

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРЕ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

М.И. Супельняк, А.К. Карышев

Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, Россия
e-mail: max2901@mail.ru

В основе классической теории теплопроводности лежит феноменологическая гипотеза Фурье, согласно которой теплота распространяется в пространстве с бесконечно большой скоростью. В действительности скорость распространения теплоты имеет большое, но конечное значение. Для большинства задач теплопереноса она может не приниматься во внимание, однако в некоторых случаях существенно влияет на результат решения. В таких случаях целесообразно использовать теорию Максвелла–Каттанео–Лькова, учитывающую инерцию теплового потока, что приводит к уравнению теплопроводности гиперболического типа. Решение данного уравнения получено для ограниченного круга задач. В настоящей работе исследовано температурное поле неограниченного цилиндра при нестационарных периодических условиях теплообмена с внешней средой. Получено приближенное аналитическое квазистационарное решение гиперболического уравнения теплопроводности в виде частичной суммы тригонометрического ряда Фурье. Проведены расчеты температурных полей и исследовано влияние времени релаксации теплового потока на размах колебаний температуры цилиндра.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, цилиндр, время релаксации теплового потока, нестационарные периодические условия теплообмена, температурные волны.

TEMPERATURE WAVES ANALYSIS IN A CYLINDER SUBJECT TO HEAT FLOW INERTIA

M.I. Supel'nyak, A.K. Karyshev

Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, Russia.
e-mail: max2901@mail.ru

The phenomenological Fourier hypothesis by which heat propagates in space at infinite velocity underlies classical theory of heat conduction. In fact heat propagation velocity is high, but finite. It can be left out of account in the majority of heat-conduction problems, but has a significant influence on the result of solution in certain cases. In such instances it is appropriate to use Maxwell–Cattaneo–Lykov theory taking into account heat flow inertia that results in hyperbolic thermal conductivity equation. There are a limited number of solutions of this equation for certain problems. In the work, the temperature field of an unbounded cylinder under transient periodical conditions of heat exchange with surroundings has been studied. The approximate analytical quasi-stationary solution of the hyperbolic thermal conductivity equation in the form of the partial sum of the trigonometric Fourier series is obtained. The temperature fields are computed and the heat flow relaxation time influence on the temperature peak-to-peak value of the cylinder is investigated.

Keywords: hyperbolic thermal conductivity equation, cylinder, heat flow relaxation time, transient periodical conditions of heat exchange, temperature waves.

Постановка задачи. В основе классической теории теплопроводности лежит феноменологическое уравнение Фурье, связывающее век-

торное поле плотности теплового потока \vec{q} со скалярным полем температуры T :

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}T, \quad (1)$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала тела.

Согласно уравнению (1) тепловой поток распространяется в пространстве с бесконечной скоростью, поскольку изменение температуры в некоторой области мгновенно сказывается на температуре в сколь угодно удаленной от нее точке. В действительности теплота распространяется с конечной, хотя и довольно большой, скоростью, поэтому в большинстве практических задач ее можно не принимать во внимание. Однако для некоторых задач теплового удара, когда температура поверхности тела или граничащей с ней среды меняется скачкообразно, и ряда других процессов [1, 2] этого сделать нельзя. В таких случаях необходимо вместо соотношения (1) для вывода уравнения теплопроводности воспользоваться теорией Максвелла–Каттанео–Лыкова, учитывающей инерцию теплового потока [1]:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}T - \tau_p \frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где $\tau_p = a/w_q^2$ — время релаксации теплового потока; a — коэффициент температуропроводности материала; w_q — скорость распространения теплоты.

В монографии [3] приводятся более общие, чем (1), законы теплопроводности, в частности соотношение (2). В ряде работ, затрагивающих вопрос о конечной скорости распространения теплоты, отмечается ее качественное влияние на процесс формирования температурных полей. Например, авторы [2] исследовали температурное поле бесконечной пластины при термическом ударе. Результаты расчетов показали, что вблизи поверхностей пластины при малых значениях времени на фронте температурного возмущения имеет место скачок температуры. В некоторый момент времени скачок исчезает, после чего распределение температуры полностью совпадает с классическим решением.

В статье [4] было исследовано квазистационарное температурное поле цилиндра, определяемое нестационарными периодическими условиями теплообмена с внешней средой. Несмотря на то что в расчетах параметры теплового взаимодействия со средой изменялись импульсно в определенные моменты времени, инерция теплового потока не учитывалась. Поэтому в данной работе проведено исследование количественного влияния конечной скорости распространения теплоты на температурные волны и выявлены условия, при которых она должна приниматься во внимание.

