УДК 539.3

# ОБОБЩЕННАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ. Ч. 3. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

**Ю.И. Димитриенко**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

*На основе трехмерных уравнений теории устойчивости упругих тел при малых деформациях выведены уравнения теории устойчивости тонких оболочек типа Тимошенко. Эти уравнения отличаются от известных эмпирически выводимых уравнений теории устойчивости иными выражениями для коэффициентов при усилиях основного (устойчивого) состояния, а также наличием моментов фиктивных сил основного состояния, которые обычно полагают нулевыми. Показано, что для классической задачи об устойчивости стержня выведенные уравнения теории устойчивости сводятся к классическому уравнению на собственные значения. Однако для более сложных оболочечных конструкций возможны отличия в уравнениях теории устойчивости и в выражении для критических нагрузок.*

***Ключевые слова***: трехмерная теория устойчивости, теория устойчивости оболочек.

# GENERALIZED THREE-DIMENSIONAL THEORY OF ELASTIC BODY STABILITY. PART 3. THEORY OF SHELL STABILITY

**Yu.I. Dimitrienko**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

*Based on three-dimensional equations of theory of elastic body stability with small deformations, the equations of theory of stability of thin shells of Timoshenko type are deduced. These equations differ from the known empirically derived equations of stability theory in different expressions for coefficients at efforts of the basic (stable) state as well as in presence of moments of fictitious forces of the basic state, which typically are assumed to be zero. It is shown that for the classical problem on rod stability, the deduced equations of stability theory are reduced to the classical eigenvalue equation. However for more elaborate shell structures, the distinctions are possible in equations of the stability theory and in the expression for critical loads.*

***Keywords***: three-dimensional stability theory, theory of shell stability.

Современные теории устойчивости оболочек, применяемые в настоящее время для расчета критических нагрузок, действующих на тонкостенные элементы конструкций, в подавляющем большинстве случаев построены на основе эмпирических или полуэмпирических соотношений для фиктивных массовых сил, обусловленных влиянием основного устойчивого состояния равновесия на бифуркационное состояние тела [1–12]. При такой методике не всегда есть уверенность в корректности получаемых выражений, особенно при комбинированных видах нагружения сложных конструкций. Подтверждение корректности получаемых соотношений теории устойчивости оболочек и возможное уточнение вида фиктивных массовых сил может быть достигнуто с использованием в качестве исходных соотношений общих трехмерных уравнений теории устойчивости. Цель настоящей работы — вывод уравнений теории устойчивости оболочек типа Тимошенко из общих трехмерных уравнений теории устойчивости, которые в свою очередь были получены из трехмерных уравнений обобщенной трехмерной теории устойчивости нелинейно-упругих тел в частях 1 и 2 данной работы [13, 14].

**Основные допущения теории оболочек типа Тимошенко для устойчивого и варьированного состояний.** Рассмотрим оболочку постоянной толщины $h$, которая является линейно-упругой ортотропной средой; главные оси ортотропии оболочки направлены по касательным к линиям главных кривизн $X^\alpha$ срединной поверхности оболочки ($\alpha = 1, 2$). В системе ортогональных координат $X^i$ с ортогональным базисом $\hat{\mathbf{r}}_i$ уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид $X^3 = 0$; уравнения боковых поверхностей оболочки — $X^3 = \pm h/2$. Примем следующие основные допущения классической теории оболочек типа Тимошенко, используя обозначения, взятые из работ [14, 15].

1. Оболочка является тонкой, поэтому для параметров Ламе $H_\gamma = \sqrt{g_{\gamma\gamma}}$ оболочки можно ввести соотношения:

$$H_3 = 1;\ H_\alpha = A_\alpha;\ H_{\alpha 3} \equiv \partial H_\alpha / \partial X^3 = k_\alpha A_\alpha;\ X^3 k_\alpha \ll 1,\ \alpha = 1, 2, \tag{1}$$

где $A_\alpha$ — коэффициенты первой квадратичной формы; $k_\alpha$ — главные кривизны срединной поверхности оболочки.

2. Компоненты $u_\alpha$ вектора перемещений $\mathbf{u}^0$ оболочки в основном (устойчивом) состоянии и компоненты $w_\alpha$ вектора перемещений $\mathbf{w}$ из устойчивого в неустойчивое (варьированное) состояние полагаются линейными функциями координаты $X^3$:

$$\begin{aligned} &u_\alpha = U_\alpha + X^3 \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1,\ 2; \quad u_3 = W; \\ &w_\alpha = w_\alpha^{(0)} + X^3 w_\alpha^{(1)}, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3; \end{aligned} \tag{2}$$

$$U_1, U_2, \gamma_1, \gamma_2, W \| X^1, X^2; \tag{3}$$

$$w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, w_3^{(0)}, w_1^{(1)}, w_2^{(1)} \| X^1, X^2;\ w_3^{(1)} \equiv 0, \tag{4}$$

где $U_1, U_2$ — перемещения срединной поверхности; $\gamma_1, \gamma_2$ — углы поворота нормали; $W$ — прогиб срединной поверхности оболочки в основном состоянии. Пять функций (3) и пять функций (4) зависят только от координат $X^1$ и $X^2$.

