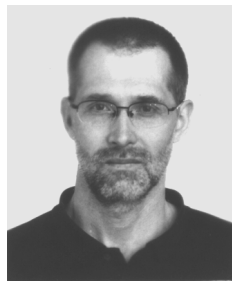


Антон Вячеславович Мاستихин родился в 1962 г., окончил в 1983 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Старший преподаватель кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 6 научных работ.

A.V. Mastikhin (b. 1962) graduated from the Moscow State University n. a. M.V. Lomonosov in 1983. Senior teacher of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 6 publications.



---

УДК 519.6: 532.529.5

В. Д. Сулимов, П. М. Шкапов

## **СГЛАЖИВАЮЩАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ И ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ<sup>1</sup>**

*Рассмотрены задачи многокритериальной оптимизации механических и гидромеханических систем с непрерывными не всюду дифференцируемыми критериальными функциями. Предложен вариант метода линеаризации для задач векторной оптимизации, основанный на построении сглаживающих аппроксимаций критериев. Сформулированы необходимые условия оптимальности. Исследована сходимость алгоритма. Приведены численные примеры решения задач оптимального проектирования системы деформируемых твердых тел и диагностирования фазового состава теплоносителя в контуре реакторной установки.*

Значительное возрастание интереса к оптимизации векторных критериальных функций [1], наблюдающееся в последние полтора десятилетия, обусловлено их использованием в качестве математических моделей при решении многих прикладных задач. К ним относятся такие задачи, как принятие решений в условиях неопределенности, оптимальное проектирование, коррекция расчетных динамических моделей по экспериментальным данным, диагностирование объектов по результатам косвенных измерений. Проблематика имеет широкий круг приложений, в том числе и обеспечение безопасности авиационного транспорта и ядерных энергетических установок [2–4]. Существенно, что критериальные функции, в общем случае, не являются всюду дифференцируемыми по переменным управления [5, 6]. Этим обусловлена актуальность разработки эффективных алгоритмов решения задач

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (гранты E02-4.0-6 и НШ-1816.2003.8).

с векторными критериями на основе методов недифференцируемой оптимизации.

**Постановка задачи.** Пусть заданы функции  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , образующие векторный критерий  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  некоторой многокритериальной задачи оптимизации при ограничениях  $x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j \in J\}$ , где  $x$  — вектор переменных управления,  $g_j(x)$  — функции ограничений,  $J \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j = 1, \dots, k\}$ . Будем рассматривать задачу векторной оптимизации в предположении, что частные критерии и функции ограничений являются непрерывными и не всюду дифференцируемыми. В соответствии с работой [7] введем следующие определения.

**Определение 1.** Решение  $x^0$  называется *слабо эффективным* (эффективным или *Парето-оптимальным*), если не существует такого  $x^1 \neq x^0$ , что  $f(x^1) < (\leq) f(x^0)$ .

**Определение 2.** Решение  $x^0$  называется *собственно эффективным* (оптимальным по Джиоффриону [7]), если оно эффективное и существует такое положительное число  $\theta$ , что для любого  $i = 1, 2, \dots, m$  и тех  $x \in X$ , для которых выполнено неравенство  $f_i(x^0) > f_i(x)$ , и некоторого  $\nu \in \{1, 2, \dots, m\}$  такого, что  $f_\nu(x^0) < f_\nu(x)$ , выполняется неравенство

$$\frac{f_i(x^0) - f_i(x)}{f_\nu(x) - f_\nu(x^0)} \leq \theta.$$

Построим алгоритм решения рассматриваемой задачи, реализующий вариант метода линеаризации для задач многокритериальной оптимизации [8]. Для каждой функции, представляющей частный критерий или функцию ограничений, введем двухпараметрическую сглаживающую аппроксимацию, предложенную в работе [9].

