УДК 519.22+368

А. Л. Сунчалина

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ БОНУС-МАЛУС

Рассмотрен ряд моделей оптимальных систем бонус-малус. В основу построения положен принцип рандомизации, т.е. отказ от предположения об однородности страхового портфеля, что позволяет вычислять условные характеристики для данного договора. Различные системы бонус-малус базируются на разных моделях для числа страховых выплат по страховым случаям. Для предложенных моделей найдены формулы расчета параметров моделей с использованием метода моментов. Приведены примеры численных расчетов оптимальных систем бонус-малус по реальным данным.

В практике страхования не жизни (*non-life insurance*) широкое распространение получила система бонус-малус (СБМ). Это система назначения страховых премий, при которой премия страхователя, имевшего за предыдущие периоды страхования страховые случаи, увеличивается (*малус*). Соответственно, страхователь, у которого за предыдущие периоды страхования не было страховых случаев, получает *бонус*, т.е. его страховая премия уменьшается. Введение СБМ способствует уменьшению числа страховых случаев, а также привносит в систему страхования некий элемент "справедливости": платит больше тот, кто вносит больший риск в портфель страховой компании. В данной статье будем интерпретировать все полученные результаты на примере страхования автомобилей.

Различные СБМ могут существенно отличаться друг от друга. Подробный анализ мировой практики автомобильного страхования содержится в работах [1–3]. Подавляющее большинство СБМ строится по следующему принципу: 1) задается разбиение всех страхователей на классы на основе априорной информации (мощность двигателя, возраст, стаж вождения и т.д.) 2) правила перехода из класса в класс определяются по количеству страховых случаев, имевших место в предыдущие периоды страхования. В работах [1, 2] показано, что большинство СБМ обладает рядом недостатков, среди которых отметим два — финансовая несбалансированность и несправедливость по отношению к некоторым группам страхователей. При неудачно сформулированных правилах перехода, с течением времени возникают такие распределения страхователей по классам, при которых расходы по выплатам бонусов не покрываются доходами от собираемых малусов, и страховая компания вынуждена менять базовую ставку страховой премии. Несправедливость по отношению к страхователям может выражаться, например, в том, что два страхователя с одинаковыми априорными показателями и имеющие одинаковое число страховых случаев могут оказаться в разных классах и, следовательно, выплачивать различные страховые премии.

В работе [1] дано определение оптимальной системы бонус-малус: *СБМ называется оптимальной, если она соответствует требованиям как страховщика, так и страхователя, т.е,. если она финансово сбалансирована (для закрытого портфеля средний уровень премий не меняется год от года) и справедлива (каждый страхователь платит премию, размер которой пропорционален риску, который он представляет).*

В работах [1, 2] разработан вариант оптимальной СБМ, построенной на основе описания числа страховых случаев по всему портфелю отрицательным биномиальным распределением. Предполагается, что число страховых случаев по фиксированному договору имеет пуассоновское распределение с параметром, характеризующим риск данного договора, а по всей совокупности договоров параметр является случайной величиной, распределенной по закону гамма-распределения. В этом случае число страховых случаев по всему портфелю имеет отрицательное биномиальное распределение. Страховая премия вычисляется как условное математическое ожидание страховых выплат, при условии, что по данному договору за заданный промежуток времени произошло известное число страховых случаев. В работе [4] построена оптимальная СБМ для случая, когда число страховых случаев описывается распределением Гофмана или конечной смесью пуассоновских распределений. В работе [7] предложен вариант оптимальной СБМ в случае, когда в качестве параметра пуассоновского распределения используется инвертированное гауссовское распределение. Большинство СБМ основаны на учете только числа страховых случаев.