3. Нормальными поперечными напряжениями в оболочке в основном ($\sigma_{33}^0$) и в варьированном ($\sigma_{33}$) состояниях можно пренебречь:

$$\sigma_{33}^0 = 0; \quad \sigma_{33} = 0.$$

**Кинематические соотношения для варьированного состояния.** Подставляя формулы (2) и (4) в выражения (26), приведенные в работе [14],

$$-\omega_\gamma = \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2H_\alpha H_\beta}((w_\beta H_\beta)_{,\alpha} - (w_\alpha H_\alpha)_{,\beta}),$$

$$\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3,\quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha,$$

и учитывая (1), получаем выражения для компонент $\omega_\alpha$ сопутствующего вектора $\omega$ в теории оболочек:

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^{(0)} + X^3\omega_\alpha^{(1)},\ \alpha = 1,\ 2,\ 3; \tag{5}$$

$$\omega_1^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{w_{3,2}^{(0)}}{A_2} - w_2^{(0)}k_2 - w_2^{(1)}\right);\quad \omega_1^{(1)} = -\frac{1}{2}k_2 w_2^{(1)};$$

$$\omega_2^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{w_{3,1}^{(0)}}{A_1} - w_1^{(0)}k_1 - w_1^{(1)}\right);\quad \omega_2^{(1)} = \frac{1}{2}k_1 w_1^{(1)}; \tag{6}$$

$$\omega_3^{(\alpha)} = \frac{1}{2A_1A_2}((A_2 w_2^{(\alpha)})_{,1} - (A_1 w_1^{(\alpha)})_{,2}),\ \alpha = 0,\ 1.$$

Далее вычисляем компоненты тензора $\mathbf{B} = \nabla \otimes \boldsymbol{\omega}$ — градиента сопутствующего вектора. Для этого воспользуемся соотношениями (25), представленными в работе [14],

$$B_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \breve{\omega}_\alpha\, \delta_{\alpha\beta}; \omega_{\alpha\beta} = \frac{\omega_{\beta,\alpha}}{H_\alpha} - \frac{\omega_\alpha H_{\alpha\beta}}{H_\alpha H_\beta};$$

$$\breve{\omega}_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\omega_\gamma H_{\alpha\gamma}}{H_\gamma},\quad \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3, \tag{7}$$

и подставим в них формулы (5). Тогда с учетом допущений (1) получим, что компоненты $B_{\alpha\beta}$ тензора $\mathbf{B}$ в базисе $\hat{\mathbf{r}}_i$ примут вид

$$\breve{\omega}_\alpha = \breve{\omega}_\alpha^{(0)} + X^3\, \breve{\omega}_\alpha^{(1)},\quad \alpha = 1,\ 2;$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}^{(0)} + X^3\omega_{\alpha\beta}^{(1)},\quad \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3,$$

где

$$\breve{\omega}_\alpha^{(0)} = \frac{\omega_\alpha^{(0)}}{A_\alpha^2}A_{\alpha,\alpha} + \frac{\omega_\beta^{(0)}A_{\alpha,\beta}}{A_1A_2} + \omega_3^{(0)}\,k_\alpha;\ \breve{\omega}_\alpha^{(1)} = k_\alpha\,\omega_3^{(1)};\ \breve{\omega}_3 = 0;$$

$$\omega_{\alpha\alpha}^{(0)} = \left(\frac{\omega_\alpha^{(0)}}{A_\alpha}\right)_{,\alpha};\ \omega_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{\omega_{\beta,\alpha}^{(0)}}{A_\alpha} - \frac{\omega_\alpha^{(0)}A_{\alpha,\beta}}{A_\alpha A_\beta};\ \omega_{\alpha\alpha}^{(1)} = 0;\ \omega_{\alpha\beta}^{(1)} = 0,\ \alpha,\beta = 1,2;$$

$$\omega_{\alpha 3}^{(0)} = \frac{\omega_{3,\alpha}^{(0)}}{A_\alpha} - \omega_\alpha^{(0)}\,k_\alpha;\ \omega_{\alpha 3}^{(1)} = \frac{\omega_{3,\alpha}^{(1)}}{A_\alpha},\ \alpha = 1,\ 2. \tag{8}$$

Таким образом, выражения (7) для компонент $B_{\alpha\beta}$ можно представить в виде

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(0)} + X^3 B_{\alpha\beta}^{(1)},\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3, \tag{9}$$

где

$$B_{\alpha\alpha}^{(0)} = \omega_{\alpha\alpha}^{(0)} + \breve{\omega}_{\alpha}^{(0)};\ B_{\alpha\alpha}^{(1)} = \breve{\omega}_{\alpha}^{(1)};\ B_{\alpha\beta}^{(0)} = \omega_{\alpha\beta}^{(0)};\ B_{\alpha\beta}^{(1)} = 0,\ \alpha, \beta = 1, 2,\ \alpha \neq \beta;$$

$$B_{3\alpha}^{(0)} = B_{3\alpha}^{(1)} = 0,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3. \tag{10}$$