**Аппроксимация критериальных функций.** Пусть требуется обеспечить

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

где  $X$  — допустимое множество, а действительная функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  определяется следующим образом:

$$f(x) = \max_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} \{\varphi_i(x)\}, \quad i \in I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, m\}.$$

Задачи, формулируемые в минимаксной форме, относятся к классу недифференцируемых задач оптимизации [6,10]. Поэтому для их решений применяются специальные методы. Рассматриваемый подход основан на построении сглаживающих аппроксимаций критериальных функций и функций ограничений с последующим применением эффективных методов, разработанных для задач дифференцируемой

оптимизации. Необходимо дать оценку точности вводимых аппроксимаций. Следует отметить, что применительно к задачам динамики механических и гидромеханических систем процедура сглаживания является корректной и не приводит к потере существенной информации [9]. Преимуществом является также возможность создания эффективного программного обеспечения, позволяющего оперативно получать решения с приемлемой для практики точностью. Цель работы состоит в замене каждой недифференцируемой функции некоторой ее аппроксимацией, которая была бы выпуклой и дифференцируемой в области допустимых значений переменных управления. При возрастании точности аппроксимации функций приближенное решение задачи должно сходиться к точному.

Предварительно удобно рассмотреть простейший случай — одномерную функцию вида [9]

$$\gamma(x) = \max_{x \in X \subset \mathbb{R}} \{0, x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Существенно то, что в точке  $x = 0$  данная функция дифференцируема только по направлению. Возможен следующий подход: на числовой оси выделяется отрезок  $[p, q]$ , содержащий точку, в которой функция  $\gamma(x)$  имеет указанную особенность, и на этом отрезке исходная функция заменяется некоторой приближенной функцией, выпуклой и дифференцируемой в каждой точке по построению.

Пусть выбраны числа  $p < 0$  и  $q > 0$ . Вводится двухпараметрическая аппроксимация функции, представленной в виде (1)

$$\tilde{\gamma}(p, q, x) = \begin{cases} 0, & x \leq p, \\ s(p, q, x), & p \leq x \leq q; \\ x, & x \geq q. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $p, q$  — параметры аппроксимации, определяющие соответственно левую и правую границы отрезка  $[p, q]$ , на котором задана сглаживающая функция  $s(p, q, x)$ . Из сравнения соотношений (1) и (2) видно, что приближенная функция  $\tilde{\gamma}(p, q, x)$  совпадает с исходной функцией  $\gamma(x)$  всюду, за исключением отрезка  $[p, q]$ . Потребуем, чтобы функция  $s(p, q, x)$  была выпуклой и по крайней мере один раз дифференцируемой на  $[p, q]$ . Указанными свойствами обладает, например, дуга кривой, описываемой уравнением второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xs + a_{22}s^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}s + a_{33} = 0.$$

Обозначим  $\hat{\alpha} = -p/q$ , тогда

$$s(p, q, 0) = -p\eta(p, q),$$



Поскольку справедливы выражения

$$\tilde{\Phi}_0(p, q, x) = \Phi_0(x) = \varphi_m(x),$$

$$\tilde{\Phi}_{m-1}(p, q, x) = \varphi_1(x) + \tilde{\gamma}\left(p, q, \tilde{\Phi}_{m-2}(p, q, x) - \varphi_1(x)\right),$$

то аппроксимация целевой функции имеет вид

$$\tilde{f}(p, q, x) = \tilde{\Phi}_{m-1}(p, q, x).$$

**Теорема 1** [9]. Пусть  $x^* \in \mathbb{R}^n$  и  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  — точки минимума для  $f(x)$  и  $\tilde{f}(p, q, x)$  соответственно. Тогда

$$0 \leq \tilde{f}(p, q, x) - f(x^*) \leq -p \min_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} \{1, (m-1)\eta(p, q)\}.$$

Следуя работе [8], свяжем с каждой точкой  $x \in \mathbb{R}^n$  вспомогательную задачу:

$$\min_{w, \xi} \left\{ \xi + \frac{1}{2} \|w\|^2 : \left( \nabla \tilde{f}_i(p, q, x), w \right) \leq \xi, \quad i \in I, \right. \\ \left. \left( \nabla \tilde{g}_j(p, q, x), w \right) + \tilde{g}_j(p, q, x) \leq 0, \quad j \in J \right\}, \quad (4)$$

где  $w$  — вектор улучшающего направления;  $\xi$  — параметр;  $\nabla \tilde{f}_i(p, q, x)$  — градиент функции, вычисленный в точке  $x$ ; множества  $I, J$  определены выше.