В настоящей работе рассматривается ряд других моделей для описания распределения числа страховых случаев, а также предлагаются модели оптимальных СБМ, учитывающих не только число страховых случаев, но и размеры страховых выплат (некоторые из моделей, учитывающих размеры страховых выплат, рассматривались в работах [1], [6]). Следует отметить, что подбор модели для описания числа страховых случаев является непростой задачей. В работе [7] приведен сравнительный анализ ряда таких моделей с использованием статистических данных по трем европейским странам (Бельгия, Италия и

Франции). Анализ показал, что ни одна из моделей не имеет явного приоритета в адекватности описания статистических данных. Что касается моделей для описания размеров страховых выплат, то здесь исследователи сталкиваются с еще большими трудностями. Основные проблемы заключаются в точном описании "хвостов" распределений, так как именно они вносят существенный вклад в общую сумму страховых выплат. Также отметим, что в данной работе не рассматриваются вопросы априорной классификации, т.е., с точки зрения страховщика, портфель является однородным (обычно априорная информация используется в виде дополнительных коэффициентов к базовой ставке страховой премии).

Принцип рандомизации. Основа для применения принципа рандомизации ([4], [9]) — это отказ от предположения об однородности портфеля страховых договоров. Предполагается, что исследуемая характеристика Z (число страховых случаев или размеры страховых выплат) зависят от некоторого параметра θ. Истинное значение параметра θ страховщику не известно (его нельзя определить по априорной информации). При заданном значении параметра θ исследуемая характеристика имеет известную плотность распределения $f(x,\alpha\,|\theta)$, зависящую от параметра α, общего для всей совокупности страховых договоров. Относительно параметра θ предполагается, что он является случайной величиной, с заданной плотностью распределения $g_\theta(x,\beta)$, зависящей от параметра β (параметры α и β могут быть векторными). Тогда плотность распределения исследуемой характеристики для случайно выбранного договора вычисляется по формуле полной вероятности

$$f(x,\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\alpha\,|s)\,g_\theta(s,\beta)ds,$$

и, следовательно, вся совокупность страховых договоров описывается двумя параметрами α и β, для оценки которых могут быть использованы метод моментов или метод максимального правдоподобия.

Предположим, что относительно данного договора имеется следующая информация:

$$A(m,k,X)=\left\{\begin{array}{l}\textit{за предыдущие } m \textit{ периодов страхова-}\\ \textit{ния имело место } k \textit{ страховых случаев,}\\ \textit{по которым были осуществлены вы-}\\ \textit{платы в размере } X=(x_1,x_2,\ldots,x_k)\end{array}\right\}. \quad (1)$$

В оптимальной СБМ в качестве страховой премии используется условное математическое ожидание исследуемой характеристики при условии, что произошло событие $A(m,k,X)$. Для его расчета сначала находится апостериорная плотность распределения параметра θ

$$g_\theta(s\,|A(m,k,X)\,) = \frac{P(A(m,k,X)\,|\theta = s)g_\theta(s,\beta)}{P(A(m,k,X))}, \qquad (2)$$

далее находим апостериорное распределение исследуемой характеристики

$$f(x,\alpha,\beta\,|A(m,k,X)\,) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\alpha\,|s)\,g_\theta(s\,|A(m,k,X)\,)ds \qquad (3)$$

и, наконец, находим апостериорное среднее исследуемой характеристики

$$E(Z\,|A(m,k,X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\alpha,\beta\,|A(m,k,X)\,)ds. \qquad (4)$$

При этом остается свобода выбора параметрических семейств $f(x,\alpha\,|\theta)$ и $g_\theta(x,\beta)$, и остается открытым вопрос, какие из параметрических семейств следует использовать при расчете страховых премий. Ответ на этот вопрос может быть получен путем анализа конкретных статистических данных страховых компаний или данных по всей стране, если в стране вводится законом единая СБМ.

Некоторые модели для числа страховых случаев: *а) гамма-пуассоновская модель.* Как уже отмечалось выше, эта модель подробно исследована в работах [1, 2], поэтому здесь для нее приводятся только результаты с целью сравнения с другими моделями.

