УДК 536.02

О. Ю. Чигирева

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ СЛОЯ ТЕРМОИЗОЛЯЦИИ В МНОГОСЛОЙНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ

Решена задача о нахождении оптимальной толщины слоя термоизоляции в многослойном цилиндрическом пакете, при которой обеспечивается значение температуры внутренней граничной поверхности пакета, не превышающее заданного предельного значения. Предложена методика расчета нестационарного температурного поля в многослойном цилиндрическом пакете, в которой учитывается зависимость теплофизических свойств материалов слоев от температуры.

Постановка задачи. Рассматривается нестационарный процесс теплопроводности в цилиндрическом пакете (рис. 1). Пакет состоит из двух металлических оболочек, разделенных слоем термоизоляции толщиной h_2. На внешнюю металлическую стенку нанесен слой теплозащитного покрытия (ТЗП), поверхность которого подвержена интенсивному нагреву газовым потоком, приводящему к уносу массы с поверхности. При этом величина плотности потока энергии, поглощенной поверхностью ТЗП, определяется соотношением [1]

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \rho H v.$$

Здесь T — температура; ρ — плотность; λ – коэффициент теплопроводности; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности; H — тепловой эффект процесса разрушения; v — скорость разрушения нагреваемой поверхности [1]:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{E}{T_w}\right),$$

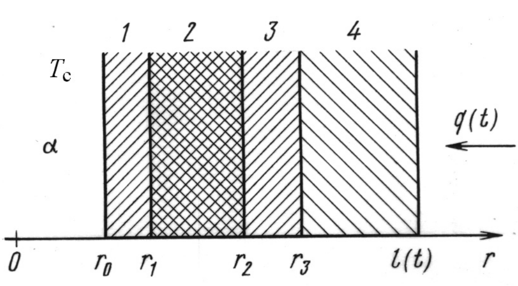

Рис. 1. Осевое сечение многослойного цилиндрического пакета:
1, 3 — металлические оболочки, *2* — слой термоизоляции, *4* — слой теплозащитного покрытия; T_c — температура внешней среды

где E — величина, определяемая энергией активации процесса разрушения; T_w — температура нагреваемой поверхности.

Охлаждение многослойного пакета происходит на внутренней металлической стенке по закону Ньютона.

Под оптимальной толщиной слоя термоизоляции в многослойном пакете будем понимать такую его толщину, при которой обеспечивается нагрев внутренней граничной поверхности пакета до температуры, не превышающей заданного предельного значения $T_{\text{п}}$ [2].

В данной постановке задачи будем полагать, что тепловые контакты между слоями являются неидеальными [3], а теплофизические свойства материалов слоев зависят от температуры.

Рассматриваемая задача относится к классу краевых задач нестационарной теплопроводности с подвижной границей, при этом движение границы фронта разрушения теплозащитного покрытия определяется в процессе решения задачи.

Нахождение оптимальной толщины слоя термоизоляции осуществляется в два этапа:

1) определяется температура многослойного цилиндрического пакета при различных значениях h_2;

2) выбирается наименьшее значение $h_2 = h_*$, удовлетворяющее следующему условию: температура внутренней поверхности оболочки должна оставаться ниже некоторого заданного значения $T_{\text{п}}$ в конце процесса разогрева, когда толщина неразрушенной части ТЗП составляет приблизительно 10 % от первоначальной.

Математическая модель процесса. В данной постановке задачи приходим к следующей математической модели:

$$\rho_j c_j(T_j)\frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_j(T_j) r \frac{\partial T_j}{\partial r}\right),$$

$$t > 0, \quad r_{j-1} < r < r_j \equiv r_{j-1} + h_j, \quad j = \overline{1,3}; \tag{1}$$

$$\rho_4 c_4(T_4)\frac{\partial T_4}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_4(T_4) r \frac{\partial T_4}{\partial r}\right), \quad t > 0, \quad r_3 < r < l(t);$$