Подставляя (2) в выражения (29), приведенные в работе [14], определяем

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{w_{\alpha,\alpha}}{H_\alpha} + \frac{H_{\alpha\beta}}{H_\alpha H_\beta} w_\beta + \frac{H_{\alpha\gamma} w_\gamma}{H_\alpha H_\gamma};$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left( \frac{H_\alpha}{H_\beta}\left(\frac{w_\alpha}{H_\alpha}\right)_{,\beta} + \frac{H_\beta}{H_\alpha}\left(\frac{w_\beta}{H_\beta}\right)_{,\beta}\right).$$

После применения допущений (1) вычисляем деформации $\varepsilon_{ij}$ варьированного состояния оболочки

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + X^3 \kappa_{\alpha\beta};\ \varepsilon_{\alpha 3} = e_{\alpha 3};\ \varepsilon_{33} = 0,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2. \tag{11}$$

Здесь

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{w_{\alpha,\alpha}^{(0)}}{A_\alpha} + \frac{A_{\alpha,\beta}}{A_1 A_2} w_\beta^{(0)} + k_\alpha\, w_3^{(0)};\ 2e_{\alpha 3} = \frac{w_{3,\alpha}^{(0)}}{A_\alpha} + w_\alpha^{(1)} - k_\alpha\, w_\alpha^{(0)};$$

$$2e_{12} = \frac{w_{1,2}^{(0)}}{A_2} + \frac{w_{2,1}^{(0)}}{A_1} - \frac{1}{A_1 A_2}(A_{1,2} w_1^{(0)} + A_{2,1} w_2^{(0)}); \tag{12}$$

$$\varkappa_{\alpha\alpha} = \frac{w_{\alpha,\alpha}^{(1)}}{A_\alpha} + \frac{A_{\alpha,\beta}}{A_1 A_2} w_\beta^{(1)},\quad \alpha, \beta = 1, 2,\quad \alpha \neq \beta;$$

$$2\varkappa_{12} = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{w_1^{(1)}}{A_1}\right)_{,2} + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{w_2^{(1)}}{A_2}\right)_{,1}.$$

**Кинематические соотношения для основного состояния оболочки.** Для деформаций основного состояния $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ справедливы формулы, подобные формулам (11) и (12), отличающиеся только заменой $w_3^{(0)} \to W$, $w_\alpha^{(0)} \to U_\alpha$, $w_\alpha^{(1)} \to \gamma_\alpha$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = e_{\alpha\beta}^0 + X^3 \kappa_{\alpha\beta}^0;\ \varepsilon_{\alpha 3}^0 = e_{\alpha 3}^0;\ \varepsilon_{33}^0 = 0,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,$$

где

$$e_{\alpha\alpha}^0 = \frac{U_{\alpha,\alpha}}{A_\alpha} + \frac{A_{\alpha,\beta}}{A_1 A_2} U_\beta + k_\alpha W;\ 2e_{\alpha 3}^0 = \frac{W_{,\alpha}}{A_\alpha} + \gamma_\alpha - k_\alpha\, U_\alpha;$$

$$2e_{12}^0 = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{U_1}{A_1}\right)_{,2} + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{U_2}{A_2}\right)_{,1}; \tag{13}$$

$$\varkappa^0_{\alpha\alpha} = \frac{\gamma_{\alpha,\alpha}}{A_\alpha} + \frac{A_{\alpha,\beta}}{A_1 A_2}\gamma_\beta,\ \alpha,\beta = 1,2,\ \alpha \neq \beta;$$

$$\varkappa^0_{12} = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\gamma_1}{A_1}\right)_{,2} + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{\gamma_2}{A_2}\right)_{,1}.$$

**Напряжения и определяющие соотношения для основного и варьированного состояний.** Физические компоненты $\sigma^0_{ij}$ тензора напряжений основного состояния связаны с компонентами тензора деформаций $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$ обобщенным законом Гука [16, 17], поэтому для компонент $\sigma^0_{ij}$ запишем следующие выражения:

$$\sigma^0_{ij} = \sigma^{0(0)}_{ij} + X^3\sigma^{0(1)}_{ij}, \tag{14}$$

где

$$\sigma^{0(0)}_{\alpha\alpha} = C_{\alpha\alpha}e^0_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\beta}e^0_{\beta\beta};\ \sigma^{0(1)}_{\alpha\alpha} = C_{\alpha\alpha}\kappa^0_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\beta}\varkappa^0_{\beta\beta},\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2; \tag{15}$$
$$\sigma^{0(0)}_{12} = 2C_{66}e^0_{12};\ \sigma^{0(1)}_{12} = 2C_{66}\varkappa^0_{12};\ \sigma^{0(0)}_{23} = 2C_{44}e^0_{23};\ \sigma^{0(1)}_{23} = 0;$$
$$\sigma^{0(0)}_{13} = 2C_{55}e^0_{13};\ \sigma^{0(1)}_{13} = 0;\ \sigma^{0(0)}_{33} = 0; \sigma^{0(1)}_{33} = 0.$$