Математическая модель. Применение зависимости (2) вместо (1) при выводе уравнения теплопроводности приводит к уравнению гиперболического типа

$$\tau_p \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad \tau > -\infty, \quad 0 < r < R, \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0, \quad T(0, \tau) \neq \infty; \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} = \left(1 + \tau_p \frac{\partial}{\partial \tau} \right) [\alpha(\tau) (T(R, \tau) - T_c(\tau))], \quad (5)$$

где $T = T(r, \tau)$ — температура цилиндра в точке с координатой r в момент времени τ ; R — радиус цилиндра; $\alpha(\tau)$ — коэффициент теплоотдачи; $T_c(\tau)$ — температура среды. Условие теплообмена на поверхности цилиндра (5) можно переписать в виде

$$-\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} = [\alpha(\tau) + \tau_p \dot{\alpha}(\tau)] T(R, \tau) + \tau_p \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} - [q(\tau) + \tau_p \dot{q}(\tau)], \quad (6)$$

где обозначено

$$q(\tau) = \alpha(\tau) T_c(\tau); \quad \dot{\alpha}(\tau) = \frac{d\alpha}{d\tau}; \quad \dot{q}(\tau) = \frac{dq}{d\tau}.$$

В рамках проводимого авторами исследования [4] интерес представляет установившееся температурное поле, определяемое только условиями теплообмена с внешней средой. В этом случае считается, что граничный режим действует неограниченно долгое время, поэтому начальная температура и скорость ее изменения во времени не оказывают влияния на решение, т.е. рассматривается задача без начальных условий [5]. Поскольку интерес представляет квазистационарное решение, начальные условия не принимаются во внимание. При решении краевой задачи (3)–(5) с нестационарным периодическим коэффициентом теплоотдачи используется подход, предложенный в работе [4]. В соответствии с ним представляем искомую зависимость для температуры в виде ряда Фурье

$$T(r, \tau) = \tilde{A}_0^T(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n^T(r) \cos(n\omega\tau) + \tilde{B}_n^T(r) \sin(n\omega\tau), \quad (7)$$

а также остальные периодические функции:

$$\alpha(\tau) = \frac{A_0^\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^\alpha \cos(n\omega\tau) + B_n^\alpha \sin(n\omega\tau), \quad (8)$$

$$q(\tau) = \frac{A_0^q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^q \cos(n\omega\tau) + B_n^q \sin(n\omega\tau), \quad (9)$$

$$\dot{\alpha}(\tau) = \frac{A_0^{\dot{\alpha}}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\dot{\alpha}} \cos(n\omega\tau) + B_n^{\dot{\alpha}} \sin(n\omega\tau), \quad (10)$$

$$\dot{q}(\tau) = \frac{A_0^{\dot{q}}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\dot{q}} \cos(n\omega\tau) + B_n^{\dot{q}} \sin(n\omega\tau), \quad (11)$$

где $\omega = 2\pi/\tau_{\Delta}$ – круговая частота; τ_{Δ} – период изменения параметров среды. Как известно из теории рядов Фурье [6], если функции $\alpha(\tau)$ и $q(\tau)$ являются непрерывными кусочно-гладкими, то ряды (8) и (9) сходятся к ним абсолютно и равномерно. В таком случае ряды (10) и (11) могут быть получены почленным дифференцированием (8) и (9).

Для определения функциональных коэффициентов $\tilde{A}_0^T(r)$, $\tilde{A}_n^T(r)$, $\tilde{B}_n^T(r)$ подставим ряд (7) в уравнения (3), (4) и после группировки членов получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{A}_0^T}{dr} \right) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{A}_n^T}{dr} \right) + n^2 \frac{\tau_p \omega^2}{a} \tilde{A}_n^T - n \frac{\omega}{a} \tilde{B}_n^T = 0; \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{B}_n^T}{dr} \right) + n^2 \frac{\tau_p \omega^2}{a} \tilde{B}_n^T + n \frac{\omega}{a} \tilde{A}_n^T = 0; \quad (14)$$

$$\frac{d\tilde{A}_0^T(0)}{dr} = 0, \quad \tilde{A}_0^T(0) \neq \infty; \quad (15)$$

$$\frac{d\tilde{A}_n^T(0)}{dr} = 0, \quad \tilde{A}_n^T(0) \neq \infty; \quad (16)$$

$$\frac{d\tilde{B}_n^T(0)}{dr} = 0, \quad \tilde{B}_n^T(0) \neq \infty. \quad (17)$$

Решение уравнения (12) с условием (15) имеет вид

$$\tilde{A}_0^T(r) = A_0^T/2 = \text{const},$$

где $A_0^T/2 = \bar{T}$ – среднее значение температуры цилиндра за период. Уравнения (13) и (14) можно свести к уравнению

$$\frac{d^4 \tilde{A}_n^T}{d\hat{r}^4} + \frac{2 d^3 \tilde{A}_n^T}{\hat{r} d\hat{r}^3} + \left(2\mu_n - \frac{1}{\hat{r}^2}\right) \frac{d^2 \tilde{A}_n^T}{d\hat{r}^2} + \left(\frac{2\mu_n}{\hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}^3}\right) \frac{d \tilde{A}_n^T}{d\hat{r}} + (\mu_n^2 + \nu_n^2) \tilde{A}_n^T = 0, \quad (18)$$