$$\begin{aligned} &T_j\,(r,0) = T_0, \quad r_{j-1} \le r \le r_j, \quad j = \overline{1,3}; \\ &T_4(r,0) = T_0, \quad r_3 \le r \le l_0, \quad l_0 = l(0); \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = \alpha(T_1(r_0,t) - T_{\text{c}}), \quad t \geq 0;\\ \lambda_4(T_4)\frac{\partial T_4}{\partial r}\bigg|_{r=l(t)} = q(t) - \rho_4 H v(T_w), \quad t \geq 0;\\ \lambda_j(T_j)\frac{\partial T_j}{\partial r}\bigg|_{r=r_j-0} = \frac{1}{R_j}(T_{j+1}(r_j+0,\, t) - T_j(r_j-0,\, t)) =\\ = \lambda_{j+1}(T_{j+1})\frac{\partial T_{j+1}}{\partial r}\bigg|_{r=r_j+0}, \quad t \geq 0, j = \overline{1,3}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $T_1(r,t)$ и $T_3(r,t)$ — температуры металлических оболочек; $T_2(r,t)$ и $T_4(r,t)$ — температуры слоя термоизоляции и теплозащитного покрытия соответственно; T_0 — начальная температура; T_{c} — температура внешней среды; c_j, $j = \overline{1,4}$, — удельная теплоемкость слоя j; r_0 — внутренний радиус металлической оболочки; h_1, h_3 — толщины металлических оболочек; α — коэффициент теплоотдачи; R_j — термическое сопротивление контактной поверхности $r = r_j$, $j = \overline{1,3}$; $l(t)$ — положение фронта разрушения теплозащитного покрытия, определяемое соотношением

$$l(t) = l_0 - \int\limits_0^t v(T_w)d\tau,$$

где

$$T_w(t) = T_4(l(t),t), \quad l_0 = r_0 + \sum_{i=1}^{4} h_i;$$

h_4 — толщина ТЗП в начальный момент времени.

Построение алгоритма приближенного решения. Для нахождения приближенного аналитического решения краевой задачи (1)–(3) воспользуемся методикой, изложенной в работах [4, 5]. Проведем дискретизацию временно́й переменной t точками $t_k = k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\tau > 0$ — достаточно малый шаг разбиения, и заменим в уравнениях (1) производные по времени конечно-разностными отношениями

$$\frac{\partial T_j}{\partial t}\bigg|_{t=t_k} \approx \frac{T_j(r,t_k) - T_j(r,t_{k-1})}{\tau}, \quad j = \overline{1,\, 4}.$$

Далее введем функции $C_j(T_j, r) = \rho_j r c_j(T_j)$, $\Lambda_j(T_j, r) = r\lambda_j(T_j)$, $j = \overline{1,4}$, и, полагая, что все нелинейные теплофизические параметры найдены на предыдущем временно́м слое $t = t_{k-1}$, представим разностно-дифференциальный аналог краевой задачи (1)–(3) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
-\frac{d}{dr}\left(\Lambda_j^{(k)}(r)\frac{dT_j^{(k)}}{dr}\right)+\frac{1}{\tau}C_j^{(k)}(r)T_j^{(k)}(r)=\frac{1}{\tau}C_j^{(k)}(r)T_j^{(k-1)}(r),\\
r_{j-1}<r<r_j,\qquad j=\overline{1,3};\\
-\frac{d}{dr}\left(\Lambda_4^{(k)}(r)\frac{dT_4^{(k)}}{dr}\right)+\frac{1}{\tau}C_4^{(k)}(r)T_4^{(k)}(r)=\frac{1}{\tau}C_4^{(k)}(r)T_4^{(k-1)}(r),\\
r_3<r<l^{(k)};
\end{gathered}
\tag{4}
$$

$$
\begin{gathered}
\Lambda_1^{(k)}(r)\frac{dT_1^{(k)}}{dr}=Q_0^{(k)}\ \text{ при }\ r=r_0;\\
\Lambda_4^{(k)}(r)\frac{dT_4^{(k)}}{dr}=Q_4^{(k)}\ \text{ при }\ r=l^{(k)};\\
\Lambda_j^{(k)}(r)\frac{dT_j^{(k)}}{dr}=Q_j^{(k)}\ \text{ при }\ r=r_j,\ \ j=\overline{1,\,3};\\
\Lambda_{j+1}^{(k)}(r)\frac{dT_{j+1}^{(k)}}{dr}=Q_j^{(k)}\ \text{ при }\ r=r_j,\ \ j=\overline{1,\,3};
\end{gathered}
\tag{5}
$$