Здесь $C_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1, \ldots, 6$ — компоненты тензора модулей упругости материала оболочки. Поскольку упругие свойства материала оболочки одинаковы в основном и варьированном состояниях, для напряжений $\sigma_{ij}$ в варьированном состоянии справедливы аналогичные формулы:

$$\sigma_{ij} = \sigma^{(0)}_{ij} + X^3\sigma^{(1)}_{ij}, \tag{16}$$

где

$$\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha} = C_{\alpha\alpha}e_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\beta}e_{\beta\beta};\ \sigma^{(1)}_{\alpha\alpha} = C_{\alpha\alpha}\varkappa_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\beta}\varkappa_{\beta\beta},\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2;$$
$$\sigma^{(0)}_{12} = 2C_{66}e_{12};\ \sigma^{(1)}_{12} = 2C_{66}\varkappa_{12};\ \sigma^{(0)}_{13} = 2C_{55}e_{13}; \tag{17}$$
$$\sigma^{(0)}_{23} = 2C_{44}e_{23};\ \sigma^{(1)}_{23} = 0;\ \sigma^{(0)}_{33} = 0;\ \sigma^{(1)}_{33} = 0.$$

**Усилия и моменты в основном и варьированном состояниях оболочки.** Усилия $T_{\alpha\beta}$, $T^0_{\alpha\beta}$, моменты $M_{\alpha\beta}$, $M^0_{\alpha\beta}$ и перерезывающие силы $Q_\alpha$, $Q^0_\alpha$ в основном и варьированном состояниях оболочки вводим по стандартным формулам теории тонких оболочек [17] с учетом допущения (1) и формул (14), (15)

$$T_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}dX^3 = h\sigma^{(0)}_{\alpha\beta};\ T^0_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma^0_{\alpha\beta}dX^3 = h\sigma^{0(0)}_{\alpha\beta};$$

$$M_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\beta}X^3dX^3 = \frac{h^3}{12}\sigma^{(1)}_{\alpha\beta};\ M^0_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{\alpha\beta}X^3dX^3 = \frac{h^3}{12}\sigma^{0(1)}_{\alpha\beta}; \tag{18}$$

$$Q_\alpha = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dX^3 = h\sigma_{\alpha 3}^{(0)};\; Q_\alpha^0 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3}^0 dX^3 = h\sigma_{\alpha 3}^{0(0)}. \tag{18}$$

Подставляя в (18) соотношения (15) и (17), получаем определяющие соотношения для оболочки в основном и варьированном состояниях

$$\begin{gathered} T_{\alpha\alpha} = \bar{C}_{\alpha\alpha}\, e_{\alpha\alpha} + \bar{C}_{\alpha\beta}\, e_{\beta\beta};\; T_{12} = 2\,\bar{C}_{66}\, e_{12}; \\ M_{\alpha\alpha} = D_{\alpha\alpha}\kappa_{\alpha\alpha} + D_{\alpha\beta}\varkappa_{\beta\beta};\; M_{12} = 2D_{66}\varkappa_{12}; \\ Q_1 = 2\,\bar{C}_{55}\, e_{13};\; Q_2 = 2\,\bar{C}_{44}\, e_{23}; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} T^0_{\alpha\alpha} = \bar{C}_{\alpha\alpha}\, e^0_{\alpha\alpha} + \bar{C}_{\alpha\beta}\, e^0_{\beta\beta};\; T^0_{12} = 2\,\bar{C}_{66}\, e^0_{12}; \\ M^0_{\alpha\alpha} = D_{\alpha\alpha}\varkappa^0_{\alpha\alpha} + D_{\alpha\beta}\varkappa^0_{\beta\beta};\; M^0_{12} = 2D_{66}\varkappa^0_{12}; \\ Q^0_1 = 2\,\bar{C}_{55}\, e^0_{13};\; Q^0_2 = 2\,\bar{C}_{44}\, e^0_{23}. \end{gathered} \tag{20}$$

**Уравнения равновесия и устойчивости оболочки.** В основном состоянии оболочки имеют место уравнения равновесия [6, 18], следующие из трехмерных уравнений равновесия упругой среды ((12), см. работу [14]) относительно усилий $T^0_{\alpha\beta}$, моментов $M^0_{\alpha\beta}$ и перерезывающих сил $Q^0_\alpha$:

$$\begin{gathered} L_\alpha(T^0) + A_1A_2(k_\alpha\, Q^0_\alpha + F^0_{e\alpha}) = 0; \\ L_\alpha(M^0) - A_1A_2(Q^0_\alpha - M^0_{e\alpha}) = 0,\; \alpha = 1,\, 2; \\ (A_2Q^0_1)_{,1} + (A_1Q^0_2)_{,2} - A_1A_2(k_1\, T^0_{11} + k_2\, T^0_{22} + \Delta p - F^0_{e3}) = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

где $L_\alpha(T^0)$ — операторы,

$$L_\alpha(T^0) = \frac{\partial A_\beta T^0_{\alpha\alpha}}{\partial X^\alpha} + \frac{\partial A_\alpha T^0_{12}}{\partial X^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial X^\alpha} T^0_{\beta\beta} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial X^\beta} T^0_{12},\; \alpha,\, \beta = 1,\, 2,\; \alpha \neq \beta. \tag{22}$$

Формулы для операторов $L_\alpha(M^0)$ аналогичны формулам (22), массовые усилия $F^0_{e\alpha}$, моменты $M^0_{e\alpha}$ и распределенный перепад давления $\Delta p$, действующий на оболочку, заданы.