Пусть ν — число страховых случаев для случайно выбранного договора. В соответствии с принципом рандомизации, предположим, что при фиксированном значении параметра θ, условное распределение случайной величины ν является пуассоновским:

$$p(k\,|\theta) = \frac{\theta^k e^\theta}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Относительно параметра θ предполагается, что он является случайной величиной, имеющей гамма-распределение с плотностью

$$g_\theta(t,\lambda,\alpha) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t > 0,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция.

Распределение числа страховых случаев по всему портфелю является отрицательным биномиальным распределением с параметрами $p = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$ и α:

$$p(k, \lambda, \alpha) = P(\nu = k) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!} p^{\alpha}(1-p)^k, \; k = 0, 1, \ldots$$

Среднее число страховых случаев по всему портфелю $E(\nu) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$.

Обозначим через $\nu(m)$ случайную величину, равную числу страховых случаев за m лет. Тогда $\nu(m)$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $\widetilde{p} = \dfrac{\lambda}{\lambda + m}$ и α, а условное распределение параметра θ при условии $\{\nu(m) = k\}$ — это гамма-распределение с параметрами $\widetilde{\alpha} = \alpha + k$ и $\widetilde{\lambda} = \lambda + m$. В результате, для апостериорного среднего получаем $E(\nu \,|\nu(m) = k\,) = \dfrac{\alpha + k}{\lambda + m}$, и, наконец, страховая премия, выраженная в процентах к базовой премии, вычисляется по формуле

$$P'(m, k) = 100 \frac{(\alpha + k)\lambda}{\alpha(\lambda + m)}.$$

б) бета-биномиальная модель. Пусть условное распределение числа страховых случаев при заданном значении параметра ϑявляется биномиальным с параметрами θ и n, т.е.

$$p(k, n \,\big|\theta) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad \theta \in (0, 1),$$

где параметр n — общий для всей совокупности договоров, а параметр θ, в соответствии с принципом рандомизации, характеризует каждый отдельно взятый договор.

Относительно параметра θ предполагаем, что он является случайным с плотностью распределения

$$g_\theta\left(t, \alpha, \beta\right) = \frac{1}{B\left(\alpha, \beta\right)} t^{\alpha-1} \left(1-t\right)^{\beta-1}, \quad t \in (0, 1), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \tag{5}$$

где $B\left(\alpha, \beta\right) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}\left(1-t\right)^{\beta-1} dt$ — бета-функция Эйлера.

Для случайно выбранного договора число страховых случаев ν имеет следующее распределение:

$$P\left(k, \alpha, \beta, n\right) = P(\nu = k) = C_n^k \frac{B\left(\alpha + k, \beta + n - k\right)}{B\left(\alpha, \beta\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Среднее число страховых случаев для случайно выбранного договора равно

$$E(\nu) = \sum_{k=0}^{n} kP(k, \alpha, \beta, n) = n\frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Опуская вычисления, отметим, что случайная величина $\nu(m)$ при заданном значении параметра θ имеет биномиальное распределение с параметрами θ и nm, а по всему портфелю

$$P(\nu(m) = k) = C_{mn}^{k}\frac{B(\alpha+k, \beta+mn-k)}{B(\alpha, \beta)} = P(k, \alpha, \beta, mn).$$

Условная плотность распределения параметра θ при условии $\{\nu(m) = k\}$ имеет вид

$$g_{\theta}(t\,|\nu(m) = k) = \frac{t^{\alpha+k-1}(1-t)^{\beta+mn-k-1}}{B(\alpha+k, \beta+mn-k)}.$$

Таким образом, условное распределение параметра θ при условии $\{\nu(m) = k\}$ является бета-распределением с параметрами $\alpha+k$ и $\beta+nm-k$. Для апостериорного среднего получаем

$$E(\nu\,|\nu(m) = k) = \frac{n(\alpha+k)}{\alpha+\beta+mn}.$$

Страховая премия, выраженная в процентах к базовой премии, вычисляется по формуле

$$P'(m,k) = 100\frac{(\alpha+k)(\alpha+\beta)}{\alpha(\alpha+\beta+mn)}.$$

В заключение выпишем оценки параметров, полученные по методу моментов:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{\nu}s^2 - n\bar{\nu}^2 + \bar{\nu}^3}{n(\bar{\nu}-s^2) - \bar{\nu}^2}, \qquad \hat{\beta} = \frac{(n-\bar{\nu})\,(s^2 - n\bar{\nu} + \bar{\nu}^2)}{n(\bar{\nu}-s^2) - \bar{\nu}^2},$$

где $\bar{\nu}$ и s^2 — выборочные среднее и дисперсия числа страховых случаев.

