

**О РАЗВИТИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ Н.Е. ЖУКОВСКОГО****Б.Я. Локшин, В.А. Самсонов, Ю.Д. Селюцкий**НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация  
e-mail: blokshin@imec.msu.ru; samson@imec.msu.ru; seliutski@imec.msu.ru

*Рассмотрены некоторые задачи, начало которых восходит к классическим трудам Н.Е. Жуковского: модель материальной точки в среде с сопротивлением; продольный полет летательного аппарата; самовращение пластинки. Математические модели были дополнены некоторыми элементами, что позволило выявить новые свойства вращательно-поступательного движения тела. В рамках рассмотренной в настоящей статье динамической системы второго порядка, основанной на квазистатической модели аэродинамического воздействия на пластинку, эти свойства получили не только качественное, но и количественное подтверждение.*

**Ключевые слова:** твердое тело, сопротивляющаяся среда, динамика полета, стационарные движения, устойчивость, автоколебания, авторотация.

**ON EVOLUTION OF CERTAIN ZHUKOVSKY'S PROBLEMS****B.Ya. Lokshin, V.A. Samsonov, Yu.D. Selyutskiy**Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: blokshin@imec.msu.ru; samson@imec.msu.ru; seliutski@imec.msu.ru

*The certain problems are discussed that originate from classic works by Zhukovsky: the model of material point moving in a resisting medium, longitudinal flight of an aircraft, self-rotation of a plate. Adding some elements into mathematical models allowed new properties of rotational and translational motion of a body to be revealed. These properties were confirmed not only qualitatively but also quantitatively in the context of the dynamical 2nd-order system under study that is based on quasi-static model of aerodynamic impact on the plate.*

**Keywords:** solid body, resisting medium, flight dynamics, steady motion, stability, self-oscillations, autorotation.

**Введение.** В связи с юбилеем кафедры “Теоретическая механика” им. профессора Н.Е. Жуковского авторы сочли полезным обратиться к нескольким задачам, которые “отец русской авиации” рассматривал в своих трудах: модель материальной точки [1]; продольный полет ЛА [1]; самовращение пластинки [2]. Эти и подобные им задачи допускают такую теоретико-механическую постановку, которая приводится к динамическим системам малой размерности. Эти системы — поле для демонстрации возможностей методов качественного анализа. Кроме того, они позволяют выявить некоторые любопытные свойства поступательно-вращательного движения тела.

**Задача о спуске сферы со смещенным центром тяжести.** В работе [1] в качестве модели материальной точки, движущейся в сопротивляющейся среде, предложено использовать тело (невесомую

оболочку), имеющее конечные размеры, но масса которого сосредоточена в одной точке  $G$ . При этом ориентация оболочки относительно вектора скорости точки  $G$  должна быть такой, чтобы момент аэродинамических сил, действующих на оболочку, был равен нулю. В дальнейшем соответствующий угол атаки получил название “балансирующий угол атаки”. Это понятие широко используется в прикладных задачах динамики летательных аппаратов (ЛА) вплоть до моделирования спуска отделяющихся частей космических ракет-носителей [3]. В частности, оно упоминалось в некоторых докладах на 7 Международном аэрокосмическом конгрессе, который состоялся в Москве в 2012 г. При этом обычно мало внимания обращают на дополнительное предположение Н.Е. Жуковского: *близость центра тяжести к центру давления*. Продемонстрируем важность этого предположения на простой задаче.

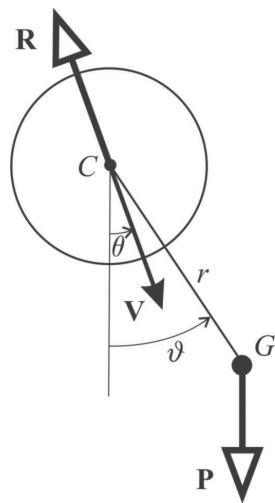


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая важность предположения Жуковского

Пусть оболочка (рис. 1) представляет собой шар с центром  $C$ . Примем, что при ее движении в среде точка  $C$  является центром давления, а центр масс тела отстоит от точки  $C$  на расстояние  $r$ . На тело действуют сила тяжести  $\mathbf{P}$  ( $P = mg$ ) и сила сопротивления среды  $\mathbf{R}$ , направленная против вектора скорости  $\mathbf{V}$  точки  $C$  ( $R = dV^2$ , где  $d$  – постоянный коэффициент лобового сопротивления).

Очевидно, что тело может совершать прямолинейный спуск, при котором вектор скорости  $\mathbf{V}$  и ось  $CG$  ориентированы вертикально, причем точка  $G$  расположена ниже точки  $C$  (как при спуске на парашюте). Скорость стационарного спуска  $V_*$  определяется по формуле  $dV_*^2 = mg$ .

Для простоты ограничимся рассмотрением случая плоскопараллельного движения тела. Введем возмущение скорости  $v = V - V_*$  и углы  $\theta, \vartheta$  отклонения от вертикали вектора скорости  $\mathbf{V}$  и оси  $CG$ , запишем уравнения возмущенного движения тела в линейном приближении

$$m\dot{v} = -2dV_*v; \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\theta} + V_*\dot{\theta}) = -dV_*^2\theta; \quad J\ddot{\vartheta} = -rdV_*^2(\vartheta - \theta), \quad (2)$$

где  $J$  – центральный момент инерции тела.

Уравнение (1) имеет тот же вид, что и уравнение для вертикального спуска материальной точки в классической задаче внешней баллистики. Уравнение (2) при  $J \rightarrow 0$  (невесомая оболочка, безынерционный

парашют и т.п.) дает соотношение  $\vartheta(t) \cong \theta(t)$ . Это означает, что так называемый балансирующий угол атаки равен нулю. С учетом этого уравнение (1) принимает вид

$$r\ddot{\vartheta} + V_*\dot{\vartheta} + g\vartheta = 0, \quad (3)$$

аналогичный виду уравнения малых колебаний математического маятника длиной  $r$ , на который действует сила вязкого трения с коэффициентом  $V_*$ . Очевидно, что при достаточно малой скорости спуска или достаточно большом значении  $r$  ( $V_*^2 < 4rg$ ) ось  $CG$  тела совершает медленно затухающие угловые колебания. Именно такие колебания нередко совершает тело, спускаемое на парашюте с длинными стропами. Однако при достаточно малом (но конечном) значении  $r$  угол  $\vartheta$  убывает монотонно, а при  $r \rightarrow 0$  уравнение (3) превращается в уравнение, описывающее изменение угла поворота вектора скорости падающей материальной точки. Таким образом, в этой задаче имеются два параметра  $J$  и  $r$ , малость которых и учел Жуковский.