Для варьированного состояния имеют место трехмерные уравнения устойчивости ((17), см. работу [14]), которые по структуре формально отличаются от уравнений равновесия для оболочек в основном состоянии выражением для плотности массовых сил

$$\overset{0}{\rho}\, f_\alpha = -\epsilon_{\alpha mk} B^{im} \sigma_i^{0\,k} = -\sum_{s=1}^{3} (B_{s\beta}\sigma^0_{s\gamma} - B_{s\gamma}\sigma^0_{s\beta}),\quad \alpha = 1,\, 2,\, 3. \tag{23}$$

В связи с этим уравнения теории устойчивости оболочки формально имеют такой же вид, как и уравнения равновесия, за исключением массовых сил $F_{e\alpha}$, $F_{e3}$ и моментов $M_{e\alpha}$ относительно величин варьированного состояния $T_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, $Q_\alpha$:

$$
\begin{gathered}
L_\alpha(T) + A_1 A_2(k_\alpha Q_\alpha + F_{e\alpha}) = 0; \\
L_\alpha(M) - A_1 A_2(Q_\alpha - M_{e\alpha}) = 0, \quad \alpha = 1,\, 2; \\
(A_2 Q_1)_{,1} + (A_1 Q_2)_{,2} - A_1 A_2(k_1 T_{11} + k_2 T_{22} - F_{e3}) = 0.
\end{gathered} \tag{24}
$$

В (24) $\Delta p = 0$ — это следует из нулевых граничных условий на боковых поверхностях оболочки: $\sigma_{ij} n_j = 0$ в варьированном состоянии. Массовые силы $F_{e\alpha}$, $F_{e3}$ и моменты $M_{e\alpha}$ в этой системе в силу (23), (14) и (16) имеют следующий вид:

$$
F_{e\alpha} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \rho f_\alpha dX^3 = -\sum_{s=1}^{3} \int\limits_{-h/2}^{h/2} (B_{s\beta}\sigma^0_{s\gamma} - B_{s\gamma}\sigma^0_{s\beta}) dX^3 =
$$

$$
= -\sum_{s=1}^{3} \int_{-h/2}^{h/2} \Big( (B^{(0)}_{s\beta} + X^3 B^{(1)}_{s\beta})(\sigma^{0(0)}_{s\gamma} + X^3 \sigma^{0(1)}_{s\gamma}) -
$$

$$
-(B^{(0)}_{s\gamma} + X^3 B^{(1)}_{s\gamma})(\sigma^{0(0)}_{s\beta} + X^3 \sigma^{0(1)}_{s\beta}) \Big) \, dX^3 =
$$

$$
= -\sum_{s=1}^{3} \left( h(B^{(0)}_{s\beta}\sigma^{0(0)}_{s\gamma} - B^{(0)}_{s\gamma}\sigma^{0(0)}_{s\beta}) + \frac{h^3}{12}(B^{(1)}_{s\beta}\sigma^{0(1)}_{s\gamma} - B^{(1)}_{s\gamma}\sigma^{0(1)}_{s\beta}) \right).
$$

Аналогично записываем выражение для моментов

$$
M_{e\alpha} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \rho f_\alpha X^3 dX^3 = -\sum_{s=1}^{3} \int\limits_{-h/2}^{h/2} (B_{s\beta}\sigma^0_{s\gamma} - B_{s\gamma}\sigma^0_{s\beta}) X^3 dX^3 =
$$

$$
= -\frac{h^3}{12} \sum_{s=1}^{3} (B^{(0)}_{s\beta}\sigma^{0(1)}_{s\gamma} - B^{(0)}_{s\gamma}\sigma^{0(1)}_{s\beta} + B^{(1)}_{s\beta}\sigma^{0(0)}_{s\gamma} - B^{(1)}_{s\gamma}\sigma^{0(0)}_{s\beta}), \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{25}
$$

Здесь, как и ранее, индексы “$\alpha$”, “$\beta$”, “$\gamma$” образуют четную подстановку.

Примем во внимание соотношения (18), связывающие усилия $T^0_{\alpha\beta}$, моменты $M^0_{\alpha\beta}$ и перерезывающие силы $Q^0_\alpha$ с напряжениями $\sigma^{0(0)}_{\alpha\beta}$, $\sigma^{0(1)}_{\alpha\beta}$, а также учтем, что согласно (10) $B^{(0)}_{3\alpha} = B^{(1)}_{3\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), следовательно, при суммировании в формуле (25) по $s$ ненулевыми являются только два слагаемых — при $s = 1$ и 2. Тогда формулы (25) можно привести к виду

$$F_{e\alpha} =$$
$$= (-1)^\alpha (B^{(0)}_{1\beta} Q^0_1 + B^{(0)}_{2\beta} Q^0_2 - B^{(0)}_{13} T^0_{1\beta} - B^{(0)}_{23} T^0_{2\beta} - B^{(1)}_{13} M^0_{1\beta} - B^{(1)}_{23} M^0_{2\beta}) =$$
$$= (-1)^\alpha \sum_{s=1}^{2} (B^{(0)}_{s\beta} Q^0_s - B^{(0)}_{s3} T^0_{s\beta} - B^{(1)}_{s3} M^0_{s\beta}),\ \alpha, \beta = 1, 2,\ \alpha \neq \beta;$$
$$F_{e3} = -\sum_{s=1}^{2} (B^{(0)}_{s1} T^0_{s2} - B^{(0)}_{s2} T^0_{s1} - (B^{(1)}_{s1} M^0_{s2} - B^{(1)}_{s2} M^0_{s1})); \qquad (26)$$
$$M_{e\alpha} = (-1)^\alpha \sum_{s=1}^{2} \left( \frac{h^3}{12} (B^{(1)}_{s\beta} Q^0_s - B^{(1)}_{s3} T^0_{s\beta}) - B^{(0)}_{s3} M^0_{s\beta} \right).$$