в) бета-геометрическая модель. Пусть условное распределение числа страховых случаев при заданном значении параметра θ является геометрическим распределением с параметрами θ, т.е.

$$p(k|\theta) = \theta(1-\theta)^k, \quad \theta \in (0,\,1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Относительно параметра θ предполагаем, что он является случайным с плотностью бета-распределения (5). Для случайно выбранного договора число страховых случаев ν имеет следующее распределение:

$$P(k, \alpha, \beta) = P(\nu = k) = \frac{B(\alpha+1, \beta+k)}{B(\alpha, \beta)}.$$

Среднее число страховых случаев для случайно выбранного договора равно

$$E\left(\nu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}kP\left(k,\alpha,\beta\right)=\frac{\beta}{\alpha-1}.$$

Заметим, что условное распределение случайной величины $\nu(m)$ при заданном значении параметра θ есть отрицательное биномиальное распределение с параметрами θ и m:

$$P\left(\nu\left(m\right)=k\left|\theta\right.\right)=\frac{\theta^{m}\left(1-\theta\right)^{k}m\left(m+1\right)\ldots\left(m+k-1\right)}{k!}.$$

Безусловное распределение случайной величины $\nu(m)$ имеет вид

$$P\left(\nu\left(m\right)=k\right)=\frac{m\left(m+1\right)\ldots\left(m+k-1\right)}{k!}\frac{B\left(\alpha+m,\beta+k\right)}{B\left(\alpha,\beta\right)}=\\ C_{m+k-1}^{k}\frac{B(\alpha+m,\beta+k)}{B(\alpha,\beta)}. \quad (6)$$

Условная плотность параметра θ при условии $\{\nu(m)=k\}$ является плотностью бета-распределения с параметрами $\alpha+m$ и $\beta+k$:

$$g_{\theta}\left(t,\alpha,\beta\left|\nu\left(m\right)=k\right.\right)=\frac{t^{\alpha+m-1}\left(1-t\right)^{\beta+k-1}}{B\left(\alpha+m,\beta+k\right)}.$$

Отсюда для апостериорного среднего получаем

$$E(\nu|\nu(m)=k)=\frac{\beta+k}{\alpha|m-1}.$$

Страховая премия, выраженная в процентах к базовой премии, вычисляется по формуле

$$P'(m,k)=100\frac{(\alpha-1)(\beta+k)}{(\alpha-1+m)\beta}.$$

Оценки параметров модели, полученные с помощью метода моментов, имеют вид

$$\hat{\alpha}=\frac{2s^{2}}{s^{2}-\bar{\nu}\left(\bar{\nu}+1\right)},\quad\hat{\beta}=\bar{\nu}\cdot\frac{s^{2}+\bar{\nu}\left(\bar{\nu}+1\right)}{s^{2}-\bar{\nu}\left(\bar{\nu}+1\right)}.$$

Модели для ожидаемых страховых выплат. Пусть Y — случайная величина, равная страховой выплате при наступлении страхового случая для случайно выбранного договора.

В соответствии с принципом рандомизации мы предполагаем, что каждый договор характеризуется своим значением параметра θ (неизвестным страховщику).