**Задача о спуске тела на малом парашюте.** В следующей задаче влияние длины строп на характер колебаний спускаемого объекта проявляется более ярко. Рассмотрим плоскопараллельное движение грузопарашютной системы (рис. 2), состоящей из груза (осесимметричное

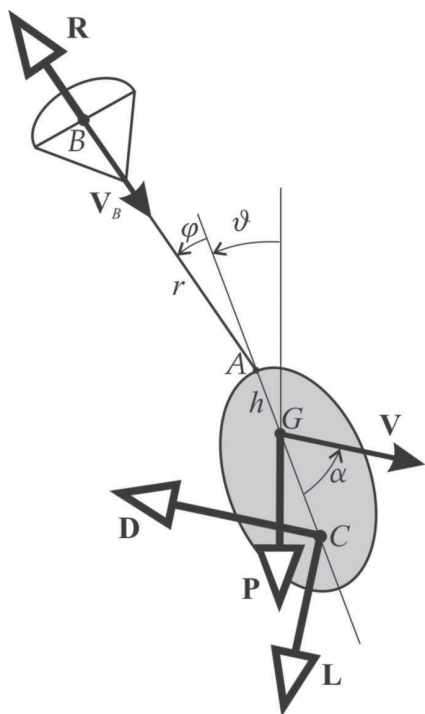


Рис. 2. Схема плоскопараллельного движения грузопарашютной системы

тело) и малого безынерционного осесимметричного парашюта неизменяемой формы (масса парашюта и масса воздуха под куполом много меньше массы груза). Типичное назначение малых парашютов — обеспечение желательной ориентации грузов продолговатой формы при их спуске. Известно, что такие грузы имеют тенденцию к спуску в горизонтальном положении, в то время как желательным режимом является спуск в вертикальном положении.

При исследовании систем с малым (невесомым) парашютом традиционно используется эвристическая модель, в которой парашют заменяется его аэродинамической силой, приложенной в точке крепления к грузу, причем эта сила (в случае нулевого балансирующего угла атаки) направлена против воздушной скорости характерной точки груза: центра масс

[4, 5] или точки крепления парашюта [6]. Необходимо отметить, что это, в сущности, означает понижение порядка исходной динамической системы сразу на две единицы.

Однако стремление массы парашюта к нулю, строго говоря, означает понижение порядка исходной динамической системы всего на единицу. В связи с этим целесообразно применять методы разделения движений, чтобы оценить, в каких ситуациях традиционный подход может быть оправданным. Предположим, что среда воздействует как на парашют, так и на тело, причем соответствующие аэродинамические силы имеют одинаковый порядок.

На этапе спуска малый парашют находится в вихревом следе груза. Согласно результатам экспериментов [7], в этом случае для описания аэродинамической нагрузки на парашют можно использовать квазистатический подход. Это позволит, оставаясь в рамках достаточно простой модели, выявить качественные особенности поведения изучаемого объекта. Для простоты примем, что единицы измерения таковы, что выполняются соотношения  $j = 1$ ,  $\rho S/2 = 1$ ,  $g = 1$  ( $j$  – радиус инерции груза;  $\rho$  – плотность среды;  $S$  – площадь характерного сечения груза).

При любом значении эффективной длины строп  $r$  ( $r = AB$ ) существует режим вертикального спуска системы. Тогда, проводя процедуру разделения движений по Тихонову, получаем следующие уравнения движения, линеаризованные в окрестности этого режима:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -\rho\sigma V_*vC_D(0) - \rho\sigma_p C_R V_*v; \\ mV_*\dot{\alpha} &= -\frac{\rho\sigma}{2}V_*^2C_L^\alpha\alpha - mg(\vartheta + \alpha) - mV_*\omega + \frac{\rho\sigma_p}{2}C_R V_*^2(\alpha - \varphi); \\ J\ddot{\vartheta} &= -\frac{\rho\sigma}{2}V_*^2C_m^\alpha\alpha + \frac{\rho\sigma_p}{2}V_*^2C_R h\varphi; \\ r\dot{\varphi} &= -(h + r)\omega + V_*(\alpha - \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma = S_p/S$ ;  $S_p$  – площадь парашюта;  $V_* = \sqrt{2mg/(\rho\sigma C_D(0) + \rho\sigma_p C_R)}$  – скорость стационарного спуска парашюта;  $h$  – расстояние от центра масс  $G$  груза до точки  $A$  крепления строп;  $C_L^\alpha = dC_L/d\alpha|_{\alpha=0}$ ,  $C_m^\alpha = dC_m/d\alpha|_{\alpha=0}$ ,  $C_D(\alpha)$ ,  $C_L(\alpha)$ ,  $C_m(\alpha)$  – безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента (относительно центра масс) для груза;  $C_R$  – коэффициент лобового сопротивления парашюта при нулевом угле атаки парашюта.

Последнее уравнение системы (4) означает, что на медленных движениях рассматриваемой системы балансировочный угол атаки парашюта равен нулю.

Следует отметить, что система (4) переходит в динамическую систему, получающуюся в рамках подходов, используемых, например

в работах [4–6], предельным переходом  $r \rightarrow 0$  (при нулевой эффективной длине строп). Однако в этом случае требуется существенный пересмотр модели аэродинамического воздействия на парашют.

Исследуем влияние эффективной длины строп на поведение системы. Нетрудно показать, что при выполнении условий

$$\sigma h C_R + C_m^\alpha > 0; \quad C_m^\alpha < 0; \quad C_L^\alpha > 0$$

вертикальный спуск асимптотически устойчив при малых значениях  $r$  и неустойчив при больших.

Чтобы проанализировать влияние эффективной длины строп  $r$  на характер колебаний в окрестности стационарного режима, были проведены численные расчеты при следующих значениях параметров:

$$m = 10; \quad h = 0,5; \quad \sigma \approx 4,5; \quad C_L(\alpha) = \sin 2\alpha; \quad C_D(\alpha) = 0,5 + 2 \sin^2 \alpha; \\ C_m(\alpha) = (-0,1 + 0,25 \cos \alpha) (C_L(\alpha) \cos \alpha + C_D(\alpha) \sin \alpha); \quad C_R = 1,0.$$

Траектории корней характеристического уравнения системы (4) при изменении длины  $r$  приведены на рис. 3. Согласно рисунку, частота затухающих колебаний заметно изменяется в диапазоне относительно малых значений  $r$  и остается постоянной при достаточно больших значениях длины  $r$ .

Интересно также, что в некотором диапазоне значений  $r$  существует две частоты колебаний (при определенных соотношениях на остальные параметры), причем низкая частота всегда соответствует затухающим колебаниям, а высокая – может соответствовать раскачке. Таким образом, эффективная длина строп оказывает существенное влияние на характер колебаний в окрестности вертикального спуска системы, вплоть до потери его устойчивости.

**Задача Жуковского.** Задача о продольном полете ЛА (птицы, планера) [1] обсуждается в литературе, посвященной нелинейным динамическим системам [8, 9], под названием “задача Жуковского”. При

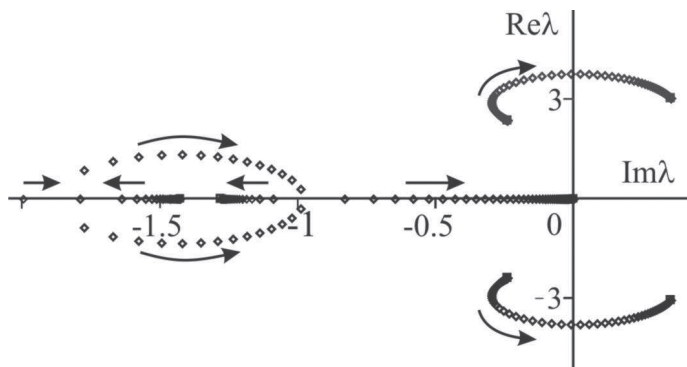


Рис. 3. Траектории корней характеристического уравнения системы (4) при изменении длины  $r$  (стрелками отмечены направления увеличения длины строп)

некоторых предположениях о симметрии невесомой оболочки и постоянном “ненулевом значении балансирующего угла атаки  $\alpha_*$ ” эта задача сводится к задаче о движении тяжелой материальной точки, на которую действует не только сила лобового сопротивления  $D$ , но и боковая сила  $L$  (подъемная). Эти силы обычно определяются по формулам  $L = 0,5C_L\rho SV^2$  и  $D = 0,5C_D\rho SV^2$ , где  $C_L$ ,  $C_D$  – безразмерные коэффициенты аэродинамических сил, зависящие от угла  $\alpha_*$ .