здесь

$$
\begin{gathered}
T_j^{(k)}(r)=T_j(r,t_k),\quad j=\overline{1,\,4};\\
\Lambda_j^{(k)}(r)=\Lambda_j(T_j^{(k-1)}(r),r),\ \ C_j^{(k)}(r)=C_j(T_j^{(k-1)}(r),r),\ \ j=\overline{1,\,4};\\
l^{(k)}=l^{(k-1)}-v(T_w^{(k-1)})\tau;\\
Q_0^{(k)}=\alpha r_0(T_1^{(k-1)}(r_0)-T_\text{c}),\quad Q_4^{(k)}=l^{(k)}(q^{(k-1)}-\rho_4Hv(T_w^{(k-1)})),\\
Q_j^{(k)}=\frac{r_j}{R_j}(T_{j+1}^{(k-1)}(r_j)-T_j^{(k-1)}(r_j)),\quad j=\overline{1,\,3}.
\end{gathered}
$$

На первом шаге итерации величину $l^{(0)}$ следует считать равной значению l_0, а величины $T_j^{(0)}(r)$, $j=\overline{1,\,4}$, равными начальной температуре T_0 из условий (2).

Применяя метод конечных интегральных преобразований, на k-м шаге итерации найдем функции $T_j^{(k)}(r)$, $j=\overline{1,\,4}$, в форме разложения в тригонометрические ряды Фурье

$$T_j^{(k)}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_{j,n}^{(k)} X_{j,n}(r), \quad r_{j-1} < r < r_j, \quad j = \overline{1,\,3},$$
$$T_4^{(k)}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n b_n^{(k)} Y_n^{(k)}(r), \quad r_3 < r < l^{(k)}, \tag{6}$$
$$\delta_n = \begin{cases} 0{,}5 \ \text{при} \ n = 0, \\ 1 \ \text{при} \ n > 0, \end{cases}$$

по ортогональным системам функций

$$X_{j,n}(r) = \cos\frac{n\pi\,(r - r_{j-1})}{h_j}, \quad j = \overline{1,\,3},$$
$$Y_n^{(k)}(r) = \cos\frac{n\pi\,(r - r_3)}{d^{(k)}},$$

где $d^{(k)} = l^{(k)} - r_3$ — толщина ТЗП при $t = t_k$.

Тогда с учетом граничных условий (5) приходим к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье $a_{j,n}^{(k)}$, $j = \overline{1,\,3}$, и $b_n^{(k)}$ [5]:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{j,nm}^{(k)} \delta_m a_{j,m}^{(k)} = f_{j,n}^{(k)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad j = \overline{1,\,3};$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{nm}^{(k)} \delta_m b_m^{(k)} = g_n^{(k)}, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{7}$$

здесь

$$A_{j,nm}^{(k)} = \frac{\pi^2 nm}{4h_j}\left(\varphi_{j,n-m}^{(k)} - \varphi_{j,n+m}^{(k)}\right) + \frac{h_j}{4\tau}\left(\psi_{j,n-m}^{(k)} + \psi_{j,n+m}^{(k)}\right),$$

$$f_{j,n}^{(k)} = (-1)^n Q_j^{(k)} - Q_{j-1}^{(k)} + \frac{h_j}{4\tau}\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m a_{j,m}^{(k-1)}\left(\psi_{j,n-m}^{(k)} + \psi_{j,n+m}^{(k)}\right),$$

$$B_{nm}^{(k)} = \frac{\pi^2 nm}{4d^{(k)}}\left(\xi_{n-m}^{(k)} - \xi_{n+m}^{(k)}\right) + \frac{d^{(k)}}{4\tau}\left(\eta_{n-m}^{(k)} + \eta_{n+m}^{(k)}\right),$$
$$g_n^{(k)} = (-1)^n Q_4^{(k)} - Q_3^{(k)} + \frac{d^{(k)}}{2\tau}\zeta_n^{(k)};$$

$\varphi_{j,n}^{(k)}$, $\psi_{j,n}^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функций $\Lambda_j^{(k)}(r)$, $C_j^{(k)}(r)$ по ортогональной системе $\left\{X_{j,n}(r)\right\}_{n=0}^{\infty}$, $j = \overline{1,\,3}$; $\xi_n^{(k)}$, $\eta_n^{(k)}$, $\zeta_n^{(k)}$ — коэффициенты

Фурье функций $\Lambda_4^{(k)}(r)$, $C_4^{(k)}(r)$, $\Theta^{(k)}(r) = C_4^{(k)}(r)T_4^{(k-1)}(r)$ по ортогональной системе $\left\{Y_n^{(k)}(r)\right\}_{n=0}^{\infty}$.