Система уравнений (24) после подстановки в нее формул (26), а также определяющих соотношений (19) и кинематических соотношений (8), (9), (12) представляет собой замкнутую систему пяти уравнений второго порядка относительно пяти неизвестных функций $w^{(0)}_1$, $w^{(0)}_2$, $w^{(0)}_3$ и $w^{(1)}_1$, $w^{(1)}_2$. Это и есть искомая система уравнений устойчивости для оболочки типа Тимошенко, полученная из трехмерных уравнений теории устойчивости.

Граничные условия для уравнений равновесия оболочки (24) в основном состоянии задаются на контуре $L$, ограничивающем срединную поверхность оболочки. Если часть этого контура $L$ совпадает с координатной линией $X^\alpha$, то граничные условия задаются по одному из каждой пары

$$(T^0_{\alpha\alpha} = T^e_{\alpha\alpha},\, U_\alpha = U^e_\alpha);\ \ (T^0_{12} = T^e_{12},\, U_\beta = U^e_\beta);\ \ (Q_\alpha = Q^e_\alpha,\ W = W^e);$$
$$(M^0_{\alpha\alpha} = M^e_{\alpha\alpha},\ \gamma_\alpha = \gamma^e_\alpha);\ \ (M^0_{12} = M^e_{12},\ \gamma_\beta = \gamma^e_\beta). \qquad (27)$$

Для уравнений устойчивости оболочки (24) граничные условия имеют соответствующий тип, но с нулевыми заданными функциями (27) на контуре $L$, ограничивающем оболочку.

Уравнения (24), (26) отличаются от классических уравнений теории устойчивости оболочек [6] выражением для фиктивных массовых сил $F_{e\alpha}$, моментов $M_{e\alpha}$ и перерезывающих сил $F_{e3}$, в частности в классических уравнениях теории $M_{e\alpha} = 0$. Покажем, что выведенные уравнения (24), (26) теории устойчивости оболочек для простейшей задачи совпадают с классическими уравнениями устойчивости.

**Расчет устойчивости стержня по предложенной теории.** Рассмотрим классическую задачу об устойчивости стержня при действии на него сжимающей продольной нагрузки $T^e_{11} \equiv -T^0 < 0$. Ось $OX^1$ ориентирована в направлении продольной оси стержня. Поскольку срединная поверхность стержня представляет собой плоскость, для нее имеют место равенства

$$A_1 = A_2 = 1; k_1 = k_2 = 0.$$

При действии на стержень продольной сжимающей нагрузки $T^e_{11}$ в основном состоянии в нем возникает состояние одноосного растяжения (сжатия), которое описывается уравнениями (это решение системы уравнений (21), (20), (13)):

$$U^0_1 = -T^0 X^1/\bar{C}_{11} + U_{10};\quad e^0_{11} = -T^0/\bar{C}_{11}; T^0_{11} = -T^0 = \text{const};$$

$$T^0_{\alpha\beta} = 0, M^0_{\alpha\beta} = 0, Q^0_\alpha = 0.$$

Здесь $U_{10}$ — постоянная интегрирования, определяемая из граничного условия на торце стержня. Все остальные основные неизвестные функции в данной задаче ($U^0_2$, $\gamma^0_1$, $\gamma^0_2$ и $w^0$) тождественно равны нулю.

Варьированное (неустойчивое) состояние балки будем искать подобно решению задачи изгиба балки, в котором отличны от нуля две основные функции: $w^{(0)}_3$ (прогиб) и $w^{(1)}_1$ (угол поворота); причем эти функции зависят только от продольной координаты $X^1$:

$$w^{(0)}_3, w^{(1)}_1 \parallel X^1;\ \ w^{(0)}_1 = 0;\ w^{(0)}_2 = 0;\ w^{(1)}_2 = 0. \tag{28}$$

Подставляя решение (28) в кинематические соотношения (6), находим компоненты сопутствующего вектора

$$\omega^{(0)}_1 = 0;\ \omega^{(0)}_2 = \frac{1}{2}(w^{(0)}_{3,1} - w^{(1)}_1);\ \omega^{(0)}_3 = 0;\ \omega^{(1)}_\alpha = 0,\ \alpha = 1,2,3. \tag{29}$$

Подставив выражения (29) в (8), получим

$$\begin{aligned} &\breve{\omega}^{(0)}_\alpha = 0;\ \breve{\omega}^{(1)}_\alpha = 0;\ \alpha = 1,2,3;\\ &\omega^{(0)}_{12} = \omega^{(0)}_{2,1} = \frac{1}{2}(w^{(0)}_{3,11} - w^{(1)}_{1,1});\ \text{остальные } \omega^{(0)}_{ij} = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