При заданном значении параметра θ случайная величина Y имеет гамма-распределение с плотностью

$$f_Y\left(x, r\left|\theta\right.\right) = \frac{x^{r-1}\theta^r e^{-\theta x}}{\Gamma\left(r\right)}, \quad x > 0, \quad r > 0, \quad \theta > 0.$$

Относительно параметра θ предполагаем, что он является случайным с плотностью

$$g_\theta\left(t, a, b\right) = \frac{t^{b-1}a^b e^{-at}}{\Gamma\left(b\right)}, \quad t > 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Параметр r является общим для всей совокупности страховых договоров. Таким образом, для описания страховых выплат мы воспользуемся моделью, которую можно было бы назвать *гамма-гамма* моделью.

Найдем плотность случайной величины Y для случайно выбранного договора.

$$f_Y\left(x, r, a, b\right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty f_Y\left(x, r\left|t\right.\right) g_\theta\left(t, a, b\right)dt = \int\limits_0^\infty \frac{x^{r-1}t^{r+b-1}a^b e^{-(x+a)t}}{\Gamma\left(r\right)\Gamma\left(b\right)}dt =$$

$$= \frac{x^{r-1}a^b\Gamma\left(r+b\right)}{\Gamma\left(r\right)\Gamma\left(b\right)\left(x+a\right)^{r+b}} = \frac{a^b}{B\left(r, b\right)} \cdot \frac{x^{r-1}}{\left(x+a\right)^{r+b}}.$$

Отметим один важный частный случай. При $r = 1$ мы имеем дело с гамма-экспоненциальной моделью. В этом случае

$$f_Y\left(x, a, b\right) = \frac{ba^b}{\left(x+a\right)^{b+1}} = \frac{b}{a}\left(\frac{a}{x+a}\right)^{b+1}$$

является плотностью хорошо известного распределения Парето с параметрами b и a. Оптимальная СБМ, в которой для расчета ожидаемых страховых выплат использовано распределение Парето, рассмотрена в работе [5].

Среднее значение страховых выплат по страховому портфелю определяется формулой

$$E\left(Y\right) = \int\limits_0^\infty \frac{a^b x^r}{B\left(r, b\right)\left(x+a\right)^{r+b}}dx = \frac{aB\left(r+1, b-1\right)}{B\left(r, b\right)} = r\frac{a}{b-1}.$$

Опуская вычисления, выпишем условную плотность распределения параметра θ при условии $A(m,k,X)$ (см. формулу (1)):

$$f_Y\left(x,r,a,b\left|A\left(m,k,X\right)\right.\right)=\frac{1}{B\left(r,\tilde{b}\right)}\cdot\frac{x^{r-1}}{(x+\tilde{a})^{r+\tilde{b}}},$$

где $\widetilde{a}=a+\sum\limits_{j=1}^{k}x_j$, $\widetilde{b}=b+kr.$

Таким образом, мы видим, что условное распределение Y при условии $A(m,k,X)$ получается из безусловного распределения заменой параметров a и b на $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, т.е.

$$f_Y\left(x,r,a,b\left|A\left(m,k,X\right)\right.\right)=f_Y\left(x,\ r,\ a+\sum_{j=1}^{k}x_l,\ b+kr\right).$$

Следовательно, для апостериорного среднего имеем

$$E\left(Y\left|A\left(m,k,X\right)\right.\right)=r\frac{a+\sum\limits_{j=1}^{k}x_j}{b+kr-1}=r\frac{a+k\bar{x}}{b+kr-1}.$$

Таким образом, поправочный коэффициент для страховой премии, учитывающий величину страховых выплат по данному договору, вычисляется по формуле

$$k_s=\frac{(b-1)(a+k\bar{x})}{a(b-1+kr)}.$$

Оценки параметров для модели гамма-гамма с использованием метода моментов имеют вид

$$\hat{a}=\frac{2\mu_1-\mu_2\mu_3-\mu_1\mu_2^2}{2\mu_1^2-\mu_1^2\mu_2-\mu_1\mu_3},\quad \hat{b}=\frac{4\mu_2^2-\mu_1^2\mu_2-3\mu_1\mu_3}{2\mu_1^2-\mu_1^2\mu_2-\mu_1\mu_3},$$

$$\hat{r}=\frac{2\mu_1\left(\mu_2^2-\mu_1\mu_3\right)}{2\mu_1^2-\mu_1^2\mu_2-\mu_1\mu_3},$$

где μ_i — выборочный момент i-го порядка, рассчитанный по совокупности всех страховых выплат за предыдущий период страхования ($i=1,\ 2,\ 3$).