В силу того, что матрицы $\mathbf{A}_j^{(k)}$, $j = \overline{1,3}$, и $\mathbf{B}^{(k)}$ систем (7) являются симметрическими положительно определенными [6], приближенные решения этих систем могут быть найдены методом редукции из систем конечного порядка [7].

Построенный алгоритм (6), (7) нахождения приближенного аналитического решения задачи (1)–(3) позволяет провести расчеты температурного поля в многослойном цилиндрическом пакете.

Результаты численных расчетов. Приведем пример расчета температурного поля в многослойном цилиндрическом пакете при следующих значениях параметров: $\rho_1 = \rho_3 = 2670\,$кг/м^3; $\rho_2 = 200\,$кг/м^3; $\rho_4 = 1300\,$кг/м^3; $\lambda_2(T) = (0{,}062 + 0{,}263 \cdot 10^{-3}T)\,$Вт/(м·K); $c_2(T) = (930 + 0{,}12T)$ Дж/(кг · K); $\alpha = 400\,$Вт/(м^2 · K); $R_1 = R_2 = 9{,}6 \times 10^{-4}\,$м^2 · K/Вт; $R_3 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$м^2 · K/Вт; $T_0 = 290\,$K; $T_{\text{c}} = 290\,$K; $T_{\text{п}} = 300\,$K; $q = 10^6\,$Вт/м^2; $E = 2000\,$K; $H = 1{,}5\,$МДж/кг; $v_0 = 0{,}002\,$м/с; $r_0 = 0{,}7\,$м; $h_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-3}\,$м; $h_3 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,$м; $h_4 = 40 \times 10^{-3}\,$м [8, 9].

Значения теплофизических параметров металлических оболочек и теплозащитного покрытия в зависимости от температуры приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Параметры материала оболочек

T, K	300	400	500	600	700	800	900
$\lambda_{1,3}$, Вт/(м · K)	207	213	222	233	251	271	282
$c_{1,3}$, Дж/(кг · K)	871	938	999	1053	1079	1118	1145

Таблица 2

Параметры теплозащитного покрытия

T, K	300	500	700	900	1100	1300	1500
λ_4, Вт/(м · K)	1,50	1,56	1,70	1,86	2,06	2,30	2,56
c_4, Дж/(кг · K)	1500	1511	1534	1567	1611	1666	1732

Как показали расчеты, при выборе толщины слоя термоизоляции $h_2 \geq 5{,}5 \cdot 10^{-3}\,$м температура внутренней граничной поверхности пакета в конце процесса разогрева не превосходит заданного предельного значения $T_{\text{п}} = 300\,$K. При $h_* = 5{,}5 \cdot 10^{-3}\,$м продолжительность процесса разогрева, при котором толщина неразрушенной части ТЗП составляет $4{,}5 \cdot 10^{-3}\,$м, равна $t = 95\,$с (рис. 2). Зависимость скорости

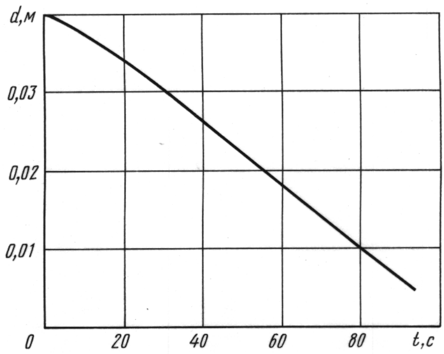

Рис. 2. Зависимость толщины неразрушенной части ТЗП от времени

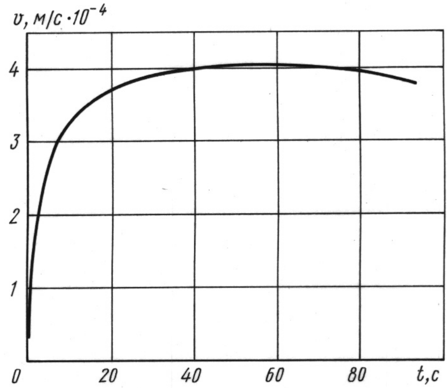

Рис. 3. Зависимость скорости разрушения ТЗП от времени

разрушения ТЗП от времени приведена на рис. 3. В момент времени $t = 95$ с распределения температуры в металлических оболочках *1* и *3* представляют собой линейные профили с перепадами температур порядка 15 K, а температура поверхности ТЗП достигает значения 1200 K (рис. 4).