т.е. ненулевой является только одна компонента $\omega^{(0)}_{12}$. После подстановки (30) в (10) определим, что компонента $B^{(0)}_{12}$ также ненулевая:

$$B^{(0)}_{12} = \omega^{(0)}_{12} = \omega^{(0)}_{2,1} = \frac{1}{2}(w^{(0)}_{3,11} - w^{(1)}_{1,1});\ \text{остальные } B^{(0)}_{ij} = 0,\ B^{(1)}_{ij} = 0. \tag{31}$$

Учитывая, что из всех величин $T^0_{\alpha\beta}$, $M^0_{\alpha\beta}$ и $Q^0_\alpha$ основного состояния отлична от нуля только компонента $T^0_{11}$, из (26) получаем

$$F_{e\alpha} = 0;\ M_{e\alpha} = 0,\ \alpha = 1,2;\ F_{e3} = B^{(0)}_{12} T^0_{11} = \frac{1}{2}(w^{(0)}_{3,11} - w^{(1)}_{1,1}) T^0_{11}. \tag{32}$$

Подставляя решение (28) в кинематические соотношения (12), находим, что ненулевыми являются только деформация сдвига $e_{13}$ и искривление $\varkappa_{11}$:

$$e_{13} = \frac{1}{2}(w^{(0)}_{3,1} - w^{(1)}_1);\ e_{11} = e_{22} = e_{12} = e_{23} = 0; \tag{33}$$

$$\varkappa_{11} = w_{1,1}^{(1)};\ \varkappa_{22} = \varkappa_{12} = 0. \qquad (33)$$

После подстановки выражений (33) в определяющие соотношения (19) получим, что только момент $M_{11}$ и перерезывающее усилие $Q_1$ ненулевые:

$$\begin{aligned} &M_{11} = D_{11}\varkappa_{11};\ Q_1 = 2\,\bar{C}_{55}\,e_{13};\\ &T_{11} = T_{22} = T_{12} = 0;\ M_{22} = M_{12} = 0;\ Q_2 = 0. \end{aligned} \qquad (34)$$

Тогда система уравнений теории устойчивости (24) с учетом (32) содержит только два ненулевых уравнения:

$$M_{11,1} - Q_1 = 0;\quad Q_{1,1} + B_{12}^{(0)} T_{11}^0 = 0. \qquad (35)$$

Система (35) совместно с уравнениями (33), (34) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно двух неизвестных функций $w_3^{(0)}$ и $w_1^{(1)}$. Подставим выражения для $B_{12}^{(0)}$(31) и $e_{13}$ (32) во второе уравнение системы (35)

$$\bar{C}_{55}(w_{3,11}^{(0)} - w_{1,1}^{(1)}) + \frac{1}{2}(w_{3,11}^{(0)} - w_{1,1}^{(1)})T_{11}^{(0)} = 0,$$

отсюда

$$w_{1,1}^{(1)} = -\left(\frac{2\,\bar{C}_{55} + T_{11}^0}{2\,\bar{C}_{55} - T_{11}^0}\right) w_{3,11}^{(0)}.$$

В силу (42) и (43) имеем

$$M_{11} = -D_{11}\left(\frac{2\,\bar{C}_{55} + T_{11}^0}{2\,\bar{C}_{55} - T_{11}^0}\right) w_{3,11}^{(0)}; \qquad (36)$$

$$B_{12}^{(0)} = \frac{1}{2}(w_{3,11}^{(0)} - w_{1,1}^{(1)}) = \frac{2\,\bar{C}_{55}}{2\,\bar{C}_{55} - T_{11}^0} w_{3,11}^{(0)}. \qquad (37)$$

Исключив силу $Q_1$ из двух уравнений системы (35), получим

$$M_{11,11} + B_{12}^{(0)} T_{11}^0 = 0. \qquad (38)$$

Если в уравнение (38) подставить выражения (36) и (37), то можно записать итоговый вид уравнения теории устойчивости балки:

$$w_{3,1111}^{(0)} + k^2 w_{3,11}^{(0)} = 0, \qquad (39)$$

где

$$k^2 = -\frac{2\,\bar{C}_{55}\,T_{11}^0}{D_{11}(2\,\bar{C}_{55} + T_{11}^0)} = \frac{T^0}{D_{11}(1 - T^0/2\,\bar{C}_{55})}.$$

Уравнение (39) представляет собой классическое уравнение устойчивости стержня, которое обычно выводится из совсем иных исходных уравнений — из уравнений теории устойчивости пластин с эмпирически вводимой внешней силой для основного состояния [1, 2, 4, 6].

Таким образом, показано, что трехмерная теория устойчивости упругих тел для случая тонкого стержня позволяет получить классическое уравнение теории устойчивости с учетом деформаций поперечного сдвига [6]. Уравнение (39) с граничными условиями шарнирного закрепления

$$X^1 = 0: \ U_1^0 = 0, \ w_3^{(0)} = 0, \ M_{11} = 0; \quad X^1 = l: \ w_3^{(0)} = 0, \ M_{11} = 0$$

имеет минимальное собственное значение $k = \pi/l$, ему соответствует критическое значение сжимающей нагрузки $T^0$, при котором происходит потеря устойчивости стержня

$$T^0_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D_{11}}{l^2 \left(1 + \dfrac{\pi^2 D_{11}}{2\,\bar{C}_{55}\,l^2}\right)}. \tag{40}$$

Выражение (40) совпадает с выражением для критической нагрузки, полученным в работе [6]. При очень длинных стержнях, для которых выполняется условие $\dfrac{\pi^2}{24}\dfrac{C_{11}}{C_{55}}\left(\dfrac{h}{l}\right)^2 \ll 1$, из выражения (40) выведем классическую формулу Эйлера для критической нагрузки:

$$T^0_{\text{кр}} = T^0_{\text{э}} = \frac{\pi^2 D_{11}}{l^2} = \frac{\pi^2 h C_{11}}{12}\left(\frac{h}{l}\right)^2.$$

**Выводы.** Уравнения теории устойчивости тонких оболочек типа Тимошенко были получены на основе трехмерных уравнений теории устойчивости упругих тел при малых деформациях. Отличие этих уравнений от известных эмпирически или полуэмпирически выводимых уравнений теории устойчивости заключается в разных выражениях для коэффициентов при усилиях основного (устойчивого) состояния, а также в наличии моментов фиктивных сил основного состояния, которые обычно полагают нулевыми. Для классической задачи об устойчивости стержня уравнения теории устойчивости сводятся к классическому уравнению на собственные значения. Однако для более сложных оболочечных конструкций возможны отличия в уравнениях теории устойчивости и выражении для критических нагрузок. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы. М.: Наука, 1971. 808 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 964 с.
3. *Пановко Я.Г.*, *Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1967. 420 с.

4. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
5. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 340 с.
6. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 272 с.
7. *Григолюк Э.И.*, *Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
8. *Simitses G.J.* An introduction to the elastic stability of structures. NJ: Prentice Hall, 1976. 256 p.
9. *Bazant Z.P.*, *Cedolin L.* Stability of structures. Oxford: Oxford University Press, 1990. 316 p.
10. *Iyengar N.G.R.* Structural stability of columns and plates. New Delhi: Affiliated East–West Press, 1986. 284 p.
11. *Tomczyk B.* Dynamic Stability of Micro-Periodic Cylindrical Shell // Mechanics and Mechanical Enineerin. 2010. Vol. 14. No. 2. P. 351–374.
12. *Bazant Z.P.* Stability of Elastic, Anelastic, and Disintegrating Structures: A Conspectus of Main Results // ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. 2000. Vol. 80. No. 11–12. P. 709–732.
13. *Димитриенко Ю.И.* Обобщенная трехмерная теория устойчивости. Ч. 1. Конечные деформации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 4. С. 79–95.
14. *Димитриенко Ю.И.* Обобщенная трехмерная теория устойчивости. Ч. 2. Малые деформации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 1. С. 17–26.
15. *Димитриенко Ю.И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1997. 356 с.
16. *Димитриенко Ю.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 464 с.
17. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
18. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

## REFERENCES

[1] Timoshenko S.P. Ustoychivost’ sterzhney, plastin i obolochek. Izbrannye raboty [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 808 p.

[2] Vol’mir A.S. Ustoychivost’ deformiruemykh system [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 964 p.

[3] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Ustoychivost’ i kolebaniya uprugikh system [Stability of deformable systems]. Nauka Publ., 1967. 420 p.

[4] Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost’ uprugikh system [Basis of calculation for stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 312 p.

[5] Bolotin V.V. Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti [Non-conservative problems of the elastic stability theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961. 340 p.

[6] Vasil’ev V.V. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1984. 272 p.

[7] Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. Ustoychivost’ i kolebaniya trekhsloynykh obolochek [Stability and vibrations of sandwich shells]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1973. 172 p.

[8] Simitses G.J. An introduction to the elastic stability of structures. NJ, Prentice Hall, 1976. 256 p.

[9] Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of structures. Oxford, Oxford University Press, 1990. 316 p.
[10] Iyengar N.G.R. Structural stability of columns and plates. New Delhi, Affiliated East-West Press, 1986. 284 p.
[11] Tomczyk B. Dynamic Stability of Micro-Periodic Cylindrical Shell. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 2010, vol. 14, no. 2, pp. 351–374.
[12] Bazant Z.P. Stability of elastic, an elastic and disintegrating structures: a conspectus of main results. *ZAMM (Z. Angew. Math. Mech.)*, 2000, vol. 80, no. 11–12, pp. 709–732.
[13] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional stability theory of elastic bodies. Part 1. Finite deformations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 4 (51), pp. 79–95 (in Russ.).
[14] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional stability theory of elastic bodies. Part 2. Small deformation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 1, pp. 17–26 (in Russ.).
[15] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1997. 356 p.
[16] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. T. 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Continuum mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media], Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011. 464 p.
[17] Dimitrienko Yu.I. Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 624 p.
[18] Ambartsumyan S.A. Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [General theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 446 p.

Статья поступила в редакцию 29.03.2013

Юрий Иванович Димитриенко — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yu.I. Dimitrienko — Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mechanics of continua, computational mechanics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical simulation in the science of materials, computational gas dynamics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.