В частном случае для гамма-экспоненциальной модели (распределение Парето) получаем

$$E\left(Y\right)=\frac{a}{b-1},\quad E(Y\left|A(m,k,X)\right.)=\frac{a+\sum\limits_{j=1}^{k}x_j}{b-1+k}=\frac{a+k\bar{x}}{b-1+k}.$$

В этом случае поправочный коэффициент к базовой страховой премии вычисляется по формуле

$$k_s = \frac{(b-1)(a+k\bar{x})}{a(b-1+k)}.$$

Оценки параметров для гамма-экспоненциальной модели имеют вид

$$\hat{a} = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2 - 2\mu_1^2}, \quad \hat{b} = 2\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_2 - 2\mu_1^2}.$$

Таблица 1

Данные о страховых выплатах по Италии

k	fk	nk
0	0,8631	863100
1	0,111161	111161
2	0,020405	20405
3	0,00403	4030
4	0,000929	929
5	0,000246	246
6	0,000129	129
7	0	0
	Всего	1000000

Численный расчет страховых премий. Следует заметить, что реальные данные о числе страховых случаев, а тем более о страховых выплатах по ним найти весьма трудно. Более или менее подробные данные относительно Бельгии содержатся в работе [1]. Мы рассмотрим наши модели на примере реальных данных по Италии [7]. В данной работе приведена частота числа страховых случаев без указания общего числа. Мы возьмем общее число страховых случаев за 1 000 000. Данные по Италии приведены в табл. 1.

В следующих табл. 2–4 приведены оптимальные СБМ, построенные с использованием различных моделей описания числа страховых случаев. В этих системах бонус-малус учитывается только количество страховых случаев. Премии рассчитаны в процентах по отношению к базовой премии.

Таблица 2

Гамма-пуассоновская модель: $\alpha = 0{,}5138$, $\lambda = 3{,}0263$, $p = 0{,}7516$

$m\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	75,2	221,5	367,7	514,0	660,3	806,6
2	60,2	177,4	294,6	411,8	528,9	646,1
3	50,2	148,0	245,7	343,4	441,2	538,9
4	43,1	126,9	210,7	294,6	378,4	462,2
5	37,7	111,1	184,5	257,9	331,2	404,6
6	33,5	98,8	164,0	229,3	294,5	359,8
7	30,2	88,9	147,7	206,4	265,2	323,9
8	27,4	80,9	134,3	187,7	241,1	294,5

Таблица 3

Бета-биномиальная модель: $n = 20$, $\alpha = 0{,}04634$, $\beta = 54{,}1197$

$m\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	73,2	231,1	389,1	547,0	705,0	862,9
2	57,7	182,3	306,8	431,3	555,9	680,4
3	47,6	150,4	253,2	356,1	458,9	561,7
4	40,6	128,1	215,6	303,1	390,7	478,2
5	35,3	111,5	187,7	263,9	340,1	416,3
6	31,3	98,7	166,2	233,7	301,2	368,6
7	28,1	88,6	149,1	209,7	270,2	330,7
8	25,4	80,3	135,2	190,1	245,0	299,9

Таблица 4

Бета-геометрическая модель: $\alpha = 16{,}5623$, $\beta = 2{,}6422$

$m\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	94,0	129,5	165,1	200,6	236,2	271,8
2	88,6	122,1	155,7	189,2	222,8	256,3
3	83,8	115,6	147,3	179,0	210,8	242,5
4	79,6	109,7	139,8	169,9	200,0	230,1
5	75,7	104,3	133,0	161,6	190,3	218,9
6	72,2	99,5	126,8	154,1	181,4	208,8
7	69,0	95,1	121,2	147,3	173,4	199,5
8	66,0	91,0	116,0	141,0	166,0	191,0

Из приведенных табл. 2–4 видно, что СБМ, использующие гамма-пуассоновскую и бета-биномиальную модели, различаются не существенно. В то же время СБМ, построенная с использованием бета-геометрической модели является существенно более “мягкой”, т.е. она предоставляет меньшие скидки в случае отсутствия страховых случаев, и в меньшей степени увеличивает страховые премии при наличии страховых случаев.