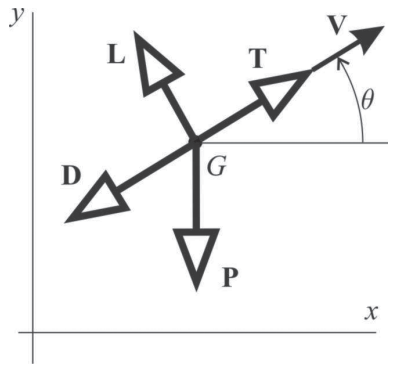


Рис. 4. Схема, иллюстрирующая модель Жуковского, дополненную силой тяги

Дополним модель Жуковского силой тяги  $T$ , направленной вдоль вектора скорости  $V$  (рис. 4). Тогда уравнения движения материальной точки  $G$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - mg \sin \theta - D; \\ mV\dot{\theta} &= -mg \cos \theta + L. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно показать, что при отсутствии силы тяжести касательная к траектории равномерно поворачивается с увеличением пройденного пути. Таким свойством обладает лишь окружность. Ее радиус  $R$  определяется отношением массы  $m$  точки к коэффициенту подъемной силы и не зависит от коэффициента сопротивления, скорости движения и от силы тяги.

В случае  $g \neq 0$ ,  $T = 0$  система (5) имеет стационарное решение  $V(t) = V_*$ ,  $\theta = \theta_*$ :

$$V_*^2 = \frac{2mg}{\rho S \sqrt{C_D^2 + C_L^2}}; \quad \theta_* = -\text{arccctg } K,$$

где  $K = K(\alpha_*) = C_L(\alpha_*)/C_D(\alpha_*) > 0$  – коэффициент аэродинамического качества. Это решение соответствует режиму установившегося движения точки  $G$ , который естественно назвать планированием. На рис. 5 ему соответствует прямолинейная наклонная траектория.

Перейдем к описанию траекторий движения точки  $G$  в вертикальной плоскости  $(x, y)$ . При достаточно больших значениях начальной скорости (например, горизонтальной) точка  $G$  описывает полную петлю в вертикальной плоскости (траектория 1, см. рис. 5). Эта петля не замкнута, что соответствует “дрейфу” той окружности, по которой двигалась бы точка  $G$  при отсутствии силы тяжести. При меньших значениях скорости петлеобразная траектория переходит в планирование,

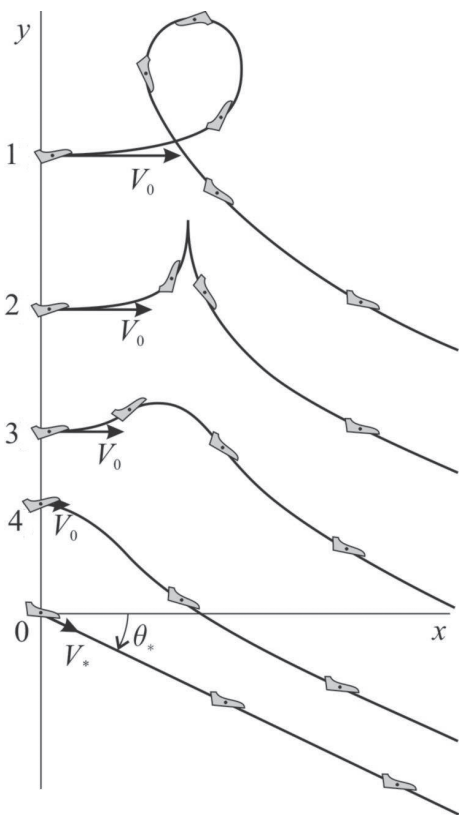


Рис. 5. Траектории движения

$V = V_*v$ ;  $t = V_*\tau/g$ ;  $T = pmg$  ( $p \geq 0$ ). Учитывая связь значений  $\theta_*$  и  $K$ , получаем

$$\begin{aligned} v' &= p + v^2 \sin \theta_* - \sin \theta; \\ v\theta' &= v^2 \cos \theta_* - \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) включает в себя два параметра:  $p$  и  $\theta_*$  (или  $K$ , так как они связаны однозначной зависимостью). Естественно, фазовый портрет системы будет зависеть от значений этих параметров. Легко показать, что при  $0 \leq p < 1$  существует единственный режим планирования, который является непрерывным продолжением режима планирования при нулевой силе тяги. Ему соответствует неподвижная точка  $A$  на фазовой плоскости. При  $1 \leq p < 1/\cos \theta_*$  имеются два режима: один – продолжение предыдущего, другой – возникающий из режима “зависания”, когда сила тяги уравновешивает силу тяжести (точка  $B$  на фазовой плоскости). При  $p = 1/\cos \theta_*$  два режима сливаются в один. Наконец, при дальнейшем увеличении силы тяги ( $p > 1/\cos \theta_*$ ) стационарные режимы отсутствуют.

Последний случай особенно интересен. Из уравнений (6) следует, что  $v' < 0$  при  $v \leq \sqrt{-(1+p)/\sin \theta_*}$ ,  $v' > 0$  при  $v \geq \sqrt{(1-p)/\sin \theta_*}$ .

причем переход сопровождается предварительным подъемом точки  $G$  (маневр типа “горка”, траектории 2 и 3, см. рис. 5). При еще меньших скоростях происходит “провал” точки  $G$  и плавный выход на режим планирования (траектория 4, см. рис. 5). Отметим, что все траектории, приведенные на рис. 5, известны: это характерные траектории полета бумажного “голубя”, включая зачастую наблюдаемое “кабрирование”.