где $\hat{r} = r/R$ – безразмерный радиус; $\mu_n = \hat{\tau}_p n^2 / \text{Fo}^*$; $\nu_n = n / \text{Fo}^*$; $\text{Fo}^* = a / (\omega R^2)$ – критерий Фурье; $\hat{\tau}_p = \omega \tau_p$ – безразмерное время релаксации. Для нахождения решения уравнения (18) рассмотрим два операторных уравнения:

$$L_I [y] = \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + (\mu + i\nu) y = 0;$$

$$L_{II} [z] = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + (\mu - i\nu) z = 0,$$

где $\mu \geq 0$, $\nu > 0$ – постоянные коэффициенты; i – мнимая единица. Их решения имеют вид [7]

$$y(x) = \bar{A} J_0 \left(x \sqrt{\mu + i\nu} \right) + \bar{B} Y_0 \left(x \sqrt{\mu + i\nu} \right);$$

$$z(x) = \bar{C} J_0 \left(x \sqrt{\mu - i\nu} \right) + \bar{D} Y_0 \left(x \sqrt{\mu - i\nu} \right),$$

где $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ – функции Бесселя I и II рода нулевого порядка; \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} – произвольные комплексные постоянные. Легко проверить, что полученные функции и, следовательно, их сумма удовлетворяют уравнению типа (18). В самом деле, составив линейную комбинацию, получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 L_I [y]}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dL_I [y]}{dx} + \\ & + (\mu - i\nu) L_I [y] + \frac{d^2 L_{II} [z]}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dL_{II} [z]}{dx} + (\mu + i\nu) L_{II} [z] = \\ & = \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2 d^3 w}{x dx^3} + \left(2\mu - \frac{1}{x^2}\right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\frac{2\mu}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \frac{dw}{dx} + (\mu^2 + \nu^2) w = 0, \end{aligned}$$

где $w(x) = y(x) + z(x)$. Поскольку полученное линейное однородное дифференциальное уравнение IV порядка должно иметь четыре линейно независимых решения, а функции $J_0(x\sqrt{\alpha + i\beta})$, $Y_0(x\sqrt{\alpha + i\beta})$, $J_0(x\sqrt{\alpha - i\beta})$, $Y_0(x\sqrt{\alpha - i\beta})$ линейно независимы, то

$$\begin{aligned} w(x) = & \bar{A} J_0 \left(x \sqrt{\mu + i\nu} \right) + \bar{B} Y_0 \left(x \sqrt{\mu + i\nu} \right) + \\ & + \bar{C} J_0 \left(x \sqrt{\mu - i\nu} \right) + \bar{D} Y_0 \left(x \sqrt{\mu - i\nu} \right). \end{aligned}$$

Теперь можно записать искомое решение для коэффициента

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^T(\hat{r}) = & \overline{\overline{A}}_n^T J_0\left(\hat{r}\sqrt{\mu_n + i\nu_n}\right) + \overline{\overline{B}}_n^T Y_0\left(\hat{r}\sqrt{\mu_n + i\nu_n}\right) + \\ & + \overline{\overline{C}}_n^T J_0\left(\hat{r}\sqrt{\mu_n - i\nu_n}\right) + \overline{\overline{D}}_n^T Y_0\left(\hat{r}\sqrt{\mu_n - i\nu_n}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку уравнение (18) содержит только действительные коэффициенты, то $\tilde{A}_n^T(\hat{r})$ является вещественной функцией, определяемой суперпозицией действительной и мнимой частей (19) [8]. Для ее нахождения учтем, что для аргумента комплексного числа $0 < \varphi < \pi$ справедливо соотношение

$$Y_0\left(x\sqrt{e^{\mp i\varphi}}\right) = \mp i J_0\left(x\sqrt{e^{\mp i\varphi}}\right) - \frac{2}{\pi} K_0\left(x\sqrt{e^{\mp i(\varphi-\pi)}}\right),$$

где $K_0(x)$ – функция Макдональда, и введем обозначения

$$J_0\left(x\sqrt{e^{\mp i\varphi}}\right) = \text{Ber}(x, \varphi) \pm i \text{Bei}(x, \varphi),$$

$$K_0\left(x\sqrt{e^{\mp i(\varphi-\pi)}}\right) = \text{Ker}(x, \varphi) \pm i \text{Kei}(x, \varphi).$$

С учетом этого решение (19) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^T(\hat{r}) = & A_n^T \text{Ber}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) + B_n^T \text{Bei}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) + \\ & + C_n^T \text{Ker}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) + D_n^T \text{Kei}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{|\mu_n + i\nu_n|} = \sqrt[4]{\mu_n^2 + \nu_n^2}; \quad \varphi_n = \arg(\mu_n + i\nu_n) = \arctg(1/(\hat{\tau}_p n));$$

$A_n^T, B_n^T, C_n^T, D_n^T$ – произвольные вещественные постоянные.