В заключение рассмотрим пример оптимальной системы бонус-малус, учитывающей не только число страховых случаев, но и размеры страховых выплат по ним. Реальные данные заимствованы из работы [1] (табл. 5). В качестве модели для описания размера страховых выплат используется гамма-экспоненциальная модель (для модели гамма-гамма оценки параметров по методу моментов дают неудовлетворительные результаты, а оценивание по методу максимального правдоподобия требует привлечения численных методов, что представляет отдельную задачу). Число страховых случаев будем описывать гамма-пуассоновской моделью.

Таблица 5

Страховые данные по Бельгии

По количеству страховых случаев		По стоимости страховых случаев	
Число страховых случаев	Количество страховых случаев	Число страховых случаев	Средняя стоимость
0	96978	34368	466
1	9420	29408	1462
2	704	27432	2443
3	43	36473	3874
4	9	44059	6935
5	0	28409	13884
6	0	16435	29886
7	0	4440	66675
		4306	499755
Всего	106974	225330	17336,6

В табл. 6 приведена оптимальная СБМ, построенная с использованием гамма-пуассоновской модели и учитывающая только число страховых случаев.

Таблица 6

Гамма-пуассоновская модель: $\alpha = 1{,}605$**,** $\lambda = 15{,}878$**,** $p = 0{,}941$

m	k = 0	1	2	3	4	5
0	100					
1	94,1	152,7	211,3	269,9	328,5	387,2
2	88,8	144,2	199,5	254,8	310,2	365,5
3	84,1	136,5	188,9	241,3	293,7	346,1
4	79,9	129,6	179,4	229,2	279,0	328,7
5	76,1	123,4	170,8	218,2	265,6	313,0
6	72,6	117,8	163,0	208,2	253,5	298,7
7	69,4	112,6	155,9	199,1	242,4	285,6
8	66,5	107,9	149,4	190,8	232,2	273,7

Из табл. 6 видно, что одна и та же модель оптимальной СБМ для различных стран дает размеры страховых премий, существенно отличающиеся друг от друга. Так, страхователь, имевший в течение первого года один страховой случай в Италии, в следующем году должен платить страховую премию в размере 221,5 % от базовой, в то время как в Бельгии эта премия составляет 152,7 %.

Для расчета страховых премий с учетом не только числа страховых случаев, но и размера страховых выплат по ним, воспользуемся следующей формулой:

$$P'(m,k,\overline{x}) = k_s P'(m,k) = 100\frac{(\alpha+k)\lambda}{\alpha(\lambda+m)}\cdot\frac{(b-1)(a+k\bar{x})}{a(b-1+k)},$$

где $\alpha = 1{,}605$, $\lambda = 15{,}878$, $a = 19725{,}98$, $b = 2{,}138$.

В табл. 7–9 приведены страховые премии, рассчитанные для различных значений величины $\overline{x}$.

Таблица 7

Страховые премии при $\overline{x} = 5000$

m	k					
	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	94,1	112,5	162,5	212,6	262,7	312,8
2	88,8	103,8	142,2	180,6	219,1	257,5
3	84,1	98,9	137,1	175,4	213,7	251,9
4	79,9	93,8	129,7	165,6	201,5	237,5
5	76,1	89,3	123,6	157,9	192,2	226,5
6	72,6	85,2	117,9	150,6	183,3	216,1
7	69,4	81,5	112,8	144,1	175,3	206,6
8	66,5	78,1	108,1	138,0	168,0	198,0