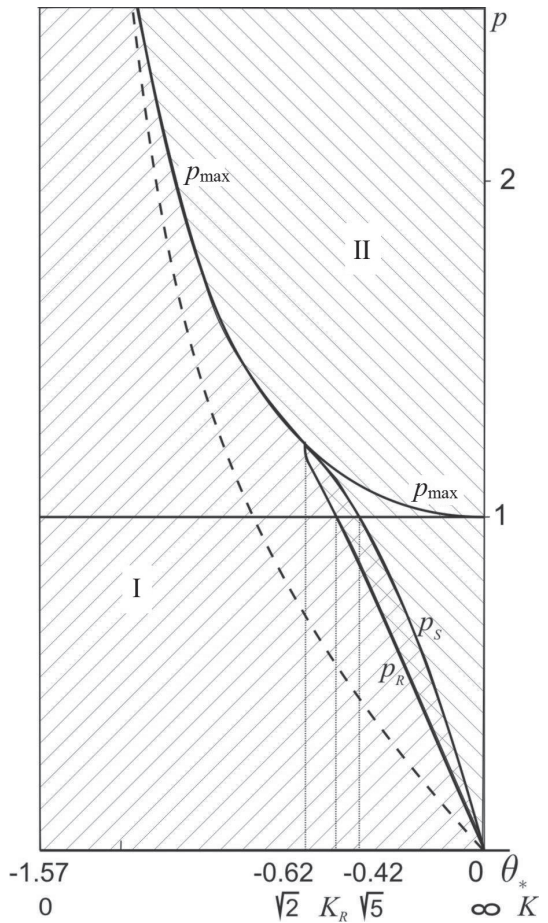
Теперь учтем влияние силы тяги в присутствии всего набора указанных выше сил. Имея в виду модификацию задачи Жуковского о полете планера, будем полагать, что сила тяги постоянна ( $T > 0$ ), а масса точки неизменна.

Для дальнейшего анализа перейдем к безразмерным величинам, выполнив следующие замены:

Таким образом, изображающая точка в процессе движения вдоль фазовой траектории обязательно попадет в полосу  $\sqrt{(1-p)/\sin\theta_*} < v < \sqrt{-(1+p)/\sin\theta_*}$  и ее не покинет. В этом случае обязательно возникает хотя бы одна (или нечетное число) замкнутая фазовая траектория, охватывающая фазовый цилиндр (ротационное движение изображающей точки).

Рассмотрим вопрос об устойчивости режимов планирования (неподвижных точек). Несложно показать, что точка  $B$  — седловая, поэтому соответствующий режим планирования неустойчив. Условие устойчивости точки  $A$  — единственное неравенство  $p(K^2 - 2) - 3\sqrt{1 + K^2 - p^2 K^2} < 0$ . Отсюда при  $K^2 \leq 2$  условие устойчивости точки  $A$  выполняется при всех допустимых значениях  $p$  силы тяги. Если  $K^2 > 2$ , то условие устойчивости принимает вид  $p < 3/\sqrt{K^2 + 4}$ .

Переведем полученные результаты на язык плоскости параметров  $\theta_*, p$  (рис. 6). Введем две функции:  $p = p_{\max} = 1/\cos\theta_* = \sqrt{1 + K^2}/K$  — предельное (максимальное) значение силы тяги, до которого существуют неподвижные точки;  $p = p_S = 3/\sqrt{K^2 + 4}$  — граница области устойчивости точки  $A$  при  $K^2 > 2$ . Отметим, что кривые  $p_{\max}(K)$  и  $p_S(K)$  имеют общую касательную при  $K = \sqrt{2}$ . Таким образом, в плоскости параметров  $\theta_*, p$  выделяются следующие множества (см. рис. 6):  $0 \leq p < 1$  — существует только одна неподвижная точка  $A$ ;  $1 \leq p < p_{\max}$  — существуют две неподвижные точки  $A$  и  $B$ ; линия  $p = p_{\max}$  — две точки совпадают;  $p > p_{\max}$  — неподвижных точек нет. Кроме того, кривая  $p = p_S$  делит область  $p \leq p_{\max}$  существования неподвижных точек на



**Рис. 6.** Зависимость силы тяги от угла  $\theta_*$  и качества  $K$ :

I — область устойчивости точки  $A$ ; II — область существования притягивающего ротационного режима

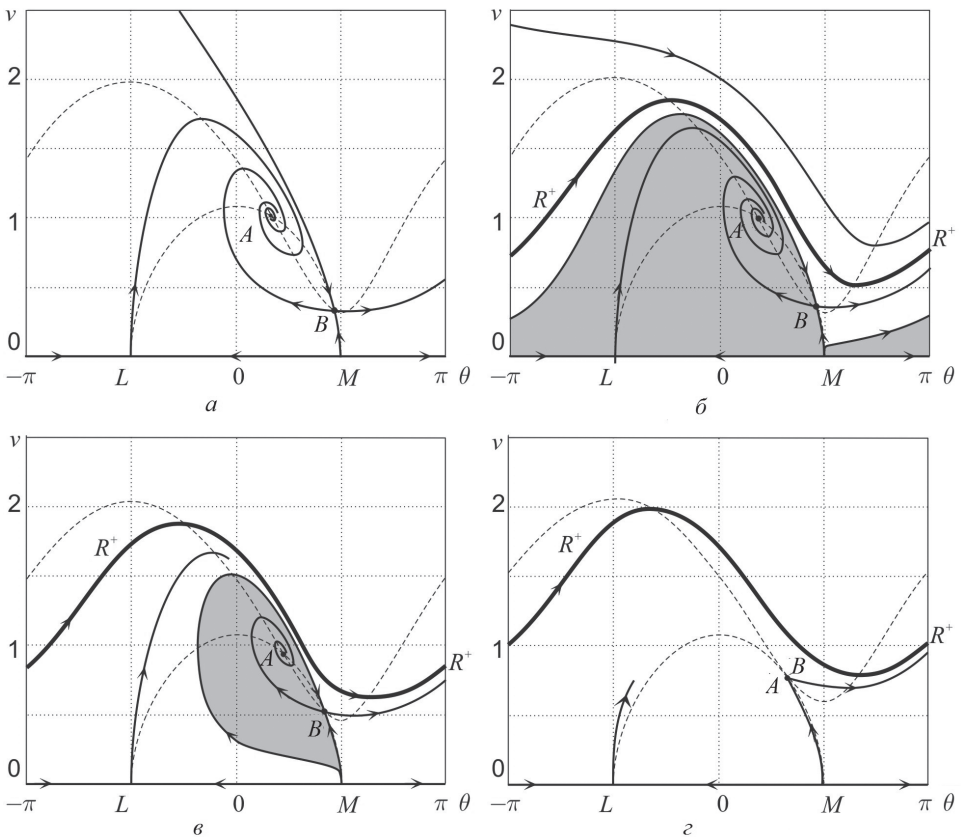


две части: слева от этой кривой точка  $A$  устойчива, справа — нет (напомним, что точка  $B$  всегда неустойчива).

Выше было отмечено, что в области  $p > p_{\max}$  отсутствия неподвижных точек возникает по крайней мере одна замкнутая фазовая траектория, охватывающая фазовый цилиндр. Аналогичная ситуация имеет место и в области  $K > \sqrt{2}$ ,  $p_S < p < p_{\max}$ , где две неподвижные точки неустойчивы. Оказывается, что образование таких замкнутых фазовых траекторий происходит до потери устойчивости точки  $A$ . Обозначим через  $p_R$  кривую  $p = p_R(K)$ , на которой появляется замкнутая фазовая траектория, охватывающая фазовый цилиндр. Эта кривая, полученная в результате расчетов, также представлена на рис. 6. Через  $K_R$  обозначено решение уравнения  $p_R(K) = 1$ .

Штриховой линией выделено множество значений параметров, при которых осуществляется движение точки  $G$  по горизонтали. Указанное множество задается условием  $pK = 1$ . Это множество целиком принадлежит области устойчивости точки  $A$ , следовательно горизонтальный полет в рассматриваемой задаче устойчив. В соответствии с рис. 6 увеличение силы тяги при различных значениях параметра  $K$  приводит к разным типам перестроек фазового портрета.

В качестве примера рассмотрим результаты построения фазового портрета системы (5) при  $K = 1,6$  (рис. 7). В этом случае характерные значения силы тяги равны  $p_{\max} = 1,1792$ ,  $p_S = 1,1713$ ,  $p_R = 1,091$ . При этом выделяют пять диапазонов изменения параметра  $p$  (см. рис. 6). Рассмотрим их последовательно. При  $0 < p < 1$  существует единственный аттрактор (точка  $A$ ), все фазовые траектории стягиваются в эту точку. При  $p = 1$  возникает еще одна неподвижная точка  $B$  (седловая). По мере увеличения значения параметра  $p$  в интервале  $1 < p < p_R$  точка  $B$  поднимается, входящая сверху в точку  $B$  сепаратриса опускается (рис. 7, а), и при  $p = p_R$  она совпадает с сепаратрисой, выходящей из точки  $B$  вправо, образуя своего рода петлю сепаратрис, охватывающую фазовый цилиндр. Эта общая сепаратриса является границей области притяжения точки  $A$ . Затем с увеличением параметра  $p$  с нее “снимается” вверх устойчивый ротационный режим (обозначим его через  $R^+$ , показан толстой линией на рис. 7, б–г). Сначала область притяжения точки  $A$  ограничивается сепаратрисой, входящей сверху в точку  $B$ , и одной из веерных траекторий, выходящих вправо из точки  $M$  (см. рис. 7, б). Затем образуется “петля” из траекторий  $MLB$  и  $MB$ , не охватывающая фазовый цилиндр и ограничивающая эту область притяжения. С увеличением значения  $p$  область притяжения точки  $A$  ограничивается сепаратрисой  $MB$ , входящей снизу в точку  $B$ , и одной из веерных траекторий, выходящих влево из точки  $M$  (см. рис. 7, в). Далее при возрастании значения  $p$  с этой петли “снимается” неустойчивый



**Рис. 7.** Фазовый портрет системы (5) при  $p = 1,04$  (а),  $1,092$  (б),  $1,11$  (в) и  $1,179$  (г)

цикл, он ограничивает область притяжения точки  $A$ . Часть фазовой плоскости, расположенная снаружи этого цикла, образует область притяжения режима  $R^+$ . При дальнейшем увеличении значения  $p$  данный цикл сжимается и при  $p = p_S = 1,1713$  исчезает, точка  $A$  становится неустойчивым фокусом (классический случай бифуркации Андронова – Хопфа), и в диапазоне значений  $p_S < p < p_{\max}$  неподвижные точки неустойчивы, существует только один аттрактор  $R^+$ . При  $p = p_{\max}$  точки  $A$  и  $B$  совпадают (см. рис. 7, г), а затем при  $p > p_{\max}$  исчезают, остается только один устойчивый ротационный режим.

Итак, установлено, что в задаче Жуковского при наличии постоянной силы тяги в зависимости от значений силы тяги  $p$  и аэродинамического качества  $K$  возможны два типа притягивающих движений материальной точки  $G$ : планирование с постоянными значениями скорости и угла планирования; петлеобразное движение с периодически изменяющейся скоростью движения и монотонным возрастанием угла поворота вектора скорости точки  $G$ .

Режим планирования качественно не отличается от классического случая отсутствия силы тяги. Отметим только, что он устойчив не обязательно в большом и при достаточно больших значениях силы тяги

угол планирования может быть равен нулю (горизонтальный полет) и даже может быть положительным, так что точка  $G$  в этом случае совершает стационарное движение с набором высоты.

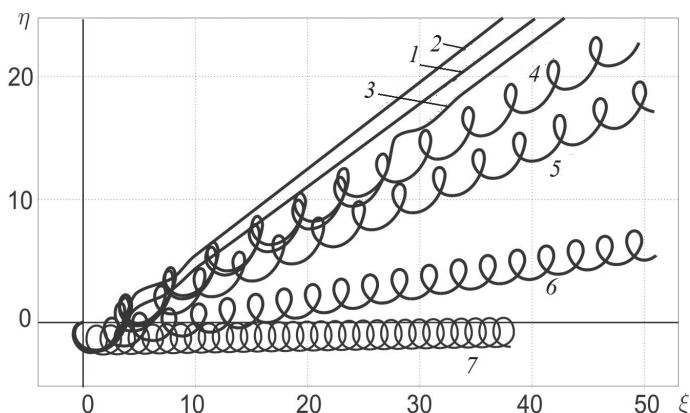
Более сложная ситуация с петлеобразными движениями. Представляет интерес оценить “размах” петель, которые описывает точка  $G$  в этом режиме, и средний “дрейф” траектории точки  $G$  в вертикальной плоскости. Поскольку угол  $\theta$  монотонно возрастает в данном установившемся режиме, можно перейти к новому “времени” — углу и искать решение уравнений в виде функций этого угла. Пусть  $\xi$ ,  $\eta$  — горизонтальное и вертикальное безразмерные смещения точки  $G$  в плоскости движения и  $w = v^2$ . Ограничиваясь первыми членами разложения в ряд Фурье, получаем первую грубую оценку изменения скорости движения точки  $G$  и ее траектории движения:

$$w = v^2 \cong p\sqrt{1 + K^2} - \frac{4\sqrt{1 + K^2}}{4 + K^2} \sin \theta + \frac{2K\sqrt{1 + K^2}}{4 + K^2} \cos \theta. \quad (7)$$

Согласно (7), с увеличением силы тяги среднее значение скорости движения точки  $G$  возрастает как  $\sqrt{p}$ , а “амплитуда” изменения скорости движения в этом приближении не зависит от силы тяги  $p$ . Аналогичные формулы могут быть записаны и для координат:  $\xi = a_1\theta + b_1 \sin \theta + c_1 \cos \theta$ ;  $\eta = a_2\theta + b_2 \sin \theta + c_2 \cos \theta$ . Определенные приближения для описания петлеобразных траекторий движения точки  $G$  становятся более точными с увеличением силы тяги.

Для иллюстрации рассмотрим результаты численного расчета траекторий точки  $G$  в вертикальной плоскости при различных значениях силы тяги и фиксированном значении аэродинамического качества  $K = 1,6$  (рис. 8).

Рисунок наглядно демонстрирует, как с увеличением силы тяги начинает развиваться петлеобразное движение точки  $G$ , при этом в



**Рис. 8.** Результаты численного расчета траекторий точки  $G$  в вертикальной плоскости при значениях силы тяги  $p = 1,08$  (1), 1,09 (2), 1,0905 (3), 1,0907 (4), 1,095 (5), 1,20 (6) и 2,20 (7) и фиксированном значении аэродинамического качества  $K = 1,6$

среднем траектория точки  $G$  становится все более горизонтальной, хотя “размах” колебаний около этого среднего движения не изменяется. Постоянство размаха хорошо согласуется с тем, что при отсутствии силы тяжести в данных условиях точка  $G$  перемещалась бы по одной и той же окружности независимо от значения силы тяги. Однако с увеличением этой силы возрастает скорость движения вдоль петли (периодическая траектория  $R^+$  “поднимается” на фазовой плоскости  $v, \theta$ ). В связи с этим увеличивается и частота петель, что отражено на рис. 8. Более подробный параметрический анализ приведен в работе [10].