Отметим связь введенных функций с функциями Кельвина (также называемыми функциями Томсона) [9], используемыми в решении в частном случае $\tau_p = 0$ [4]:

$$\text{ber}(x) = \text{Ber}(x, \pi/2), \quad \text{bei}(x) = \text{Bei}(x, \pi/2);$$

$$\text{ker}(x) = \text{Ker}(x, \pi/2), \quad \text{kei}(x) = \text{Kei}(x, \pi/2),$$

а также запишем их разложения в ряд Маклорена:

$$\text{Ber}(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\varphi)}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n};$$

$$\text{Bei}(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n\varphi)}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n};$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(x, \varphi) = & -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \text{Ber}(x, \varphi) - \frac{\varphi - \pi}{2} \text{Bei}(x, \varphi) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1) \cos(n\varphi)}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kei}(x, \varphi) = & -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \text{Bei}(x, \varphi) + \frac{\varphi - \pi}{2} \text{Ber}(x, \varphi) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \psi(n+1) \sin(n\varphi)}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \end{aligned}$$

где $\psi(x+1)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Чтобы получить решение для коэффициента $\tilde{B}_n^T(\hat{r})$, воспользуемся уравнением (13) и следующими из приведенных выше рядов соотношениями

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\text{Ber}(x, \varphi)}{dx} \right) + \cos \varphi \text{Ber}(x, \varphi) = -\sin \varphi \text{Bei}(x, \varphi);$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\text{Bei}(x, \varphi)}{dx} \right) + \cos \varphi \text{Bei}(x, \varphi) = \sin \varphi \text{Ber}(x, \varphi);$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\text{Ker}(x, \varphi)}{dx} \right) + \cos \varphi \text{Ker}(x, \varphi) = -\sin \varphi \text{Kei}(x, \varphi);$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\text{Kei}(x, \varphi)}{dx} \right) + \cos \varphi \text{Kei}(x, \varphi) = \sin \varphi \text{Ker}(x, \varphi),$$

с помощью которых находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n^T(\hat{r}) = & -A_n^T \text{Bei}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) + B_n^T \text{Ber}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) - \\ & - C_n^T \text{Kei}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) + D_n^T \text{Ker}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n). \end{aligned}$$

Для вычисления значений функций при больших значениях аргумента необходимо использовать асимптотические представления, которые получаются при модификации известных формул для функций Кельвина [9]:

$$\text{Ber}(x, \varphi) \cong \frac{e^{\eta(x, \varphi)}}{\sqrt{2\pi x}} \cos(\xi(x, \varphi)); \quad \text{Bei}(x, \varphi) \cong \frac{e^{\eta(x, \varphi)}}{\sqrt{2\pi x}} \sin(\xi(x, \varphi)),$$

$$\text{Ker}(x, \varphi) \cong \frac{e^{\eta(-x, \varphi)}}{\sqrt{2x/\pi}} \cos(\xi(-x, \varphi)); \quad \text{Kei}(x, \varphi) \cong \frac{e^{\eta(-x, \varphi)}}{\sqrt{2x/\pi}} \sin(\xi(-x, \varphi)),$$

где

$$\begin{aligned} \eta(x, \varphi) \approx & \sin(\varphi/2)x + \\ & + \frac{\sin(\varphi/2)}{8x} - \frac{\cos(\varphi)}{16x^2} - \frac{25\sin(3\varphi/2)}{384x^3} + \frac{13\cos(2\varphi)}{128x^4}, \end{aligned}$$

$$\xi(x, \varphi) \approx \cos(\varphi/2) x - \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\cos(\varphi/2)}{8x} - \frac{\sin \varphi}{16x^2} + \frac{25\cos(3\varphi/2)}{384x^3} + \frac{13\sin(2\varphi)}{128x^4}.$$

Из условий (16) и (17) находим, что $C_n^T = D_n^T = 0$, поскольку $\text{Ker}(x, \varphi) \rightarrow \infty$ и $\text{Kei}(x, \varphi) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Таким образом,

$$\tilde{A}_n^T(\hat{r}) = A_n^T \text{Ber}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) + B_n^T \text{Bei}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n); \quad (21)$$

$$\tilde{B}_n^T(\hat{r}) = -A_n^T \text{Bei}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n) + B_n^T \text{Ber}(\gamma_n \hat{r}, \varphi_n). \quad (22)$$

Для определения A_0^T, A_n^T, B_n^T используем граничное условие (6) и формулу для перемножения рядов Фурье [6]. Аналогично работе [4], после группировки членов получаем бесконечную систему линейных уравнений с бесчисленным множеством неизвестных, которая может быть записана в матричной форме:

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}, \quad (23)$$

где

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} A_0^T \\ \vdots \\ A_n^T \\ B_n^T \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2(A_0^q + \tau_p A_0^q) \\ \vdots \\ 2(A_n^q + \tau_p A_n^q) \\ 2(B_n^q + \tau_p B_n^q) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

— вектор-столбцы неизвестных постоянных и свободных членов; \mathcal{A} — матрица коэффициентов, записываемая как

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,2n-1} & a_{0,2n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{2n-1,0} & \cdots & a_{2n-1,2n-1} & a_{2n-1,2n} & \cdots \\ a_{2n,0} & \cdots & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$a_{0,0} = A_0^\alpha + \tau_p A_0^{\dot{\alpha}},$$

$$a_{0,2n-1} = 2(A_n^\alpha + \tau_p A_n^{\dot{\alpha}} - \hat{\tau}_p n B_n^\alpha) \text{Ber}(\gamma_n, \varphi_n) - 2(B_n^\alpha + \tau_p B_n^{\dot{\alpha}} + \hat{\tau}_p n A_n^\alpha) \text{Bei}(\gamma_n, \varphi_n),$$

$$a_{0,2n} = 2(A_n^\alpha + \tau_p A_n^{\dot{\alpha}} - \hat{\tau}_p n B_n^\alpha) \text{Bei}(\gamma_n, \varphi_n) + 2(B_n^\alpha + \tau_p B_n^{\dot{\alpha}} + \hat{\tau}_p n A_n^\alpha) \text{Ber}(\gamma_n, \varphi_n),$$

$$a_{2n-1,0} = A_n^\alpha + \tau_p A_n^{\dot{\alpha}},$$

$$a_{2n,0} = B_n^\alpha + \tau_p B_n^{\dot{\alpha}},$$

$$a_{2n-1,2m-1} = \begin{cases} \Theta_{n,m} \text{Ber}(\gamma_m, \varphi_m) - \Sigma_{n,m} \text{Bei}(\gamma_m, \varphi_m) & \text{при } m \neq n; \\ \Theta_{n,n} \text{Ber}(\gamma_n, \varphi_n) - \Sigma_{n,n} \text{Bei}(\gamma_n, \varphi_n) + \Phi_n & \text{при } m = n, \end{cases}$$

$$a_{2n-1,2m} = \begin{cases} \Theta_{n,m} \text{Bei}(\gamma_m, \varphi_m) + \Sigma_{n,m} \text{Ber}(\gamma_m, \varphi_m) & \text{при } m \neq n; \\ \Theta_{n,n} \text{Bei}(\gamma_n, \varphi_n) + \Sigma_{n,n} \text{Ber}(\gamma_n, \varphi_n) + \Psi_n & \text{при } m = n, \end{cases}$$

$$a_{2n,2m-1} = \begin{cases} \Upsilon_{n,m} \text{Ber}(\gamma_m, \varphi_m) + \Omega_{n,m} \text{Bei}(\gamma_m, \varphi_m) & \text{при } m \neq n; \\ \Upsilon_{n,n} \text{Ber}(\gamma_n, \varphi_n) + \Omega_{n,n} \text{Bei}(\gamma_n, \varphi_n) - \Psi_n & \text{при } m = n, \end{cases}$$

$$a_{2n,2m} = \begin{cases} \Upsilon_{n,m} \text{Bei}(\gamma_m, \varphi_m) - \Omega_{n,m} \text{Ber}(\gamma_m, \varphi_m) & \text{при } m \neq n; \\ \Upsilon_{n,n} \text{Bei}(\gamma_n, \varphi_n) - \Omega_{n,n} \text{Ber}(\gamma_n, \varphi_n) + \Phi_n & \text{при } m = n, \end{cases}$$

$$\Theta_{n,m} = A_{m+n}^\alpha + A_{m-n}^\alpha + \tau_p (A_{m+n}^{\dot{\alpha}} + A_{m-n}^{\dot{\alpha}}) - \widehat{\tau}_p m (B_{m+n}^\alpha + B_{m-n}^\alpha),$$

$$\Sigma_{n,m} = B_{m+n}^\alpha + B_{m-n}^\alpha + \tau_p (B_{m+n}^{\dot{\alpha}} + B_{m-n}^{\dot{\alpha}}) + \widehat{\tau}_p m (A_{m+n}^\alpha + A_{m-n}^\alpha),$$

$$\Upsilon_{n,m} = B_{m+n}^\alpha - B_{m-n}^\alpha + \tau_p (B_{m+n}^{\dot{\alpha}} - B_{m-n}^{\dot{\alpha}}) + \widehat{\tau}_p m (A_{m+n}^\alpha - A_{m-n}^\alpha),$$

$$\Omega_{n,m} = A_{m+n}^\alpha - A_{m-n}^\alpha + \tau_p (A_{m+n}^{\dot{\alpha}} - A_{m-n}^{\dot{\alpha}}) - \widehat{\tau}_p m (B_{m+n}^\alpha - B_{m-n}^\alpha),$$

$$\Phi_n = 2 \frac{\lambda}{R} \gamma_n \text{Ber}'(\gamma_n, \varphi_n), \quad \Psi_n = 2 \frac{\lambda}{R} \gamma_n \text{Bei}'(\gamma_n, \varphi_n),$$

$$B_0^\alpha = 0, \quad A_{-k}^\alpha = A_k^\alpha, \quad B_{-k}^\alpha = -B_k^\alpha, \quad B_0^{\dot{\alpha}} = 0, \quad A_{-k}^{\dot{\alpha}} = A_k^{\dot{\alpha}}, \quad B_{-k}^{\dot{\alpha}} = -B_k^{\dot{\alpha}},$$

$$\text{Ber}'(x, \varphi) = \frac{d \text{Ber}(x, \varphi)}{dx}; \quad \text{Bei}'(x, \varphi) = \frac{d \text{Bei}(x, \varphi)}{dx},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Системы бесконечных уравнений рассмотрены в монографиях [10, 11], где приведены условия существования и единственности решения регулярных систем и методы его нахождения. Система (23) не является регулярной, однако для ее приближенного решения можно воспользоваться методом редукции [11], причем для удобства вычислений необходимо учесть асимптотические формулы и объединить экспоненциальные множители с постоянными неизвестными. Доказательство редукции бесконечной системы можно свести к получению априорной оценки для нормы разности решений краевой задачи (3)–(5) и ее редуцированного аналога [12]. Такая оценка позволила бы также доказать единственность и устойчивость решения (3)–(5). Поскольку для подобного типа задач еще не получены соответствующие

оценки, вопрос о редукции системы на практике можно решить последовательным увеличением параметра редукции k до обеспечения оптимальной точности решения. После приближенного определения коэффициентов в (21) и (22) до номера k из редуцированного уравнения (23) температура может быть записана в виде частичной суммы ряда Фурье

$$T(r, \tau) \cong \frac{A_0^T}{2} + \sum_{n=1}^k \tilde{A}_n^T(r) \cos(n\omega\tau) + \tilde{B}_n^T(r) \sin(n\omega\tau). \quad (24)$$

Отметим, что решение также можно получить в безразмерном виде, для которого краевая задача (3)–(5) записывается как

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{\tau}^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \hat{\tau}} &= \text{Fo}^* \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{r}} \right), \quad \hat{\tau} > -\infty, \quad 0 < \hat{r} < 1; \\ \frac{\partial \theta(0, \hat{\tau})}{\partial \hat{r}} &= 0, \quad \theta(0, \hat{\tau}) \neq \infty; \\ -\frac{\partial \theta(1, \hat{\tau})}{\partial \hat{r}} &= \left(1 + \hat{\tau}_p \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}} \right) [\text{Bi}(\hat{\tau}) (\theta(1, \hat{\tau}) - \theta_c(\hat{\tau}))], \end{aligned}$$

где $\theta(\hat{r}, \hat{\tau}) = [T(\hat{r}, \hat{\tau}) - \bar{T}_c] / \Delta T_c$ – безразмерная избыточная температура цилиндра; $\theta_c(\hat{\tau}) = [T_c(\hat{\tau}) - \bar{T}_c] / \Delta T_c$ – безразмерная избыточная температура среды; $\bar{T}_c = A_0^T / 2$ – среднее значение температуры среды за период; $\Delta T_c = T_c^{\max} - T_c^{\min}$ – размах колебаний температуры среды; T_c^{\max} и T_c^{\min} – наибольшее и наименьшее значения температуры среды за период; $\hat{\tau} = \omega\tau$ – безразмерное время; $\text{Bi}(\hat{\tau}) = \alpha(\hat{\tau}) R / \lambda$ – критерий Био. Зависимость для $\theta(\hat{r}, \hat{\tau})$ запишется в виде, аналогичном формуле (24), а критериями подобия в данном случае являются $\hat{\tau}_p$, Fo^* , $\text{Bi}(\hat{\tau})$, $\theta_c(\hat{\tau})$. В работе [4] проведен подробный анализ безразмерной формы решения краевой задачи для параболического уравнения теплопроводности, соответствующей рассматриваемой в данной работе при $\hat{\tau}_p = 0$. Аналогично может быть исследован и случай $\hat{\tau}_p \neq 0$.

Результаты расчетов и их обсуждение. В качестве практического применения полученных зависимостей были проведены расчеты с их использованием для ступенчатых зависимостей температуры среды и коэффициента теплоотдачи от времени (рис. 1). Степень паровой парциальности $e_{\text{п}} = 0,3$ представляет собой отношение длительности охлаждения за период $\tau_{\Delta} = 1$ с к величине этого периода. В процессе охлаждения цилиндра параметры среды принимают значения $T_{\text{п}} = 500$ К, $\alpha_{\text{п}} = 3000$ Вт/(м²·К), а в процессе нагревания $T_{\text{г}} = 1500$ К, $\alpha_{\text{г}} = 2000$ Вт/(м²·К) (индексы “п” и “г” означают соответственно пар и газ). Вполне очевидно, что для подобных ступенчатых законов изменения параметров среды во времени $\dot{q}(\tau) \equiv 0$. В качестве материала

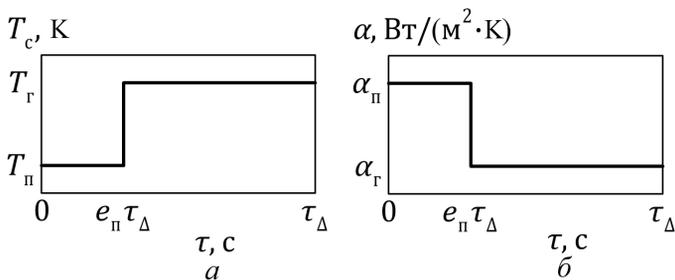


Рис. 1. Зависимость от времени температуры среды (а) и коэффициента теплоотдачи (б)

цилиндра был выбран жаропрочный сплав ХН80ТБЮ с теплофизическими свойствами [13] $a = 7,225 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda = 27 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Для металлов время релаксации составляет 10^{-11} с [1]. Радиус цилиндра принимался равным 15 мм.

В расчетах использовался параметр редукции $k = 2000$. Такое большое значение объясняется медленной сходимостью ряда Фурье для поверхности цилиндра в окрестности моментов времени, соответствующих разрывам первого рода в граничном условии (5). Тем не менее, решение редуцированной системы уравнений занимало всего лишь несколько минут. Расчет же температуры во внутренних точках цилиндра мог быть проведен с необходимой точностью при гораздо меньшей величине k . Например, для расчета \bar{T} с точностью до второго знака после запятой достаточно $k = 100$.

Результаты расчетов, представленные на рис. 2, а, показывают, что распределение температуры в цилиндре во времени полностью совпадает с частным случаем $\tau_p = 0$ [4]. Отсюда следует вывод, что инерцию теплового потока можно не принимать во внимание, если характерное время периодического процесса значительно превышает

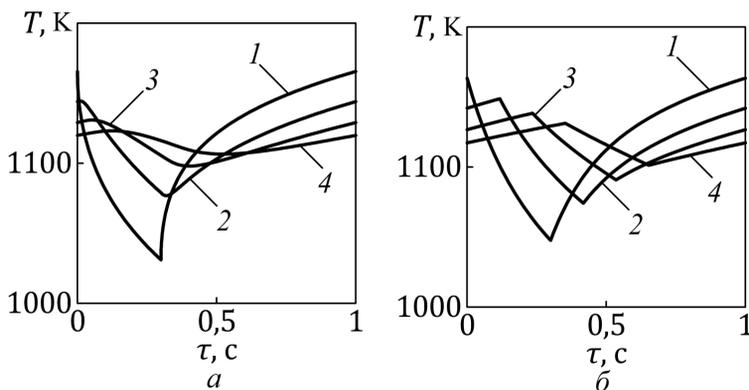


Рис. 2. Зависимость температуры цилиндра от времени ($\tau_{\Delta} = 1 \text{ с}$) при радиусе 15 (1), 14 (2), 13 (3) и 12 мм (4) и значениях $\tau_p = 10^{-11}$ (а) и 10^{-1} с (б)

время релаксации. Для изучения влияния конечной скорости распространения теплоты на температурные волны в цилиндре были проведены расчеты при нетипичном для металлов значении $\tau_p = 0,1$ с, что соответствовало изменению только одного критерия подобия $\hat{\tau}_p$. Полученные результаты представлены на рис. 2, б. Интересно отметить качественное влияние времени релаксации теплового потока на температурное поле цилиндра: с его увеличением температурные волны приобретают треугольную форму. При этом количественное влияние проявляется в уменьшении амплитуды колебаний температуры цилиндра на поверхности, более медленном, чем ее снижение с уменьшением радиуса (рис. 3), а также в небольшом увеличении средней температуры цилиндра за период: для рассмотренных случаев она составила соответственно 1109 и 1117 К.

