

В. Е. П а л о ш

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Исследована устойчивость прямолинейной формы свободного вязкоупругого стержня, на один из концов которого действует постоянная по величине следящая сила. Рассмотрена модель Кельвина–Фойгта. При сравнении критических значений следящей силы в отсутствие вязкости с моделью Кельвина–Фойгта обнаружена потеря устойчивости прямолинейной формы стержня. Найдено предельное значение следящей силы при стремлении коэффициента вязкости к нулю и исследовано поведение действительных частей корней характеристического уравнения в зависимости от ее величины

Уравнение движения стержня. Рассматривается тонкий вязкоупругий однородный стержень длиной l , совершающий равноускоренное движение под действием постоянной по величине следящей силы P , приложенной к одному из концов (рис. 1). В случае отсутствия вязкости эта задача была рассмотрена в работах [1, 2].

Задачи подобного класса ставятся при расчете на устойчивость упругих систем, нагруженных неконсервативными силами. В частно-

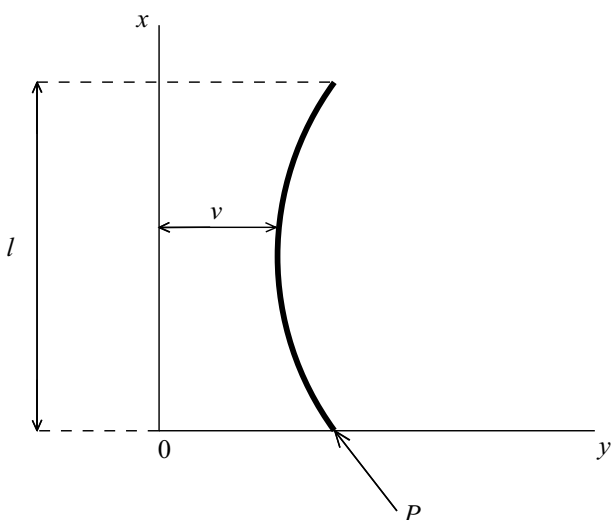


Рис. 1. Стержень под действием следящей силы, Oxy — местная система координат

сти, данную задачу можно рассматривать как модель ракеты, движущуюся под действием реактивной тяги, поскольку реактивная сила является следящей.

Определяющим соотношением для материала стержня служит модель Кельвина–Фойгта

$$\sigma = E(\varepsilon + \tau \dot{\varepsilon}),$$

где σ — напряжение, ε — деформация, τ — время релаксации, E — модуль упругости.

Уравнение малых колебаний стержня, приведенное в книге [3], имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EJ\tau \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{l-x}{l} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho f \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

где ρ — плотность материала, f — площадь сечения, EJ — жесткость сечения на изгиб.

Исследование устойчивости прямолинейной формы. Заменой переменных

$$x \rightarrow lx, \quad t \rightarrow l^2 \sqrt{\frac{\rho f}{EJ}} t, \quad v \rightarrow lv$$

уравнение движения стержня приводится к безразмерному виду

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + k \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial t} + p(1-x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - p \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $k = \sqrt{\frac{EJ}{\rho f}} \frac{\tau}{l^2}$ — коэффициент внутренней вязкости; $p = \frac{Pl^2}{EJ}$ — безразмерная сила.

Граничные условия

$$\frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v(0, t)}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(1, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v(1, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (2)$$

соответствуют равенству нулю проекций на ось y изгибающих моментов и перерезывающих сил на концах стержня.

Решение уравнения (1) будем искать в следующем виде:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x),$$

где функции u_n и φ_n находятся из решения задачи

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

с граничными условиями (2).

Подставляя $v_n(x, t) = u_n(t) \varphi_n(x)$ и разделяя переменные, получим

$$u_n \varphi_n'''' + \ddot{u}_n \varphi_n = 0,$$

$$\frac{\varphi_n''''}{\varphi_n} = -\frac{\ddot{u}_n}{u_n} = \delta_n^4,$$

где δ_n — некоторая постоянная, поскольку получено равенство двух функций, зависящих от разных переменных. Таким образом, функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\varphi_n'''' - \delta_n^4 \varphi_n = 0, \quad (3)$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi_n(x) = C_1 \cos \delta_n x + C_2 \sin \delta_n x + C_3 \operatorname{ch} \delta_n x + C_4 \operatorname{sh} \delta_n x.$$