Таблица 8

Страховые премии при $\overline{x} = 17336$

m	k					
	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	94,1	152,7	211,3	269,9	328,5	387,2
2	88,8	144,2	199,5	254,8	310,2	365,5
3	84,1	136,5	188,9	241,3	293,7	346,1
4	79,9	129,6	179,4	229,2	279,0	328,7
5	76,1	123,4	170,8	218,2	265,6	313,0
6	72,6	117,8	163,0	208,2	253,5	298,7
7	69,4	112,6	155,9	199,1	242,4	285,6
8	66,5	107,9	149,4	190,8	232,2	273,7

Таблица 9

Страховые премии при $\overline{x} = 30000$

m	k					
	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	94,1	213,0	298,2	383,0	467,6	552,2
2	88,8	202,1	280,2	358,1	436,1	514,0
3	84,1	191,6	265,2	338,7	412,3	485,9
4	79,9	181,9	251,8	321,6	391,5	461,3
5	76,1	173,2	239,7	306,2	372,7	439,2
6	72,6	165,3	228,8	292,2	355,7	419,2
7	69,4	158,1	218,8	279,5	340,1	400,8
8	66,5	151,5	209,6	267,8	325,9	384,0

Отметим, что оптимальная СБМ, учитывающая только число страховых случаев, совпадает с СБМ, учитывающей размеры страховых выплат в случае, когда $\overline{x} = 17336$, т.е., если средние страховые выплаты по данному договору совпадают со средними выплатами по всей совокупности страховых договоров.

Выводы. При построении оптимальной СБМ могут быть использованы различные модели числа страховых случаев и размеров страховых выплат. Для использования той или иной оптимальной СБМ необходим анализ реальных данных. Причем анализ реальных данных показывает, что для различных стран, а возможно и для различных регионов одной страны, модели для построения оптимальных СБМ могут быть различными. Предложенные модели оптимальных СБМ могут быть протестированы на данных любой страховой компании. При этом следует отметить, что для расчета параметров любой из предложенных моделей не требуется никаких сложных вычислений (достаточно использовать пакет Exel).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Карташову Г.Д. за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л е м е р Ж. Автомобильное страхование. Актуарные проблемы. – М.: “Янус-К”, 1998. – 316 с.
2. Л е м е р Ж. Системы бонус-малус в автомобильном страховании. – М.: “Янус-К”, 1998. – 268 с.
3. L e m a i r e J., Z i H o n g m i n. A Comparive Analysis of 30 Bonus Malus systems. Astin Bulletin. – 1994. – V. 24. – P. 287–309.
4. Ф а л и н Г. И. Математический анализ рисков в страховании. – Рос. Юрид. Издательский дом, 1994. – 85 с.
5. W a l h i n J. F., P a r i s J. Using Mixed Poisson distribution in connection with Bonus-Malus Systems. Astin Bulletin. – 1999. – V. 29. – P. 81–99.
6. F r a n g o s N. E., S. D. V r o n t o s S. D. Design of Optimal Bonus-Malus Systems with a Frequency and a Severity Compnent on an Individual Basis in Automobile Insurance. Astin Bulletin. – 2001. – V. 31. – P. 1–22.
7. H u l i n L., J u s t e n s D. General properties of mixed Poisson distributions. Application to data fitting in the case of “automobile collision claims” distributions. 2nd Conference in Actuarial Science & Finance in Samos, September 20–22, 2002.
8. T r a m b l a y L. Using the Poisson Inverse Gaussian in Bonus-Malus Systems. Astin Bulletin. – 1992. – V. 22. – P. 97–106.
9. В е т р о в а А. Л. Расчет страховых премий с учетом предыстории // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2004. – № 3. – С. 99–106.

Статья поступила в редакцию 21.03.2006

Анна Леонидовна Сунчалина родилась в 1981 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2004 г. Инженер-математик кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор одной научной публикации.

A.L. Sunchalina (b. 1981) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2004. Engineer-mathematician of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications.