3^j dq_3, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_3^{(j)} &= \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta 2} \overset{\circ}{\varepsilon}_3 q_3^j dq_3, & j &= 0, 1, & \alpha &= 1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_\gamma = (\alpha_f \varphi_f B_\gamma + \alpha_b \varphi_b \Omega_\gamma) (\theta - \theta_0) +$$

$$+ \alpha_p \Omega_\gamma \int_0^t (\theta(t) - \theta(\tau)) \dot{\varphi}_p d\tau - \beta_p \varphi_p \Omega_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3; \quad (7)$$

здесь α_f , α_b и α_p — коэффициенты теплового расширения волокна, полимера и коксового остатка термодеструкции полимера; β_p — коэффициент усадки; B_γ , Ω_γ — коэффициенты, зависящие от расположения волокон в композите [1];

$$\varphi_p = (\varphi_b(0) - \varphi_b(t)) \frac{\rho_b}{\rho_p} (1 - \Gamma).$$

Усилие $P_{g\alpha}$ и момент $M_{g\alpha}$ межфазного взаимодействия, а также усилие P_g и момент M_g порового давления в оболочке вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{g\alpha} &= \int_{-h/2}^{h/2} p_g f_\alpha dq_3, & M_{g\alpha} &= \int_{-h/2}^{h/2} p_g f_\alpha dq_3, \\ P_g &= \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_g p_g dq_3, & M_g &= \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_g p_g q_3 dq_3, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varphi_g = 1 - \varphi_b - \varphi_p - \varphi_f$; f_α — коэффициент межфазного взаимодействия [1].

Коэффициенты теплопроводности $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\theta, \varphi_p, \varphi_f, \varphi_g)$ являются функциями температуры и содержания фаз композита и вычисляются по формулам [1].

Коэффициенты газопроницаемости K_α вычисляются по формуле $K_\alpha = \overset{\circ}{K}_\alpha \exp(s\varphi_g^{1/3})$, где $\overset{\circ}{K}_\alpha$ и s — константы.

Вариационная постановка задачи. Вариационная постановка задачи механики (1)–(3) осуществляется с применением принципа типа Хеллингера–Рейсснера и имеет вид $\delta J_S(u, e) = 0$, где $J_S(u, e)$ — функционал вида

$$J_S(u, e) = \int_S \{e\}^T [V] [L] \{u\} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_S \{e\}^T [V] \{e\} d\Sigma + A_S^e; \quad (9)$$

здесь

$$A_S^e = - \int_{\partial S} \{\overset{\circ}{S}\} \{u\} dl - \int_S (\{\overset{\circ}{T}\} + \{F\}) \{u\} d\Sigma$$

— суммарная работа внешних сил;

$$\begin{aligned} \{u\} &= (U_1, U_2, W, \gamma_1, \gamma_2)^T, \\ \{e\} &= (e_{11}, e_{22}, e_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, e_{13}, e_{23})^T, \\ \{T\} &= (T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_1, Q_2)^T, \\ \{\dot{S}\} &= (\dot{T}_{11}, \dot{T}_{22}, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{22}, \dot{Q})^T \end{aligned} \quad (10)$$

— координатные столбцы перемещений, деформаций, усилий и заданных усилий на контуре ∂S срединной поверхности;

$$\begin{aligned} \{F\} &= \left(\frac{\partial P_g}{\partial q_1}, \frac{\partial P_g}{\partial q_2}, (k_1 + k_2)P_g, \frac{\partial M_g}{\partial q_1}, \frac{\partial M_g}{\partial q_2} \right), \\ \{\dot{T}\} &= \left(\dot{T}_{11}, \dot{T}_{22}, 0, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{22}, 0, 0, 0 \right)^T; \end{aligned} \quad (11)$$

$[V]$ — обобщенная матрица упругости размерностью 8×8 , связывающая столбцы усилий и деформаций следующим образом: $\{\dot{T}\} = [V]\{e\}$. Эта матрица имеет вид

$$[V] = \begin{pmatrix} [C] & [N] & 0 \\ [N] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [K] \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} [C] &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, & [N] &= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{12} & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{66} \end{pmatrix}, \\ [D] &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix}, & [K] &= \begin{pmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица частных производных $[L]$ размерностью 8×5 имеет вид

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & k_1 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & k_2 & 0 & 0 \\ (l_{22} - l_{21})/2 & (l_{11} - l_{12})/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{11} & l_{12} \\ 0 & 0 & 0 & l_{21} & l_{11} \\ 0 & 0 & 0 & (l_{22} - l_{21})/2 & (l_{11} - l_{12})/2 \\ -k_1/2 & 0 & l_{11}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -k_2/2 & l_{22}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

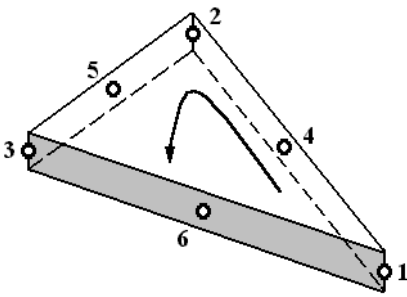


Рис. 1. Треугольный шестиузловой оболочечный конечный элемент

где $l_{\alpha\alpha} = (1/A_\alpha)(\partial/\partial q_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, $l_{12} = (1/A_1A_2)(\partial A_1/\partial q_2)$, $l_{21} = (1/A_1A_2)(\partial A_2/\partial q_1)$ — дифференциальные операторы. Полагая вариации $\delta\{u\}$ и $\delta\{e\}$ независимыми, получаем из уравнения (9) две группы вариационных уравнений:

$$\int_S \{e\}^T [D][L]\delta\{u\}d\Sigma + \delta A_\Sigma^e = 0, \quad (14)$$

$$\int_S \delta\{e\}^T [D]([L]\{u\} - \{e\})d\Sigma = 0. \quad (15)$$

Метод конечного элемента для расчета термонапряжений в композитных оболочках. Решение вариационных уравнений (10) найдем методом конечного элемента на основе треугольного оболочечного шестиузлового конечного элемента (рис. 1) с независимой аппроксимацией перемещений и деформаций в нем:

$$\{u\} = [\Phi]\{v\}, \quad \{e\} = [\omega]\{b\}, \quad (16)$$

где $\{v\}$ — столбец перемещений в узлах размерностью 30×1 ; $\{b\}$ — столбец деформаций в узлах размерностью 24×1 , $[\Phi]$, $[\omega]$ — матрицы функций формы размерностями 5×30 и 8×24 . Подставляя решение (16) в систему (14), (15), получаем уравнения для нахождения $\{v\}$ и $\{b\}$:

$$[G][H]^{-1}[G]\{v\} + \{f\} = 0, \quad \{b\} = [H]^{-1}[G]^T\{v\}; \quad (17)$$

здесь

$$[G] = \int_S [\omega]^T [V][B]d\Sigma, \quad [H] = \int_S [\omega]^T [V][\omega]d\Sigma, \quad (18)$$

$$\{f\} = - \int_S (\{\dot{T}\} + \{F\})d\Sigma - \int_{\delta S} \{\dot{S}\}dl, \quad [B] = [L][\Phi].$$

Матрица функций формы $[\Phi]$ размерностью 5×30 в блочном виде представляется следующим образом:

$$[\Phi] = [\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \dots, \Phi_{(6)}], \quad (19)$$

где $\Phi_{(i)} = \zeta_i[E]$; E — единичная матрица размерностью 5×5 ; $\zeta_i, i = 1, 2, \dots, 6$, — квадратичные функции формы, для представления которых воспользуемся естественными безразмерными (барицентричными) координатами:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= L_1(2L_1 - 1), & \zeta_2 &= L_2(2L_2 - 1), & \zeta_3 &= L_3(2L_3 - 1), \\ \zeta_4 &= 4L_1L_2, & \zeta_5 &= 4L_2L_3, & \zeta_6 &= 4L_3L_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Нумерация функций формы соответствует нумерации узлов элемента. Естественные координаты L_i определяются через координаты q_1, q_2 оболочки следующим образом:

$$L_i = \frac{1}{2S}(a_{(i)} + b_{(i)}q_1 + c_{(i)}q_2), \quad i = 1, 2, 3; \quad (21)$$

здесь

$$\begin{aligned} a_{(1)} &= q_{1(2)}q_{2(3)} - q_{1(3)}q_{2(2)}, & b_{(1)} &= q_{2(2)} - q_{2(3)}, \\ c_{(1)} &= q_{1(3)} - q_{1(2)}, & 2S &= b_{(1)}c_{(2)} - b_{(2)}c_{(1)}; \end{aligned} \quad (22)$$

$q_{1(i)}, q_{2(i)}, i = 1, 2, 3$, — координаты узлов треугольного конечного элемента, выражения для остальных коэффициентов $a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}$ получаются при круговой перестановке индексов, заключенных в круглые скобки.

Матрица функций формы $[\omega]$ имеет блочную диагональную структуру:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Матрица $[B]$ имеет размерность 8×30 , и с учетом блочной структуры матрицы функций форм $[\Phi]$ ее можно представить в виде $[B] = [B_{(1)}, B_{(2)}, \dots, B_{(6)}]$, где матричные блоки $B_{(i)}, i = 1, 2, \dots, 6$, размерностью 8×5 определяются соотношением $B_{(i)} = [L]\Phi_{(i)}$. Подставляя выражение (13) в это соотношение, получаем

$$B_{(i)} = \begin{bmatrix} Z_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{yi} & 0 & 0 & 0 \\ Z_{yi} & Z_{xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & Z_{yi} & Z_{xi} \\ 0 & 0 & Z_{xi} & \zeta_i & 0 \\ 0 & 0 & Z_{yi} & 0 & \zeta_i \end{bmatrix}; \quad (24)$$

здесь

$$\begin{aligned}
 Z_{xi} &= \frac{b^{(i)}}{2S}(4L_i - 1), & Z_{yi} &= \frac{c^{(i)}}{2S}(4L_i - 1), \\
 Z_{x4} &= \frac{2}{S}(b_{(1)}L_2 + b_{(2)}L_1), & Z_{y4} &= \frac{2}{S}(c_{(1)}L_2 + c_{(2)}L_1), \\
 Z_{x5} &= \frac{2}{S}(b_{(2)}L_3 + b_{(3)}L_2), & Z_{y5} &= \frac{2}{S}(c_{(2)}L_3 + c_{(3)}L_2), \\
 Z_{x6} &= \frac{2}{S}(b_{(3)}L_1 + b_{(1)}L_3), & Z_{y6} &= \frac{2}{S}(c_{(3)}L_1 + c_{(1)}L_3),
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Матрица H размерностью 24×24 для выбранного конечного элемента имеет следующий вид:

$$H = \int_S \begin{bmatrix} L_1L_1[D] & L_1L_2[D] & L_1L_3[D] \\ L_1L_2[D] & L_2L_2[D] & L_2L_3[D] \\ L_1L_3[D] & L_2L_3[D] & L_3L_3[D] \end{bmatrix} d\Sigma. \quad (25)$$

Для решения линейных уравнений (17) применялись метод Холецкого и метод сопряженного градиента.

Метод решения уравнений тепломассопереноса в оболочке. Для решения системы уравнений тепломассопереноса (4) применим следующий метод. Введем малый параметр $\beta = h/l_0 \ll 1$, где h — толщина оболочки, l_0 — характерная длина оболочки, а также введем “быструю” координату $\xi = \bar{q}_3/\beta$ и “медленные” координаты $\bar{q}_I = q_I A_I^0/l_0$, $\bar{q}_3 = q_3/l_0$, $I = 1, 2$, где A_I^0 — характерные значения коэффициентов первой квадратичной формы координатной поверхности A_I . Рассмотрим далее только такой случай нагрева оболочки, при котором все внешние источники теплоты являются функциями только “медленных” координат \bar{q}_α . Таким образом, полагаем, что лучистый тепловой поток q_r , обусловленный лазерным нагревом, имеет вид

$$q_r = q_r^0 \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right), \quad r = \sqrt{\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2}, \quad (26)$$

где δ — эффективный безразмерный радиус пятна нагрева (величина порядка единицы).

Тогда все функции в системе (4) можно рассматривать как функции вида

$$f(q_\alpha) = f(\bar{q}_I, \xi), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad I = 1, 2. \quad (27)$$

Введем в рассмотрение характерные значения плотности ρ_0 , теплоемкости c_0 , температуры θ_0 , теплопроводности λ_0 , газопроницаемости

K_0 , скорости тепломассопереноса J_0 , а также соответствующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_0}, \quad \bar{c}_i = \frac{c_i}{c_0}, \quad \bar{\lambda}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_0}, \quad \bar{K}_\alpha = \frac{K_\alpha}{K_0}, \\ \bar{J} &= \frac{J}{J_0}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0 h}{\lambda_0 \theta_0}, \quad \bar{p}_e = \frac{p_e}{\rho_0 R \theta_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда систему уравнений тепломассопереноса (4) в безразмерном виде можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial \bar{t}} &= \frac{F_r \beta^2}{\bar{A}_1 \bar{A}_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{q}_1} \left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1} \bar{K}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{q}_2} \left(\frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_2} \bar{K}_2 \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_2} \right) \right) + \\ &\quad + F_r \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{K}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{\theta}}{\partial \xi} \right) + F_g \Gamma \bar{J}, \\ \bar{\rho} \bar{c} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} &= \frac{F_0 \beta^2}{\bar{A}_1 \bar{A}_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{q}_1} \left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1} \bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{q}_2} \left(\frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_2} \bar{\lambda}_2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_2} \right) \right) + \\ &\quad + F_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{\lambda}_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} \right) + \beta^2 F_r \bar{c}_g \left(\frac{\bar{K}_1}{\bar{A}_1^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_1} + \frac{\bar{K}_2}{\bar{A}_2^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_2} \right) + \\ &\quad + F_r \bar{c}_g \bar{K}_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{\theta}}{\partial \xi} + F_t F_g \bar{J}, \\ \bar{\rho}_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial \bar{t}} &= -F_g \bar{J}, \end{aligned} \quad (29)$$

где
$$F_0 = \frac{\lambda_0 t_0}{\rho_0 c_0 h^2}, \quad F_r = \frac{k_0 R \theta_0 t_0}{h^2}, \quad F_g = \frac{J_0 t_0}{\rho_0}, \quad F_t = \frac{\Delta e^0}{c_0 \theta_0}$$

— безразмерные параметры (критерии).

Граничные и начальные условия, налагаемые на систему (29), в безразмерном виде имеют вид

$$\begin{aligned} q_3 &= \pm \frac{h}{2}: \quad \bar{\lambda}_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} = \bar{q}_0, \quad \bar{\rho}_g \bar{\theta} = p_e, \\ t = 0: \quad \bar{\rho}_i &= \bar{\rho}_{i0}, \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}_0, \quad \varphi_i = \varphi_{i0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассматриваемый случай, когда решением системы (29) являются функции $\bar{\rho}_g$, $\bar{\theta}$ и ρ , зависящие от \bar{q}_1 , ξ и t , реализуется при следующих условиях, налагаемых на безразмерные параметры:

$$F_0 = O(1), \quad F_r = O(1), \quad F_g = O(1), \quad F_t = O(1), \quad (31)$$

где запись $O(1)$ означает, что величина имеет порядок единицы.

Тогда решение задачи (29), (30) можно найти в виде разложения по малому параметру:

$$\bar{f} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} f^{(\gamma)}(\bar{q}_I, \xi) \chi^{2\gamma}, \quad I = 1, 2, \quad f = (\bar{\theta}, \bar{\rho}_g, \bar{\rho}_i). \quad (32)$$

Подставляя это разложение в систему (29), (30) и собирая члены при одинаковых степенях χ , получим при $\chi = 0$ следующую систему:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{(0)} \bar{c}^{(0)} \frac{\partial \bar{\theta}^{(0)}}{\partial \bar{t}} &= F_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{\lambda}_3^{(0)} \frac{\partial \bar{\theta}^{(0)}}{\partial \xi} \right) + F_i F_g \bar{J}^{(0)} + \\ &+ F_r \bar{c}_g \bar{K}_3^{(0)} \frac{\partial \bar{\theta}^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\rho}_g^{(0)} \bar{\theta}^{(0)}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \bar{\rho}_g^{(0)}}{\partial \bar{t}} &= F_r \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{K}_3^{(0)} \frac{\partial \bar{\rho}_g^{(0)} \bar{\theta}^{(0)}}{\partial \xi} \right) + F_g \bar{J}^{(0)}, \\ \bar{\rho}_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial \bar{t}} &= -F_g \bar{J}, \\ \xi = \pm \frac{1}{2}: \quad \bar{\lambda}_3^{(0)} \frac{\partial \bar{\theta}^{(0)}}{\partial \xi} &= \bar{q}_e, \quad \bar{\rho}_g^{(0)} \bar{\theta}^{(0)} = \bar{p}_e. \end{aligned} \quad (33)$$

Эта система зависит от координат \bar{q}_I только параметрически, поскольку от них зависят функции \bar{q}_e и \bar{p}_e . Для рассматриваемой здесь задачи достаточно ограничиться нулевым приближением, хотя задачи при степенях χ^2, χ^4, \dots имеют подобный вид и решаются так же, как и задачи нулевого приближения.

Для численного решения задачи (33) был применен пошаговый метод с неявной конечно-разностной схемой. Для решения системы линейных алгебраических уравнений был применен метод матричной прогонки. После определения полей температуры $\bar{\theta}^{(0)}(q_\alpha, \xi, t)$, концентраций $\varphi_p(q_\alpha, \xi, t)$, $\varphi_g(q_\alpha, \xi, t)$ и плотности $\bar{\rho}^{(0)}(q_\alpha, \xi, t)$ рассчитывалось поровое давление $p_g = R \rho_g^{(0)} \theta^{(0)}$ и тепловые деформации композита по формулам (6), (7), усилия и моменты по формуле (8) и изменение жесткостей оболочки при нагреве по формулам (5). Затем определялись перемещения $\{v\}$ и деформации $\{e\}$ в конечном элементе.

Расчет усилий, моментов и напряжений в оболочке. Усилия и моменты в оболочке определялись по формуле $\{T\} = [V]\{e\} - \{\overset{\circ}{T}\}$. Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ после этого вычислялись обычным образом: $\sigma_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}/h$. Для расчета межслойных $\sigma_{\alpha 3}$ и поперечных σ_{33} напряжений в оболочке применялась следующая аппроксимация:

$$\sigma_{\alpha 3} = \psi_\alpha(q_1, q_2) \eta(q_3), \quad \sigma_{33} = -p^- - (p^+ - p^-) \xi + \psi_3(q_1, q_2) \eta(q_3), \quad (34)$$

$$\xi(q_3) = \frac{1}{2} - \frac{q_3}{h}, \quad \eta(q_3) = \frac{1}{4} - \left(\frac{q_3}{h} \right)^2, \quad \alpha = 1, 2,$$

где p^+ , p^- — давления на внешних поверхностях оболочки ($p^+ - p^- = p_e$).
Функции ψ_α , ψ_3 определялись из интегральных соотношений оболочки при сдвиге и поперечном растяжении:

$$\psi_\alpha = 12C_{\alpha+3, \alpha+3}e_{\alpha 3}, \quad \psi_3 = 6(C_{13}e_{13} + C_{23}e_{23}) + 3(p^+ + p^-). \quad (35)$$