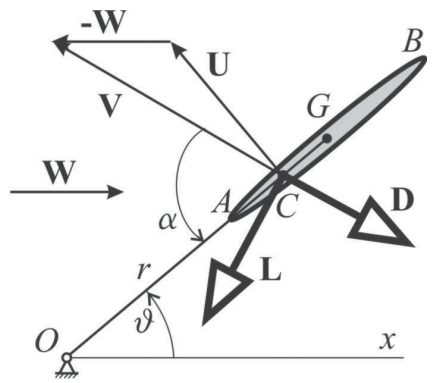


Рис. 9. Поперечное сечение аэродинамического маятника плоскостью качания

**Задача об аэродинамическом маятнике (флюгере).** Рассмотрим поведение колебательной системы с одной степенью свободы — аэродинамического маятника [11]. Такой маятник представляет собой тонкую плоскую пластинку, жестко закрепленную вдоль державки. Вся конструкция находится в стационарном воздушном потоке со скоростью  $W$ . Поперечное сечение такого аэродинамического маятника плоскостью качания представлено на рис. 9. Пластинка  $AB$  шириной  $2b$  закреплена геометрическим центром  $G$  на державке  $OG$  и может вращаться вместе с державкой как одно целое вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку  $O$ . Пренебрегая взаимодействием державки с потоком и трением в оси качания, будем учитывать лишь аэродинамическое воздействие, оказываемое потоком среды на пластинку.

Примем, что в каждый момент времени сила воздействия среды  $\mathbf{R}$  полностью определяется мгновенными значениями скорости  $V$  и угла атаки  $\alpha$ . Вектор абсолютной скорости движения центра давления равен  $U = W + V$ , причем  $|U| = U = (r - \varepsilon(\alpha))\vartheta$ , где  $r$  — длина державки;  $\vartheta$  — угол поворота державки;  $\varepsilon(\alpha)$  — сдвиг центра давления  $C$ , отсчитываемый от геометрического центра  $G$ .

Поведение такого маятника можно описать следующими уравнениями [11]:

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -q(\alpha)(l - e(\alpha))v^2; \quad (8)$$

$$v \sin \alpha = \sin \vartheta + (l - e(\alpha))\omega, \quad v \cos \alpha = \cos \vartheta. \quad (9)$$

Здесь введены безразмерные параметры и переменные:

$$l = \frac{r}{b}; \quad k = \frac{b^3 \rho S}{2J}; \quad e(\alpha) = \frac{\varepsilon(\alpha)}{b}; \quad q(\alpha) = kC_N(\alpha);$$

$$\tau = \frac{Vt}{b}; \quad v = \frac{V_c}{V}; \quad \omega = \frac{b\dot{\vartheta}}{V},$$

где  $J$  — момент инерции всей конструкции относительно точки  $O$  (точкой обозначена производная по времени  $\tau$ );  $C_N(\alpha) = C_L(\alpha) \cos \alpha + C_D(\alpha) \sin \alpha$  — коэффициент нормальной силы.

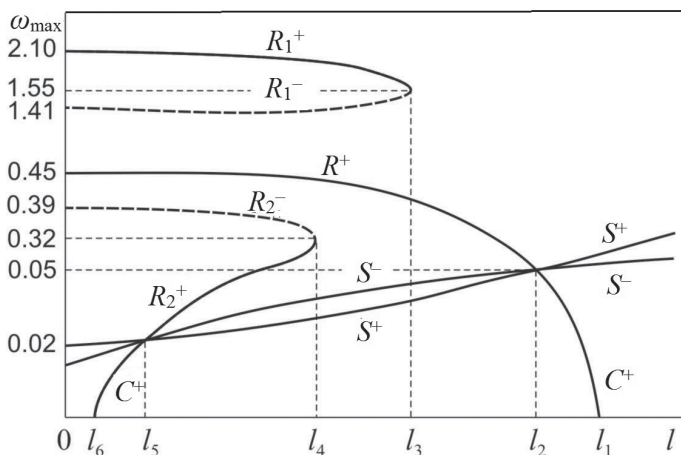
В соответствии с квазистатической моделью обтекания, зависимости  $q(\alpha)$  и  $e(\alpha)$  определяются из статических экспериментов в аэродинамических трубах и полагаются известными. Так, данные зависимости для плоских прямоугольных пластинок различного удлинения приведены в работе [12].

Отметим, что принятая модель аэродинамического момента, введенная в правую часть уравнений (8), содержит неявным образом зависимость от угловой скорости  $\omega$ . Обычно в прикладной аэродинамике подобная зависимость вводится через так называемые вращательные производные и носит линейный характер.

Можно показать, что кинематические уравнения (9) относительно параметров  $\alpha$  и  $v$  в некоторых областях фазовой плоскости имеют неединственное решение. Поскольку в реальном движении маятника характер обтекания и силового воздействия со стороны среды изменяется скорее непрерывно, чем скачками, в дальнейшем примем, что при прохождении области неоднозначности значения угла  $\alpha$  следует выбирать, сохраняя, по возможности, непрерывность его изменения в процессе движения.

Для численного эксперимента была выбрана пластинка с удлинением 8. Значение безразмерного параметра  $k = 0,001$ , а безразмерная длина  $l$  державки варьировалась в диапазоне  $0 \dots 3$ . Установлено, что выделяются несколько критических значений  $l$ , при переходе через которые происходит коренная перестройка фазового портрета системы.

Зависимости максимальных по углу  $\vartheta$  значений угловой скорости  $\omega_{\max}$  на характерных фазовых траекториях от длины державки условно (не в масштабе, но с указанием числовых значений) представлены на рис. 10. Через  $l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) обозначены критические значения длины державки, при этом  $l_1 = e_m$ ; множества  $S^+$  и  $S^-$  — значения  $\omega_{\max}$  на сепаратрисе, входящей в седловую точку  $M_2(\pi, 0)$  и выходящей из седловой точки  $M_3(-\pi, 0)$ , ближайшие к этим точкам;  $C^+$  — значения  $\omega_{\max}$  на устойчивом цикле, не охватывающем фазовый цилиндр;  $R^+$  и  $R^-$  — значения  $\omega_{\max}$  на устойчивом и неустойчивом циклах, охватывающих фазовый цилиндр (кривые  $R^-$  показаны штриховыми линиями). Циклам  $C^+$  соответствуют автоколебательные режимы движения маятника, а циклам  $R^+$  и  $R^-$  — авторотационные.



**Рис. 10.** Зависимости максимальных по углу  $\vartheta$  значений угловой скорости  $\omega_{\max}$  на характерных фазовых траекториях от длины державки

Прокомментируем этот рисунок. При  $l > l_1 = e_m$  выходящая из седловой точки  $M_3(-\pi, 0)$  сепаратриса  $S^-$  расположена ниже входящей в седловую точку  $M_2(\pi, 0)$  сепаратрисы  $S^+$ . Все остальные фазовые траектории стягиваются в начало координат — точку  $M_1(0, 0)$  — единственный аттрактор, которому соответствует устойчивое положение равновесия маятника “по потоку”. Первое критическое значение длины державки  $l = l_1 = e_m$ . В этом случае точка  $M_1(0, 0)$  с точностью до членов третьего порядка малости является центром. Как только длина державки станет меньше первого критического значения, характер фазового портрета качественно меняется. Точка  $M_1(0, 0)$  становится седловой и порождает пару неустойчивых фокусов  $M_4(\alpha_r, 0)$  и  $M_5(-\alpha_r, 0)$ . Таким образом, все три точки неустойчивы, также неустойчивы и седловые точки  $M_2(\pi, 0)$ ,  $M_3(-\pi, 0)$ . В силу диссипативности системы в целом, сепаратрисы, выходящие из точки  $M_1(0, 0)$ , не могут уйти в бесконечность, вследствие чего возникают замкнутые траектории. Сначала это одна замкнутая траектория  $C^+$ , охватывающая три точки  $M_1(0, 0)$ ,  $M_4(\alpha_r, 0)$ ,  $M_5(-\alpha_r, 0)$ . Такой цикл как бы наследует свойства единственного аттрактора, который имел место при  $l > e_m$ . Эта особая бифуркация Андронова – Хопфа обусловлена наличием динамической симметрии в рассматриваемой системе и характером нелинейности позиционной силы. Траектория  $C^+$  является единственным аттрактором.

При дальнейшем уменьшении значения  $l$  цикл  $C^+$  расширяется, сепаратрисы  $S^-$  и  $S^+$  опускаются, и при некотором новом критическом значении длины державки  $l = l_2 < l_1$  ( $l_2 \cong 0,4245$ ) две сепаратрисы совпадают, образуя петлю сепаратрис. На эту же петлю накладывается и расширившийся до предела цикл  $C^+$ . Раскручивающимся фазовым траекториям, лежащим внутри указанной петли, соответствуют все более размашистые колебания маятника, не совершающего ни одного

полного оборота, причем каждое последующее колебание происходит с увеличением интервала времени между последовательными остановками маятника. Фазовым траекториям, расположенным вне этой петли, соответствует вращение маятника в одну и ту же сторону, причем время каждого оборота монотонно возрастает до бесконечности.

При  $l < l_2$  из петли образуются сепаратрисы  $S^-$  и  $S^+$  (теперь  $S^-$  выше, чем  $S^+$ ) и замкнутая устойчивая траектория  $R^+$ , охватывающая фазовый цилиндр (при этом возникает и вторая траектория  $R^+$  в области  $\omega < 0$ ). Траектория  $R^+$  характеризует устойчивый ротационный режим вращения маятника. По мере уменьшения длины державки в интервале  $0 < l < l_2$  сепаратрисы опускаются, а траектории  $R^+$  раздвигаются, угловая скорость маятника в ротационном режиме возрастает. При следующем критическом значении  $l = l_3$  ( $l_3 \cong 0,267 < l_2$ ) в области достаточно больших значений  $\omega$  появляется новая периодическая траектория, причем полуустойчивая: все фазовые траектории, расположенные выше нее, стягиваются к ней, а траектории, находящиеся ниже нее, отталкиваются от нее и спускаются к устойчивой траектории  $R^+$ .

При дальнейшем уменьшении длины державки эта полуустойчивая траектория раздваивается на две периодических: неустойчивую  $R_1^-$  и расположенную выше нее устойчивую  $R_1^+$ , которые постепенно удаляются друг от друга с уменьшением значения  $l$ . Траектория  $R_1^-$  делит области притяжения устойчивых траекторий  $R^+$  и  $R_1^+$ . При этом область притяжения траектории  $R^+$  остается достаточно обширной. Из любого неподвижного начального положения, кроме положений равновесия, маятник “самостоятельно” выходит на авторотационный режим, соответствующий траектории  $R^+$ . Наличие неустойчивой траектории  $R_1^-$  означает, в частности, что маятник “самостоятельно” не может выйти на режим авторотации, соответствующий траектории  $R_1^+$ , для выхода на него необходима предварительная раскрутка.

С последующим уменьшением длины державки при некотором значении  $l = l_4$  ( $l_4 \cong 0,24 < l_3 = 0,267$  для рассматриваемой конкретной пластинки) возникает еще один полуустойчивый цикл, который при дальнейшем уменьшении значения  $l$  распадается на две периодические траектории: устойчивую  $R_2^+$  и расположенную выше нее неустойчивую  $R_2^-$ , обе лежат ниже траектории  $R^+$ . Теперь маятник самостоятельно выходит именно на авторотационный режим  $R_2^+$ , а не на режим  $R^+$ , как было ранее.

С уменьшением значения  $l$  траектория  $R_2^+$  опускается, приближаясь к сепаратрисам  $S^-$  и  $S^+$ , при критическом значении  $l = l_5 \cong 0,00085$  траектория  $R_2^+$  совпадает с сепаратрисами  $S^-$  и  $S^+$ , при этом все они проходят через точку  $M_1(0, 0)$ , совпадая еще и с сепаратрисами точки  $M_1(0, 0)$  и образуя две петли. Внутри петель точки  $M_4(\alpha_r, 0)$  и  $M_5(-\alpha_r, 0)$  — неустойчивые фокусы.

При дальнейшем уменьшении значения  $l$  с этих петель снимаются орбитально устойчивые циклы  $C_1^+$  и  $C_2^+$ , охватывающие точки  $M_4(\alpha_r, 0)$  и  $M_5(-\alpha_r, 0)$  соответственно. Точки  $M_4(\alpha_r, 0)$  и  $M_5(-\alpha_r, 0)$  все еще остаются неустойчивыми фокусами, “выходящие” из них траектории наматываются на циклы  $C_1^+$  и  $C_2^+$  изнутри. Все остальные траектории, расположенные ниже траектории  $R_2^-$ , наматываются на эти же циклы снаружи. Этим траекториям соответствуют колебательные движения маятника, переходящие в один из двух устойчивых автоколебательных режимов.

С уменьшением значения  $l$  указанные циклы сжимаются, и, наконец, при  $l = l_6 \cong 0,00045$  каждый из них “схлопывается” в одну из устойчивых точек  $M_4(\alpha_r, 0)$  или  $M_5(-\alpha_r, 0)$  (типичная бифуркация Андронова–Хопфа). Для всех значений  $l$  из интервала  $l \in [0, l_6)$  эти точки — асимптотически устойчивые фокусы. Теперь траекториям, расположенным ниже траектории  $R_2^-$ , соответствуют затухающие колебания маятника около равновесного положения, близкого к положению “поперек потока”.

В заключение остановимся на случае  $l = 0$ . Задача о поведении такого маятника (флюгера) исследовалась еще Жуковским [2], им было отмечено следующее: “Если такой флюгер поставить против ветра, то он становится перпендикулярно к направлению ветра и имеет в этом положении хорошую устойчивость. Но если мы сообщим флюгеру вращательное движение в том или другом направлении, то он будет продолжать вращаться в заданном направлении”, причем в режиме самовращения “опыт дает приблизительно  $\omega \cong 0,5$ ”.

Любопытно, что даже в рамках рассмотренной здесь динамической системы второго порядка, основанной на квазистатической модели аэродинамического воздействия на пластинку, эти свойства получили свое не только качественное, но и количественное подтверждение ( $\omega \cong 0,45$ , см. рис. 10). Кроме того, из этого же рисунка следует оценка той начальной угловой скорости ( $\omega \cong 0,39$ ), преодоление которой необходимо для выхода в область притяжения авторотационного режима  $R^+$ .

Высокоскоростные режимы авторотации  $R_1^+$  и  $R_1^-$  ранее не обсуждались, возможно, в связи с трудностью их практической реализации или с особенностями конкретного профиля, использованного в расчетах.

**Заключение.** Таким образом, обращение к классическим задачам Жуковского даже при небольшой их модификации позволяет выявить некоторые любопытные свойства в поступательно-вращательном движении тел, взаимодействующих со средой.

*Работа выполнялась при поддержке грантов РФФИ (14-08-01130, 12-01-00364).*



1. Жуковский Н.Е. О парении птиц. Собр. соч. Т. IV. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 5–34.
2. Жуковский Н.Е. О парении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Собр. соч. Т. IV. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 41–91.
3. Голиков А.А., Демешкина В.В., Леутин А.П., Филатьев А.С. Особенности неуправляемого движения в атмосфере отделяющихся частей космических ракет-носителей // ДАН. 2010. Т. 435. № 4. С. 470–474.
4. Антоненко А.И. Уравнения движения объекта с безынерционным парашютом. Сб. науч. тр. МАИ. М., 1977. Вып. 424. С. 63–68.
5. Рысев О.В., Пономарев А.Т., Васильев М.И., Вишняк А.А., Днепров И.В., Мосеев Ю.В. Парашютные системы. М.: Наука, Физматлит, 1996. 288 с.
6. Демидов А.Н., Овчинников М.Ю. Об устойчивости стационарного вращения трехосного тела в атмосфере // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 5. С. 15–23.
7. Баранников С.Н., Гувэрнюк С.В., Мосин А.Ф., Зубков А.Ф., Синявин А.А. Исследование аэродинамических характеристик моделей осесимметричных тел при больших углах атаки и парашютов в аэродинамическом следе. Отчет НИИ механики МГУ № 4877. 2007. 45 с.
8. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
9. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
10. Локишин Б.Я., Самсонов В.А. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ. М.: Изд-во Московского ун-та, 2012. 238 с.
11. Локишин Б.Я., Самсонов В.А. Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника // ПИММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 501–513.
12. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки. Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.

## REFERENCES

- [1] Zhukovskiy N.E. O parenii ptits. Poln. sobr. soch. T. 4. Volny. Vyazkost'. Reaktsiya zhidkosti. [On the soaring birds. Coll. Papers. Vol. 4. Wave. Viscosity. The reaction of liquid]. Moskva–Leningrad, GITTL Publ., 1948, pp. 5–34 (236 p.).
- [2] Zhukovskiy N.E. O parenii v vozdukhke legkikh prodolgovatykh tel, vrashchayushchikhsya okolo svoey prodol'noy osi. Poln. sobr. soch. T. 4. Volny. Vyazkost'. Reaktsiya zhidkosti. [On the soaring birds. Coll. Papers. Vol. 4. Wave. Viscosity. The reaction of liquid]. Moskva–Leningrad, GITTL Publ., 1948, pp. 49–91 (236 p.).
- [3] Golikov A.A., Demeshkina V.V., Leutin A.P., Filat'ev A.S. Features uncontrolled motion of separating parts of space carrier vehicles in the atmosphere. *Dokl. RAN* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2010, vol. 435, no. 4, pp. 470–474 (in Russ.).
- [4] Antonenko A.I. The motion equations of the object with inertialless parachute. *Sb. Nauch. Tr. MAI* [Sc. Proc. Moscow Aviation Institute (National Research Un.)], 1977, iss. 424, pp. 63–68 (in Russ.).
- [5] Rysev O.V., Ponomarev A.T., Vasil'ev M.I., Vishnyak A.A., Dneprov I.V., Moseev Yu.V. Parashyutnye sistemy [Parachute systems]. Moscow, Nauka – Fizmatlit Publ., 1996. 288 p.
- [6] Demidov A.N., Ovchinnikov M.Yu. On the stability of steady rotation of a triaxial body in the atmosphere. *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*. [Bull. Russ. Acad. Sci., Mech. Solids], 1997, no. 5. pp. 15–23 (in Russ.).
- [7] Barannikov S.N., Guvernuyuk S.V., Mosin A.F., Zubkov A.F., Sinyavin A.A. Study the aerodynamic characteristics of models of axisymmetric bodies at high incidence angle and parachutes in the aerodynamic wake. Moscow, Sc. Res. Ins. Mechanics, Moscow State University, Sc.-Tech. Rep. no. 4877, 2007. 45 p. (in Russ., unpublished).

- [8] Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E. Teoriya kolebaniy [Vibration theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 915 p.
- [9] Butenin N.V., Neymark Yu.I., Fufaev N.A. Vvedenie v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 384 p.
- [10] Lokshin B.Ya., Samsonov V.A. Zadacha o dvizhenii tela v soprotivlyayushcheysya srede. Kachestvennyy analiz [The problem of the body motion in a resisting medium. Qualitative analysis]. Moscow, MGU Publ., 2012. 238 p.
- [11] Lokshin B.Ya., Samsonov V.A. Auto-rotational and auto-oscillatory motion modes of the aerodynamic pendulum. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [J. App. Math. Mech.], 2013, vol. 77, iss. 4, pp. 501–513 (in Russ.).
- [12] Tabachnikov V.G. Steady state characteristics of wings at low speeds over the entire alpha range. *Tr. tsentral'nogo aerogidrodinamicheskogo instituta* [Proc. Central Aerohydrodynamical Inst.], 1974, iss. 1621, pp. 79–93 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 03.12.2013

Борис Яковлевич Локшин — канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор более 150 научных работ в области динамики тел, взаимодействующих со средой, прикладных задач о движении тела в сопротивляющейся среде.

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр-т, д. 1.

B.Ya. Lokshin — Cand. Sci. (Phys.–Math.), assoc. professor, leading researcher of the Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University. Author of more than 150 publications in the field of dynamics of bodies interacting with medium, applied problems on body motion in the resisting medium.

Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Michurinskii prosp. 1, Moscow, 119192 Russian Federation.

Виталий Александрович Самсонов — д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, профессор МГУ и РГТУ–МАТИ им. К.Э. Циолковского. Автор более 200 научных работ в области качественного анализа задач о движении тела в силовых полях различной природы.

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр-т, д. 1.

V.A. Samsonov — Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor, principal researcher of the Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, professor of the Tsiolkovskii Russian State Technological University “МАТИ”. Author of more than 200 publications in the field of qualitative analysis of problems on body motion in fields of forces of different nature.

Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Michurinskii prosp. 1, Moscow, 119192 Russian Federation.

Юрий Дмитриевич Селюцкий — канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор более 70 научных работ в области динамики тел в сопротивляющейся среде, имитационного моделирования.

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр-т, д. 1.

Yu.D. Selyutskiy — Cand. Sci. (Phys.–Math.), assoc. professor, leading researcher of the Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University. Author of more than 70 publications in the field of dynamics of bodies in the resisting medium, simulation modeling.

Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Michurinskii prosp. 1, Moscow, 119192 Russian Federation.