Выводы. Получено приближенное аналитическое выражение для квазистационарного температурного поля цилиндра при нестационарных периодических условиях теплообмена с окружающей средой, учитывающее инерцию теплового потока. Проведенные с его использованием расчеты показали, что влияние конечной скорости распространения теплоты на температурные волны проявляется при сопоставимых значениях периода процесса и времени релаксации теплового потока.

Работа проводилась при финансовой поддержке Государственного заказчика по госконтракту № 16.526.12.6013 между Минобрнауки РФ и ЗАО НПВП “Турбокон”

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
2. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. наук. 2010. № 5 (21). С. 159–169.
3. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
4. *Карышев А.К., Супельняк М.И.* Температурное поле цилиндра при нестационарных периодических условиях теплообмена с окружающей средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2011. № 4. С. 54–70.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 798 с.

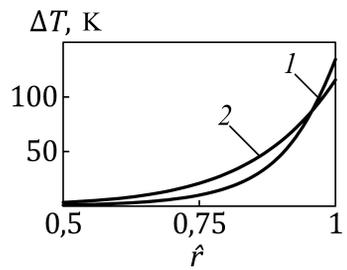


Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний температуры цилиндра от безразмерного радиуса при значениях $\tau_p = 10^{-11}$ (1) и 10^{-1} с (2)

6. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 384 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ЛКИ, 2008. 472 с.
9. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: ИЛ, 1949. 799 с.
10. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматлит, 1960. 472 с.
11. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.–Л.: Физматлит, 1962. 708 с.
12. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12, № 3. С. 627–638.
13. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. М.: Атомиздат, 1968. 484 с.

REFERENCES

1. Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in the theory of heat transfer in solids]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p.
2. Kudinov V.A., Kudinov I.V. A method for the exact analytical solution of the hyperbolic heat transfer equation by orthogonal methods. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. of the Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 5 (21), pp. 159–169 (in Russ.).
3. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskiy S.Yu. Volnovye yavleniya teploprovodnosti: Sistemno-strukturnyy podkhod [Wave heat transfer phenomena. Systematic and structural approach]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 296 p.
4. Karyshev A.K., Supel'nyak M.I. Temperature field of a cylinder under periodic unsteady conditions of heat exchange with the environment. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Ser. Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Mech. Eng.], 2011, no. 4, pp. 54–70 (in Russ.).
5. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Mathematical physics equations]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 798 p.
6. Tolstov G.P. Ryady Fur'e [Fourier series]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 384 p.
7. Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig, Teubner Publ., 1959. 668 p. (Russ. ed.: Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam. Moscow, Nauka Publ., 1971. 576 p.).
8. Stepanov V.V. Kurs differentsial'nykh uravneniy [Course on differential equations]. Moscow, LKI, 2008. 472 p.
9. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. New York, MacMillan, 1948. 689 p. (Russ. ed.: Vatson G.N. Teoriya besselevykh funktsiy. Chast' I. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1949. 799 p.).
10. Cooke R.G. Infinite matrices and sequence spaces. New York, Dover Publ., 1966. 347 p. (Russ. ed.: Kuk R. Beskonechnye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960. 472 p.).
11. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of mathematical analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962. 708 p.
12. Jit Malov Yu.I., Martinson L.K., Pavlov K.B. The solution of some mixed boundary value problems of hydrodynamics in conducting media by separation of variables. *Zh. Vychisl. Matem. i Matem. Fiz.* [J. Comp. Math. and Math. Phys.], 1972. vol. 12, no. 3, pp. 627–638 (in Russ.).

13. *Chirkin V.S.* Teplofizicheskie svoystva materialov yadernoy tekhniki [Thermophysical properties of materials for nuclear technology]. Moscow, Atomizdat Publ., 1968. 484 p.

Статья поступила в редакцию 22.03.2012

Максим Игоревич Супельняк — аспирант кафедры “Тепловые двигатели и теплофизика” Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 13 научных работ в области теплофизики.

Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, 248000, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2.

M.I. Supel'nyak (b. 1988) — post-graduate of the Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 13 publications in the field of thermal physics.

Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, ul. Bazhenova, 2, Kaluga, 248000 Russia.

Анатолий Константинович Карышев — канд. техн. наук, профессор кафедры “Тепловые двигатели и теплофизика” Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области теплофизики.

Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, 248000, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2.

A.K. Karyshev — Cand. Sci. (Eng.), professor of “Thermal Engines and Thermal Physics” department of the Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 90 publications in the field of thermal physics.

Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, ul. Bazhenova, 2, Kaluga, 248000 Russia.