С учетом граничных условий (2) приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \delta_n^2(-C_1 + C_3) = 0, \\ \delta_n^3(-C_2 + C_4) = 0, \\ \delta_n^2(-C_1 \cos \delta_n - C_2 \sin \delta_n + C_3 \operatorname{ch} \delta_n + C_4 \operatorname{sh} \delta_n) = 0, \\ \delta_n^3(C_1 \sin \delta_n - C_2 \cos \delta_n + C_3 \operatorname{sh} \delta_n + C_4 \operatorname{ch} \delta_n) = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы данная однородная система имела ненулевое решение, определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} -\delta_n^2 & 0 & \delta_n^2 & 0 \\ 0 & -\delta_n^3 & 0 & \delta_n^3 \\ -\delta_n^2 \cos \delta_n & -\delta_n^2 \sin \delta_n & \delta_n^2 \operatorname{ch} \delta_n & \delta_n^2 \operatorname{sh} \delta_n \\ \delta_n^3 \sin \delta_n & -\delta_n^3 \cos \delta_n & \delta_n^3 \operatorname{sh} \delta_n & \delta_n^3 \operatorname{ch} \delta_n \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$\operatorname{ch} \delta_n \cos \delta_n = 1.$$

Решением задачи (3), удовлетворяющим условиям (2), является функция

$$\varphi_n(x) = \gamma_n(\cos \delta_n x + \operatorname{ch} \delta_n x) + \operatorname{sh} \delta_n x + \sin \delta_n x,$$

где

$$\gamma_n = \frac{\cos \delta_n - \operatorname{ch} \delta_n}{\sin \delta_n + \operatorname{sh} \delta_n}.$$

Первые три значения δ_n таковы: $\delta_1 \approx 4,73$, $\delta_2 \approx 7,853$, $\delta_3 \approx 10,996$. Ограничимся случаем первых трех слагаемых:

$$v(x, t) = u_1(t)\varphi_1(x) + u_2(t)\varphi_2(x) + u_3(t)\varphi_3(x). \quad (4)$$

Далее выполняем следующие преобразования: подставляем выражение (4) в уравнение (1), умножаем на $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, и интегрируем по x от 0 до 1, учитывая, что $\varphi_1'''' = \delta_1^4 \varphi_1$, $\varphi_2'''' = \delta_2^4 \varphi_2$ и $\varphi_3'''' = \delta_3^4 \varphi_3$,

функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ ортогональны на интервале $[0, 1]$. Это дает систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_1 + k\delta_1^4 \dot{u}_1 + u_1(\delta_1^4 + e_{11}p) + \\ \quad + u_2p(e_{12} - \alpha_{12}) + e_{13}pu_3 = 0, \\ \ddot{u}_2 + k\delta_2^4 \dot{u}_2 + u_1p(e_{21} - \alpha_{21}) + \\ \quad + u_2(\delta_2^4 + e_{22}p) + u_3p(e_{23} - \alpha_{23}) = 0, \\ \ddot{u}_3 + k\delta_3^4 \dot{u}_3 + u_1e_{31}pu_1 + \\ \quad + u_2p(e_{32} - \alpha_{32}) + u_3(\delta_3^4 + e_{33}p) = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

В системе уравнений (5) введены следующие обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{ij} = \int_0^1 (1-x)\varphi_j''(x)\varphi_i(x)dx \cdot \left(\int_0^1 \varphi_i^2(x)dx \right)^{-1}, \\ \alpha_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i(x)dx \cdot \left(\int_0^1 \varphi_i^2(x)dx \right)^{-1}. \end{array} \right.$$

Числовые значения этих коэффициентов приведены в таблице.

Таблица

Числовые значения коэффициентов e_{ij} , α_{ij}

e_{11}	-6,151	e_{12}	-0,002	e_{13}	25,833
e_{21}	-2,47	e_{22}	-23,025	e_{23}	-9,079
e_{31}	0,916	e_{32}	-7,982	e_{33}	-49,452
α_{11}	0	α_{12}	-9,044	α_{13}	0
α_{21}	1,235	α_{22}	0	α_{23}	-10,823
α_{31}	0	α_{32}	2,811	α_{33}	0

Рассмотрим сначала случай упругого стержня ($k = 0$). Тогда характеристическое уравнение системы (5) имеет следующий вид:

$$\lambda^6 + b_2\lambda^4 + b_4\lambda^2 + b_6 = 0, \quad (6)$$

где

$$b_2 = \delta_1^4 + \delta_2^4 + \delta_3^4 + p(e_{11} + e_{22} + e_{33}),$$

$$b_4 = (\delta_1^4 + e_{11}p)(\delta_2^4 + e_{22}p) + (\delta_2^4 + e_{22}p)(\delta_3^4 + e_{33}p) + (\delta_3^4 + e_{33}p)(\delta_1^4 + e_{11}p) - \\ - p^2(e_{12} - \alpha_{12})(e_{21} - \alpha_{21}) - p^2(e_{23} - \alpha_{23})(e_{32} - \alpha_{32}) - p^2e_{13}e_{31},$$

$$b_6 = \begin{vmatrix} \delta_1^4 + e_{11}p & p(e_{12} - \alpha_{12}) & e_{13}p \\ p(e_{21} - \alpha_{21}) & \delta_2^4 + e_{22}p & p(e_{23} - \alpha_{23}) \\ e_{31}p & p(e_{32} - \alpha_{32}) & \delta_3^4 + e_{33}p \end{vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение (6) должно иметь три пары чисто мнимых корней. Если произвести замену $\lambda^2 = y$, то соответствующее кубическое уравнение

$$y^3 + b_2y^2 + b_4y + b_6 = 0 \quad (7)$$

должно иметь три отрицательных корня. Рассмотрим общую схему исследования знаков корней кубического многочлена.

Заменой $y = y_1 - \frac{b_2}{3}$ это уравнение сводится к следующему:

$$y_1^3 + ry_1 + q = 0,$$

где $r = -\frac{b_2^2}{3} + b_4$, $q = \frac{2b_2^3}{27} - \frac{b_2b_4}{3} + b_6$. Выражение $\frac{r^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ называют дискриминантом этого уравнения. По его знаку определяют количество действительных корней у исходного уравнения (7). При условии $\frac{r^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ уравнение (7) имеет три различных действительных корня, если у исходного уравнения все коэффициенты положительны и выполняется условие Рауса-Гурвица $b_2b_4 - b_6 > 0$, то все его корни отрицательны.

Применив указанную схему исследования к уравнению (6), находим такое $p^* \approx 109,986$, что при $0 < p < p^*$ характеристическое уравнение (6) имеет три пары чисто мнимых корней. То есть при $0 < p < p^*$ положение равновесия системы устойчиво. Этот результат совпадает с результатами работы [2], где собственные функции найдены в виде ряда.

Рассмотрим теперь случай $k > 0$. Характеристическое уравнение системы (5) принимает следующий вид:

$$\lambda^6 + b_1\lambda^5 + b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_4\lambda^2 + b_5\lambda + b_6 = 0, \quad (8)$$

где

$$b_1 = k(\delta_1^4 + \delta_2^4 + \delta_3^4),$$

$$b_2 = k^2(\delta_1^4\delta_2^4 + \delta_2^4\delta_3^4 + \delta_1^4\delta_3^4) + \delta_1^4 + \delta_2^4 + \delta_3^4 + p(e_{11} + e_{22} + e_{33}),$$

$$b_3 = k^3\delta_1^4\delta_2^4\delta_3^4 + k((\delta_1^4 + \delta_2^4)(\delta_3^4 + e_{33}p) +$$

$$+ (\delta_1^4 + \delta_3^4)(\delta_2^4 + e_{22}p) + (\delta_2^4 + \delta_3^4)(\delta_1^4 + e_{11}p)),$$

$$b_4 = k^2 (\delta_1^4 \delta_2^4 (\delta_3^4 + e_{33}p) + \delta_1^4 \delta_3^4 (\delta_2^4 + e_{22}p) + \delta_2^4 \delta_3^4 (\delta_1^4 + e_{11}p)) + \\ + (\delta_1^4 + e_{11}p)(\delta_2^4 + e_{22}p) + (\delta_2^4 + e_{22}p)(\delta_3^4 + e_{33}p) + (\delta_3^4 + e_{33}p)(\delta_1^4 + e_{11}p) - \\ - p^2(e_{12} - \alpha_{12})(e_{21} - \alpha_{21}) - p^2(e_{23} - \alpha_{23})(e_{32} - \alpha_{32}) - p^2 e_{13} e_{31},$$

$$b_5 = k(\delta_1^4(\delta_2^4 + e_{22}p)(\delta_3^4 + e_{33}p) + \delta_2^4(\delta_1^4 + e_{11}p)(\delta_3^4 + e_{33}p) + \\ + \delta_3^4(\delta_1^4 + e_{11}p)(\delta_2^4 + e_{22}p) - \delta_1^4 p(e_{23} - \alpha_{23})(e_{32} - \alpha_{32}) - \\ - \delta_2^4 p e_{13} e_{31} - \delta_3^4 p(e_{12} - \alpha_{12})(e_{21} - \alpha_{21})),$$

$$b_6 = \begin{vmatrix} \delta_1^4 + e_{11}p & p(e_{12} - \alpha_{12}) & e_{13}p \\ p(e_{21} - \alpha_{21}) & \delta_2^4 + e_{22}p & p(e_{23} - \alpha_{23}) \\ e_{31}p & p(e_{32} - \alpha_{32}) & \delta_3^4 + e_{33}p \end{vmatrix}.$$

С помощью критерия Рауса–Гурвица при каждом конкретном значении коэффициента k можно определить такое значение \tilde{p} , что при $0 < p < \tilde{p}$ положение равновесия системы будет асимптотически устойчивым. Например, при $k = 0,1$ находим $\tilde{p} \approx 102,645$. Таким образом, если время релаксации $\tau = \frac{l^2}{10} \sqrt{\frac{\rho f}{EJ}}$, то критическая сила $P \approx 102,645 \frac{EJ}{l^2}$.

Рассмотрим предельное значение, $\lim_{k \rightarrow 0} \tilde{p} = 87,812 \neq p^*$, т.е. значение критической силы при коэффициенте k , стремящемся к нулю, не совпадает с ее же значением при $k = 0$. Данное явление называется парадоксом дестабилизации. Обзор результатов, посвященных этому парадоксу, приведен в работе [4].

Анализ собственных значений. Исследуем поведение собственных значений λ в зависимости от силы p при малом значении коэффициента k , а также предельный переход критической силы \tilde{p} . Так как собственные значения λ непрерывны как функции k , то при стремлении коэффициента k к нулю, они стремятся к собственным значениям системы при $k = 0$.

На рис. 2 показана зависимость действительных частей корней характеристического уравнения (8) в зависимости от величины силы p при некоторых малых значениях k . При сравнительно больших значениях $k > 10^{-4}$ небольшое возрастание нагрузки сверх значения \tilde{p} приводит к заметному увеличению действительных частей. Однако при малых k роль \tilde{p} как критической нагрузки уменьшается, поскольку небольшое увеличение p свыше значения \tilde{p} уже не приводит к большому увеличению $\text{Re}\lambda$. Существенное возрастание $\text{Re}\lambda$ теперь

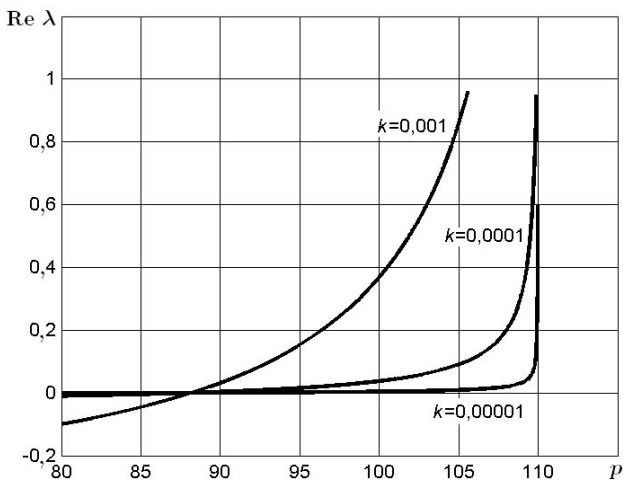


Рис. 2. Зависимость собственных значений корней характеристического уравнения от величины силы p

связано с увеличением нагрузки сверх значения, несколько меньшего, чем p^* . При стремлении k к нулю, $\text{Re} \lambda$ также стремится к нулю при любых $p < p^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г о п а к К. Н. Потеря устойчивости свободным стержнем, ускоренно движущимся под действием следящей силы // Изв. АН СССР. ОТН. Сер. “Механика и машиностроение”. – 1960. – № 4. – С. 136–137.
2. Ф е о д о с ь е в В. И. Об одной задаче устойчивости // Прикладная математика и механика. – 1965. – Вып. 2. – С. 391–392.
3. Ф е о д о с ь е в В. И. Избранные вопросы и задачи по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
4. С е й р а н я н А. П. Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики – 1990. – Т. 13. – Вып. 2. – С. 89–124.

Статья поступила в редакцию 5.06.2006



Виталий Евгеньевич Палаш родился в 1984 г., студент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области устойчивости движения механических систем.

V.Ye. Palosh (b. 1984) — student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of motion stability of mechanical systems.