Введем следующие предположения. Пусть существует такое  $N > 0$ , что:

а) для некоторого  $i \in I$  множество

$$\Omega_N = \left\{ x : \tilde{f}_i(p, q, x) + N\tilde{G}(p, q, x) \leq \tilde{f}_i(p, q, x^0) + N\tilde{G}(p, q, x^0) \right\}$$

ограничено;  $\tilde{G}(p, q, x) = \max\{0, \tilde{g}_1(p, q, x), \dots, \tilde{g}_k(p, q, x)\}$ ;

б) градиенты функций  $\tilde{f}_i(p, q, x)$ ,  $i \in I$ ,  $\tilde{g}_j(p, q, x)$ ,  $j \in J$ , в  $\Omega_N$  удовлетворяют условию Липшица с константой  $L$ ;

в) существуют такие множители Лагранжа задачи (4)  $v_j$ ,  $j \in J$ , что  $\sum_{j \in J} v_j \leq N$ , и последняя разрешима относительно  $w \in \mathbb{R}^n$  для любого  $x \in \Omega_N$ .

Необходимые и достаточные условия, связывающие точку минимума и множители Лагранжа задачи (4), записываются в следующем виде [8]: существуют такие  $u_i \geq 0$ ,  $v_j \geq 0$ , что

$$u_i \left( \left( \nabla \tilde{f}_i(p, q, x), w \right) - \xi \right) = 0, \quad i \in I, \quad (5)$$

$$v_j \left( \left( \nabla \tilde{g}_j(p, q, x), w \right) + \tilde{g}_j(p, q, x) \right) = 0, \quad j \in J, \quad (6)$$

$$\sum_{i \in I} u_i = 1, \quad (7)$$

$$w(x) + \sum_{i \in I} u_i \nabla \tilde{f}_i(p, q, x) + \sum_{j \in J} v_j \nabla \tilde{g}_j(p, q, x) = 0. \quad (8)$$

Решением двойственной к уравнению (4) задачи являются некоторые функции  $u_i(x)$  и  $v_j(x)$ ; исходя из уравнения (8) вектор  $w(x)$  может быть представлен так:

$$w(x) = - \sum_{i \in I} u_i(x) \nabla \tilde{f}_i(p, q, x) - \sum_{j \in J} v_j(x) \nabla \tilde{g}_j(p, q, x).$$

Дальнейшее построение алгоритма связано с использованием ряда оценок изменений сглаживающих аппроксимаций функций  $\tilde{f}_i(p, q, x)$ ,  $i \in I$ , и  $\tilde{g}_j(p, q, x)$ ,  $j \in J$ , при сдвигах вдоль направлений, определяемых решением задачи (4).

Итак, для  $i \in I$  окончательно имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(p, q, x + \alpha w) &\leq \\ &\leq \tilde{f}_i(p, q, x) + \alpha \left( \sum_{j \in J} v_j \tilde{g}_j(p, q, x) - \|w\|^2 \right) + \alpha^2 L \|w\|^2; \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Теперь  $m$  неравенств типа (9) можно заменить одним:

$$\begin{aligned} \max_{i \in I} \left\{ \tilde{f}_i(p, q, x + \alpha w) - \tilde{f}_i(p, q, x) \right\} &\leq \\ &\leq \alpha \left( \sum_{j \in J} v_j \tilde{g}_j(p, q, x) - \|w\|^2 \right) + \alpha^2 L \|w\|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для сглаженных функций ограничений  $\tilde{g}_j(p, q, x)$ ,  $j \in J$ , остается справедливой оценка общего метода линеаризации [10]:

$$\tilde{g}_j(p, q, x + \alpha w) \leq (1 - \alpha) \tilde{G}_j(p, q, x) + \alpha^2 L \|w\|^2. \quad (11)$$

Из соотношений (10), (11) следует неравенство

$$\begin{aligned} \max_{i \in I} \left\{ \tilde{f}_i(p, q, x + \alpha w) - \tilde{f}_i(p, q, x) \right\} + N \tilde{G}(p, q, x + \alpha w) &\leq \\ &\leq N \tilde{G}(p, q, x) + \alpha \left( \sum_{j \in J} v_j \tilde{g}_j(p, q, x) - N \tilde{G}(p, q, x) - \|w\|^2 \right) + \\ &\quad + \alpha (N + 1) L \|w\|^2. \end{aligned}$$

Кроме того, если

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1 - \varepsilon}{(1 + N) L},$$

то справедливо неравенство [8]

$$\max_{i \in I} \left\{ \tilde{f}_i(p, q, x + \alpha w) - \tilde{f}_i(p, q, x) \right\} + N\tilde{G}(p, q, x + \alpha w) \leq N\tilde{G}(p, q, x) - \alpha \varepsilon \|w\|^2. \quad (12)$$

Алгоритм решения задачи векторной оптимизации в рассматриваемой постановке включает в себя следующие основные шаги (пусть  $x^0$  — начальное приближение и выбраны  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , параметры  $p < 0$ ,  $q > 0$  и уже получена точка  $x^k$ ).

*Шаг 1.* Решение вспомогательной задачи (4) при  $x = x^k$ .

*Шаг 2.* Определение первого значения  $s = 0, 1, \dots$ , при котором будет выполнено неравенство (12) для  $\alpha = (1/2)^s$ ; если такое  $s = s_0$  найдено, то положить  $\alpha_k = 2^{-s_0}$ ,  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k w^k$ .

Если сглаживающие аппроксимации критериальных функций и функций ограничений построены, то необходимое условие слабой эффективности, доказанное теоремой Да Канха–Полака–Джоффриона в работе [7], с учетом условия дополняющей нежесткости [10] можно записать так:

$$\sum_{i \in I} u_i \nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0) + \sum_{j \in J} v_j \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0. \quad (13)$$

В работе [7] также показано, что при некоторых предположениях о выпуклости рассматриваемых функций выражение (13) соответствует и достаточным условиям оптимальности точки  $x^0$ . Теперь, с использованием результатов [8], могут быть сформулированы следующие утверждения.

**Лемма 3.** Пусть в точке  $x^0$  выполнено условие регулярности Котла: существует такая точка  $x^1 \in X$ , что для любого  $j \in J$  ( $x^0 = \{j | \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0\}$ ) выполнено неравенство  $\langle \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0), x^1 \rangle < 0$ . Тогда для того, чтобы точка  $x^0$  была слабо эффективной, необходимо, чтобы в ней выполнялось равенство  $w(x^0) = 0$ .

**Лемма 4.** Пусть  $X$  выпукло, вектор-функция  $\tilde{f}$  — псевдовыпукла, а функции  $\tilde{g}_j$  для любого  $j \in J(x^0)$  — квазивыпуклы. Пусть также в точке  $x^0$  выполнено условие регулярности Котла [7]. Тогда для того, чтобы точка  $x^0$  была слабо эффективной, необходимо и достаточно, чтобы в ней выполнялось равенство  $w(x^0) = 0$ .

**Следствие.** Если дополнительно предположить строгую выпуклость вектор-функции  $\tilde{f}$ , то условия регулярности Котла и равенства  $w(x^0) = 0$  будет необходимо и достаточно, чтобы точка  $x^0$  была эффективной (Парето-оптимальной).

Согласно теореме Да Канха–Полака–Джоффриона, выражение (13) является необходимым условием собственной эффективности [7], если

выполнено условие  $u_i > 0$  для любого  $x^0$  и  $\sum_{i \in I} u_i = 1$ . Гарантировать положительность множителей Лагранжа можно, приняв некоторое условие обобщенной регулярности [10]. А именно, пусть в точке  $x^0 \in X$  для любого  $\nu \in I$  векторы  $\nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0)$ ,  $i \neq \nu$ ,  $i \in I$ , и  $\nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0)$ ,  $j \in J(x^0)$ , линейно независимы. Данное условие является обобщением обычного условия регулярности скалярной задачи математического программирования в виде условия линейной независимости градиентов активных ограничений. Содержательный смысл введенного ограничения заключается в том, что фактически требуется одновременное выполнение условий регулярности для  $m$  задач вида

$$\min_{w, \xi} \left\{ \xi + \left( \nabla \tilde{f}_\nu(p, q, x), w \right) + \frac{1}{2} \|w\|^2 : \left( \nabla \tilde{f}_i(p, q, x), w \right) \leq \xi, \quad i \neq \nu, \right. \\ \left. \left( \nabla \tilde{g}_j(p, q, x), w \right) + \tilde{g}_j(p, q, x) \leq 0, \quad j \in J \right\}. \quad (14)$$

Действительно, пусть в точке  $x^0$  выполняются требования линейной независимости градиентов активных ограничений  $m$  задач типа выражения (14) и необходимые условия экстремума этих задач, т. е. пусть существуют такие функции  $u_i^\nu \geq 0$ ,  $i \neq \nu$ ,  $i \in I$ , и  $v_j^\nu \geq 0$ ,  $j \in J$  для любого  $\nu \in I$ , что

$$w(x^0) + \nabla \tilde{f}_\nu(p, q, x^0) + \\ + \sum_{i \neq \nu} u_i^\nu \nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0) + \sum_{j \in J} v_j^\nu \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0, \quad (15)$$

$$u_i^\nu \left( \left( \nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0), w \right) - \xi \right) = 0, \quad i \neq \nu, \quad i \in I, \quad (16)$$

$$v_j^\nu \left( \left( \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0), w \right) + \tilde{g}_j(p, q, x^0) \right) = 0, \quad j \in J, \quad (17)$$

$$\sum_{i \neq \nu} u_i^\nu = 1. \quad (18)$$

Если в точке  $x^0$  выполнено равенство  $w(x^0) = 0$ , то выражения (15)–(17) для любого  $\nu \in I$  можно просуммировать по  $\nu$ . Получим

$$\left( \sum_{\nu \in I} v_j^\nu \right) \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0,$$

$$\sum_{i \in I} \left( 1 + \sum_{\nu \neq i} u_i^\nu \right) \nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0) + \sum_{j \in J} \left( \sum_{\nu \in I} v_j^\nu \right) \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0,$$



т.е. можно указать такие  $\lambda_i > 0$  и  $\mu_j \geq 0$ , что будут справедливы выражения

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0,$$

$$\mu_j \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0, \quad j \in J, \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1,$$

которые определяют необходимые условия экстремума задачи (4) в точке  $x^0$ , такой что  $w(x^0) = 0$ , причем все  $\lambda_i > 0$ , т.е. выполнено условие обобщенной регулярности.

С использованием результатов работы [8] и сглаживающих аппроксимаций можно показать, что условие обобщенной регулярности влечет за собой условие регулярности Коттла. Действительно, из первого непосредственно следует, что для любого  $\nu \in I$  уравнение

$$\sum_{i \neq \nu} \lambda_i \nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \mu_j \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0) = 0 \quad (19)$$

не имеет нетривиальных решений. Но тогда существует точка  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая следующей системе неравенств:

$$\langle \nabla \tilde{f}_i(p, q, x^0), x^1 \rangle < 0, \quad i \neq \nu,$$

$$\langle \nabla \tilde{g}_j(p, q, x^0), x^1 \rangle < 0, \quad j \in J(x^0). \quad (20)$$

Допустим, что такой точки не существует, т.е. система неравенств (20) несовместна. Тогда по теореме Моцкина об альтернативе [7] справедливо уравнение (19), причем не для всех  $\mu_j$ ,  $j \in J(x^0)$ ,  $\lambda_i$ ,  $i \neq \nu$ , равных нулю.

Это противоречиво.

Теперь, с использованием **теоремы 1** [8] и сглаживающих аппроксимаций непрерывных не всюду дифференцируемых функций, можно доказать сходимость алгоритма.

**Теорема 2.** В любой предельной точке  $x^*$ , генерируемой данным алгоритмом, выполняются необходимые (а в выпуклом случае и достаточные) условия слабой эффективности (при дополнительном требовании выполнения условия регулярности Коттла), собственной эффективности (при дополнительном требовании выполнения условия обобщенной регулярности) и  $\|w^k\|^2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Пример 1.** Рассматривается изопериметрическая задача векторной оптимизации системы деформируемых твердых тел — прямолинейных и криволинейных стержней с упругими связями. Диаметр и толщина стенки поперечного сечения трубчатых стержней равны 0,018 м и

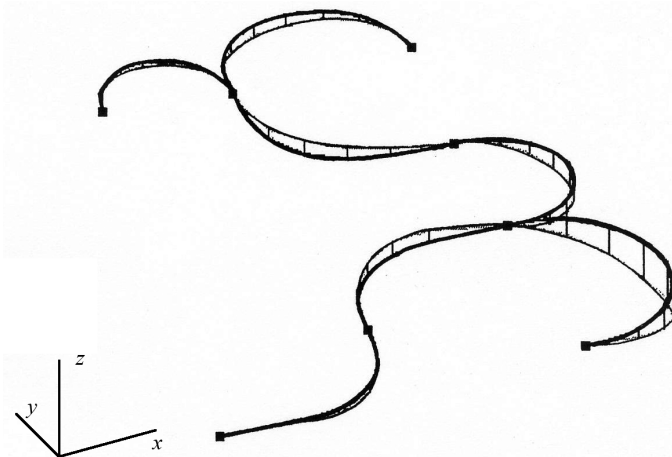


Рис. 1. Первая форма свободных колебаний системы с кратной частотой 29,21 Гц

0,0014 м соответственно; модуль Юнга материала — 200 ГПа; плотность материала — 7850 кг/м<sup>3</sup>. Характерное расстояние между промежуточными опорами составляет 0,7 м. Значения жесткостных характеристик каждой промежуточной опоры в направлении продольной оси стержня равны 10<sup>4</sup> Н/м, в перпендикулярных к оси стержня направлениях — 1,8 · 10<sup>6</sup> Н/м (в плоскости *Oxy*) и 10<sup>6</sup> Н/м; концевые опоры моделируются элементами большой жесткости. В узле разветвления, связывающем *S*-образный и  $\omega$ -образный участки (рис. 1), в направлении оси *x* приложена квазистатическая сила, равная 10 Н. Требуется максимизировать основную частоту свободных колебаний системы и перемещение узла разветвления (оценка компенсирующих свойств системы). Критериальная функция определена в виде  $Q(x) = \hat{w}_1 f_1(x) + \hat{w}_2 f_2(x)$ , где *x* — вектор переменных управления, определяющий форму осевой линии системы и координаты промежуточных опор; *f*<sub>1</sub> — приведенное собственное значение, соответствующее основной частоте свободных колебаний системы; *f*<sub>2</sub> — приведенное перемещение нагружаемого узла;  $\hat{w}_i$  — весовые коэффициенты. Недифференцируемость критериальной функции обусловлена наличием у системы кратных собственных частот. Две низшие формы свободных колебаний системы, соответствующие одному из эффективных решений, показаны на рис. 1, 2.

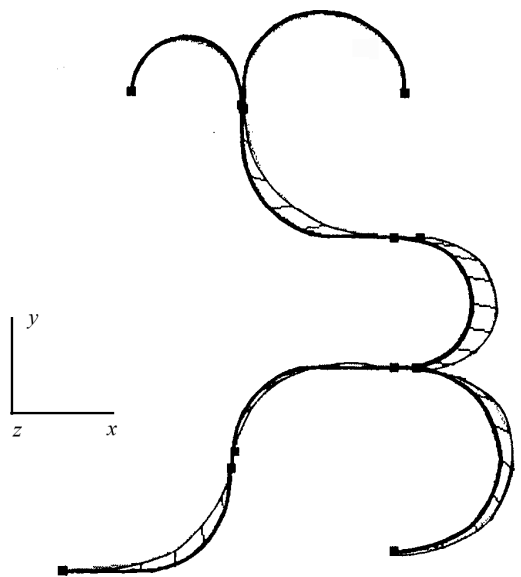
Итерационное уточнение значений функции  $Q(x)$  и нормы  $Nr(w)$  вектора улучшающего направления показаны на рис. 3. Полученное множество эффективных решений, определенное в пространстве критериев  $F_i$ , приведено на рис. 4; здесь

$$F_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \quad i = 1, 2.$$

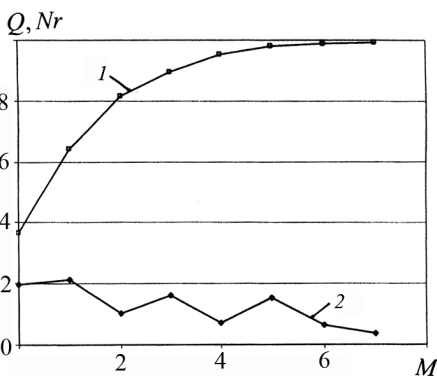
**Пример 2.** В качестве диагностируемой гидросистемы рассматривается главный циркуляционный контур (ГЦК) серийного блока ВВЭР-1000 [11]. Необходимую для идентификации фазового состава теплоносителя информацию содержат спектры частот, представленные в таблице, которые считаются заданными. Управляющими переменными являются относительные значения скорости звука в теплоносителе на участках ГЦК, соответствующих: зоне нагрева теплоносителя в напорном баке системы компенсации объема

( $x_1$ ); выходному объему реактора ( $x_2$ ); активной зоне реактора ( $x_3$ ); проточной части главного циркуляционного насоса теплообменной петли с системой компенсации объема ( $x_4$ ). Результирующая функция рассогласования получена минимаксной сверткой частных критериев, рассматриваемых как равноценные.

Пусть в качестве аномального задан спектр частот  $\omega_i^*$ , совпадающий с приведенным в таблице для случая образования двухфазной

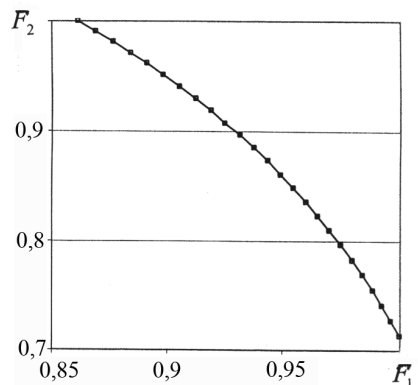


**Рис. 2.** Вторая форма свободных колебаний системы с кратной частотой 29,21 Гц



**Рис. 3.** Изменение значений критериальной функции  $Q$  и нормы  $Nr$  вектора улучшающего направления с ростом числа итераций  $M$ :

1 — критериальная функция; 2 — норма вектора улучшающего направления



**Рис. 4.** Множество эффективных решений в пространстве критериев  $F_1, F_2$

## Нормальный и аномальный спектры частот колебаний теплоносителя в ГКЦ

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$\omega_i$ , Гц	0,89	6,77	9,82	15,44	15,96	18,94	24,55
$\omega_i^*$ , Гц	0,79	6,77	9,82	15,44	15,96	18,55	19,67

смеси в системе компенсации объема. При этом управляющие переменные характеризуются следующими значениями:  $x_1 = 65,61\%$ ;  $x_i = 100\%$ ,  $i = \overline{2, 4}$ . Функция рассогласования является многоэкстремальной, так как определена на ограниченном интервале частот (с учетом семи низших спектральных составляющих). Для решения задачи используется алгоритм глобальной минимизации, предложенный в работе [12]. Изменение значений управляющих переменных с ростом числа итераций показано на рис. 5. Итерационное уточнение функции рассогласования и нормы вектора улучшающего направления представлены на рис. 6.

После двадцати трех итераций получено:  $x_1^{23} \approx 65,56\%$ ;  $x_i^{23} = 100\%$ ,  $i = \overline{2, 4}$ ; при этом значения функции рассогласования и нормы вектора улучшающего направления уменьшились соответственно с 8555,7 до 0,131 и с 100,0 до 0,226. Настройка на заданный аномальный спектр завершена, и получено приближенное решение задачи. Итак, идентифицирована аномалия, вызванная уменьшением скорости звука на участке системы компенсации объема до 65,56% от нормального значения, что можно считать следствием подкипания теплоносителя в напорном баке СКО. Относительная скорость звука на этом участке

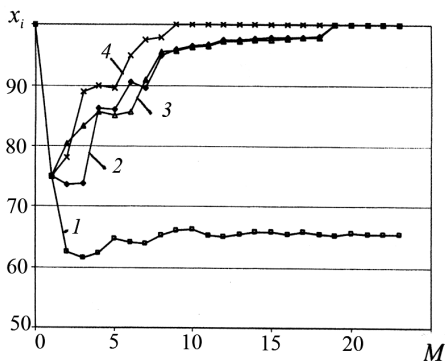


Рис. 5. Изменение значений переменных управления  $x_i$  с ростом числа итераций  $M$ :

1, 2, 3, 4 — переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  соответственно

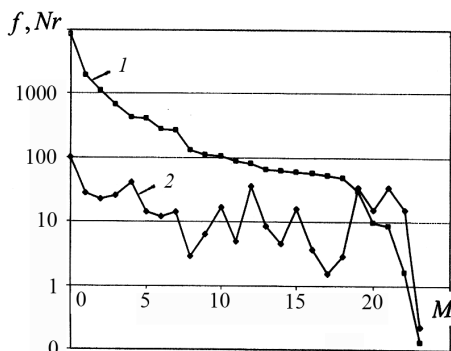


Рис. 6. Уточнение значений функции рассогласования  $f(x)$  1 и нормы  $Nr$  вектора улучшающего направления 2 при возрастании числа итераций  $M$

определена с относительной погрешностью 0,08%; точность настройки спектра собственных частот теплоносителя с учетом семи низших составляющих спектра имеет порядок  $10^{-2}$  Гц.

**Заключение.** Для решения задач векторной оптимизации механических и гидромеханических систем с непрерывными не всюду дифференцируемыми критериальными функциями предложен подход на основе построения сглаживающих аппроксимаций критериальных функций. Сформулированы необходимые условия оптимальности и доказана сходимость алгоритма векторного метода линеаризации при использовании введенных аппроксимаций. Разработаны и реализованы в виде прикладных программ алгоритмы оптимального проектирования и вычислительной диагностики механических и гидромеханических систем. Модельное диагностирование фазового состава теплоносителя в ГЦК блока ВВЭР-1000 показало возможность решения задачи идентификации аномалий без использования информации о формах колебаний; достаточная для практических приложений точность достигается при сравнительно низком уровне вычислительных затрат.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш т о й е р Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, расчет и приложения: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.
2. G ö g e D., L i n k M. Assessment of computational model updating procedures with regard to model validation // *Aerospace Science and Technology*. – 2003. – V. 7, № 1. – P. 47–61.
3. P a z s i t I. Development of core diagnostic methods and their application at Swedish BWRs and PWRs // *J. of Nuclear Science and Technology*. – 1999. – V. 36, № 6. – P. 473–485.
4. P o u l l i k a s A. Effects of two-phase flow on the performance of nuclear reactor cooling pumps // *Progress in Nuclear Energy*. – 2003. – V. 42, № 1. – P. 3–10.
5. Л и т в и н о в В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
6. К л а р к Ф. Оптимизация и негладкий анализ: Пер. с англ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
7. П о д и н о в с к и й В. В., Н о г и н В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
8. П ш е н и ч н ы й Б. Н., С о с н о в с к и й Р. Б. Метод линеаризации для решения многокритериальной задачи оптимизации // *Кибернетика*. – 1987. – № 6. – С. 107–109.
9. С у л и м о в В. Д., Ш к а п о в П. М. Сглаживающая аппроксимация в обратных спектральных задачах для механических и гидромеханических систем // Сб. науч. статей, посвященный 125-летию кафедры теоретической механики ИМТУ–МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – С. 211–226.

10. Pshenichnyj B. N. The Linearization Method for Constrained Optimization. – Berlin et al.: Springer-Verlag, 1994. – 174 p.
11. Кинелев В. Г., Сулимов В. Д., Шкапов П. М. Диагностирование гидросистемы на основе анализа изменений ее частотного спектра // Изв. РАН. Энергетика. – 1998. – № 6. – С. 112–119.
12. Kinelev V. G., Sulimov V. D., Shkapov P. M. Application of global optimization to VVER-1000 reactor diagnostics // Progress in Nuclear Energy. – 2003. – V. 43, № 1–4. – P. 51–56.

Статья поступила в редакцию 11.05.2005



Валерий Дмитриевич Сулимов родился в 1950 г. Окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1973 г. Старший преподаватель кафедры “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области математического моделирования и оптимизации динамических систем.

V.D. Sulimov (b. 1950) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1973. Senior teacher of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 30 publications in the field of mathematical simulation and optimization of dynamic systems.



Павел Михайлович Шкапов родился в 1954 г. Окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1977 г. Доцент кафедры “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области динамики гидромеханических систем.

P.M. Shkapov (b. 1954) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1977. Assoc. professor of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 40 publications in the field of dynamics of hydro-mechanical systems.