Результаты расчетов. Численные расчеты были проведены для цилиндрической оболочки, для которой индекс $\alpha = 1$ соответствует направлению вдоль оси симметрии, а индекс $\alpha = 2$ — окружному направлению. Был рассмотрен случай локального лазерного нагрева оболочки, при котором максимальная плотность мощности нагрева составляла $q_{r \max} = 35 \text{ кВт/м}^2$. Характеристики композита были выбраны следующими [1]: $\overset{\circ}{C}_{11} = \overset{\circ}{C}_{22} = 20 \text{ ГПа}$, $\overset{\circ}{C}_{13} = \overset{\circ}{C}_{23} = 2,2 \text{ ГПа}$, $\overset{\circ}{C}_{44} = 4,2 \text{ ГПа}$; $\alpha_f = 2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\alpha_b = 20 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\alpha_p = 2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$; $\beta_p = 0,1$; $\varphi_f = 0,5$; длина оболочки $l_0 = 1 \text{ м}$; радиус оболочки $R = 0,2 \text{ м}$; радиус пятна нагрева $0,02 \text{ м}$.

Максимальная температура нагрева составляла 567°C . На рис. 2 представлены некоторые результаты расчетов термонапряжений в композитной цилиндрической оболочке в момент времени $t = 1 \text{ с}$ нагрева. Результаты расчетов показывают, что при сравнительно невысоком уровне лазерного нагрева напряжениями, при которых наиболее возможно разрушение (расслоение) материала, являются межслойные напряжения σ_{13} , их максимальные значения в зоне пятна нагрева составляют $0,48 \text{ МПа}$. Учитывая, что прочность композита при межслойном сдвиге для рассматриваемой температуры составляет примерно $0,5 \text{ МПа}$ [1], приходим к выводу, что указанные напряжения будут приводить к расслоению композитной оболочки. Этот вывод согласуется с результатами расчетов из работы [2], проведенных для плоской пластины.

Таким образом, сравнительно невысокие плотности мощности нагрева, при которых не успевают реализоваться процессы уноса, испарения, поверхностной абляции композита, могут приводить к термомеханическому разрушению композитных конструкций из-за их достаточно низкой межслойной прочности при высоких температурах. Значения максимальных сдвиговых напряжений зависят от характеристик композита и геометрии оболочки, их величина может быть оценена с помощью разработанной выше методики.

Выводы. Разработана модель термомеханических процессов в композитных тонкостенных оболочках при высоких температурах с учетом эффектов термодеструкции. Модель учитывает межслойные и поперечные напряжения в оболочке, а также изменение свойств композита при нагреве.