Выбор шага дискретизации осуществлялся на основе сравнения результатов расчета температуры на поверхности металлического слоя при двух значениях шага τ_1 и $\tau_2 = \tau_1/2$, при которых обеспечивается выполнение условия

$$\frac{|T_{\tau_1} - T_{\tau_2}|}{T_{\tau_1}} < \delta,$$

где T_{τ_1} и T_{τ_2} — значения температур, соответствующие шагам τ_1 и τ_2.

Как показали расчеты, в данной задаче для $\delta = 0{,}05$ значение τ можно положить равным 0,02 с.

Следует отметить, что итерационный процесс проводился с внутренними итерациями: на каждом шаге итерации сначала использовались значения искомых величин, полученные на предыдущей итерации, а затем вычисления проводились повторно на этом же шаге с вновь полученными данными.

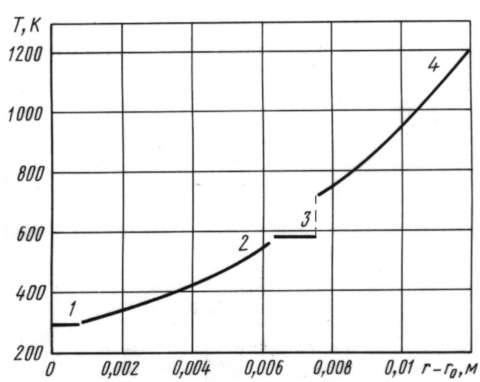

Рис. 4. Распределение температуры в осевом сечении многослойного цилиндрического пакета в момент времени $t = 95$ с:
1 и *3* — температура металлических оболочек, *2* — температура слоя термоизоляции, *4* — температура ТЗП

Сходимость метода Роте решения краевых задач для параболического уравнения с самосопряженным дифференциальным оператором установлена в работе [10]. В нелинейной постановке в работе [11] доказательство сходимости метода Роте проведено для класса степенных функций.

Порядок усечения систем уравнений (7) определялся на основе оценки Рунге

$$\frac{\|\mathbf{T}_{N+N_0} - \mathbf{T}_N\|_2}{\|\mathbf{T}_N\|_2} < \varepsilon,$$

где $\mathbf{T}_N$ — искомое решение, найденное методом редукции; N — порядок усечения бесконечной системы; N_0 — целое положительное число. Погрешность вычислений менее 2 % достигается при $N \geq 30$.

Автор благодарит профессора В.С. Зарубина за полезные обсуждения, касающиеся постановки задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З а р у б и н В. С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 184 с.
2. З а р у б и н В. С. Расчет и оптимизация термоизоляции. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 191 с.
3. З а р у б и н В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 326 с.
4. М а л о в Ю. И., М а р т и н с о н Л. К. Приближенные методы решения краевых задач. – М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1989. – 26 с.
5. Ч и г и р е в а О. Ю. Моделирование и расчет термического разрушения цилиндрической оболочки // Инженерно-физический журнал. – 2004. – Т. 77. – № 3. – С. 174–177.
6. М а л о в Ю. И., Ч и г и р е в а О. Ю. Моделирование и расчет процесса высокотемпературного прогрева оболочки с теплозащитным покрытием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2003. – Т. 10. – № 1. – С. 99–107.
7. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: ГИФМЛ, 1962. – 708 с.
8. М а л о в Ю. И., М а р т и н с о н Л. К. Разогрев многослойной оболочки при наличии контактного термического сопротивления между слоями // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1989. – № 12. – С. 43–37.
9. М а л о в Ю. И., М а р т и н с о н Л. К. Разогрев оболочки при наличии термического разрушения нагреваемой поверхности // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1989. – № 1. – С. 52–56.
10. Л а д ы ж е н с к а я О. А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
11. Л и о н с Ж. -Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

Статья поступила в редакцию 16.09.2004