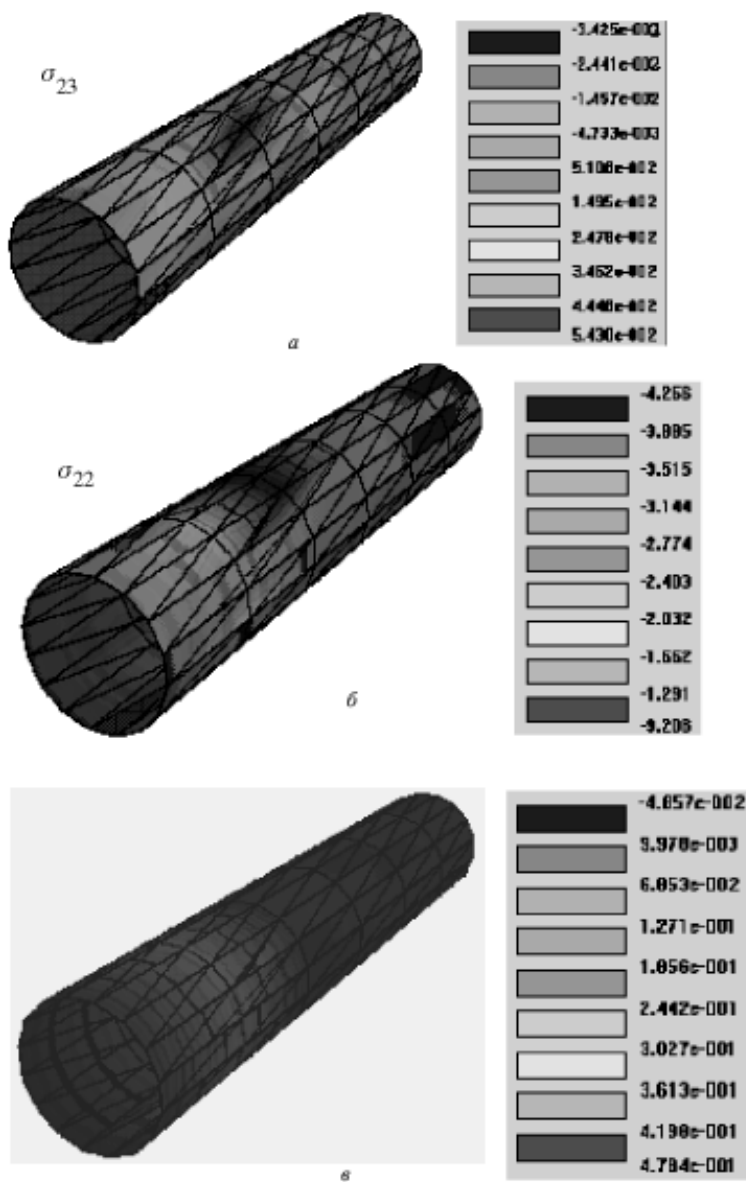


Рис. 2. Распределение напряжений (в МПа) σ_{23} (а), σ_{22} (б), σ_{13} (в) в композитной оболочке при локальном лазерном нагреве в момент времени $t = 1$ с

Разработан численный метод решения задачи расчета термонапряжений внутреннего теплопереноса в композитных термодеструктурирующих оболочках, основанный на методе конечных элементов для задачи теории оболочек и методе малого параметра в сочетании с пошаговым конечно-разностным методом для системы уравнений внутреннего теплопереноса.

Проведены расчеты термонапряжений в цилиндрической композитной оболочке при локальном лазерном нагреве, которые показали, что

из-за достаточно низкой межслойной прочности композитов при высоких температурах даже при сравнительно невысокой плотности мощности нагрева может происходить термомеханическое разрушение композитных конструкций. Значения максимальных сдвиговых напряжений могут быть оценены с помощью разработанной выше методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997.
2. D i m i t r i e n k o Y u. I. Thermomechanical behaviour of composites under local intense heating by irradiation // Composites. Part A. – 2000. – V. 31. – P. 591–598.
3. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Высшая школа, 2001.

Статья поступила в редакцию 27.09.2004

Юрий Иванович Димитриенко родился в 1962 г., окончил в 1984 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, академик РАИИ. Автор более 100 научных работ в области вычислительной механики, нелинейного тензорного анализа, термомеханики, композитов, математического моделирования в материаловедении.

Yu. I. Dimitrienko (b. 1962) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1984. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Computing Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University, full member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of more than 100 publications in the field of computing mechanics, nonlinear tensor analysis, thermal mechanics of composites, mathematical simulation in science of materials.



Валерий Владимирович Минин родился в 1978 г., окончил в 2001 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ассистент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ по численным методам теории композитных оболочек.

V.V. Minin (b. 1978) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2001. Assistant of “Computing Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of publications in the field of numerical methods in theory of composite shells.

Андрей Сергеевич Корепанов родился в 1979 г., окончил в 2002 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ по применению метода конечных элементов для решения задач механики.

A.S. Korepanov (b. 1979) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Post-graduate of “Computing Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of publications in the field of application of the finite element method for solving problems in mechanics.