УДК 517.977

С. Б. Ткачев

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ЗАДАННОМУ ИЗМЕНЕНИЮ ВЫХОДА АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

Для аффинной динамической системы со скалярным управлением и выходом установлены условия, при которых программное движение, соответствующее заданному изменению выхода системы, равномерно асимптотически и экспоненциально устойчиво. Приведен пример расчета.

Для аффинной стационарной динамической системы со скалярным управлением и выходом задача реализации заданного изменения выхода заключается в поиске такого управления, при котором система следует по траектории, на которой выход системы является заданной функцией времени. Поскольку в начальный момент времени выход системы может отличаться от заданного, а на саму систему могут действовать неконтролируемые возмущения, возникает задача стабилизации заданного изменения выхода.

Если в $\mathbb{R}^n$ аффинная система преобразуется к нормальной форме [1], то заданное изменение выхода при фиксированных начальных условиях по всем переменным, согласованным с заданным значением выхода в начальный момент времени, однозначно определяет программное движение системы. В этом случае задача стабилизации заданного изменения выхода может быть сведена к задаче стабилизации указанного программного движения. В свою очередь, задача равномерной асимптотической или экспоненциальной стабилизации программного движения сводится к задаче равномерной асимптотической или экспоненциальной стабилизации нулевого положения равновесия нестационарной системы в отклонениях.

В частном случае, когда стабилизируется заданное постоянное значение выхода, система в отклонениях является стационарной. Без ограничения общности считают, что стабилизируется нулевое значение выхода, и для систем, преобразуемых к нормальной форме с устойчивой нулевой динамикой, методы стабилизации хорошо разработаны [1–4].

В общем случае, когда желаемое изменение выхода задано как достаточно гладкая функция времени, также известен ряд результатов. Один из известных подходов заключается в том, что стабилизируется изменение выхода специальной “задающей” стационарной динамической системы [5]. Ограниченность этого подхода заключается в трудности подбора динамической системы, имеющей заданное изменение выхода, и ряде других проблем технического характера.

В работе [6] указан класс нелинейных систем, преобразуемых к нормальной форме, для которых по заданному изменению выхода удается найти программное движение в исходных переменных. Однако задачу стабилизации предлагается решать лишь локально на основе линейного приближения в окрестности положения равновесия, что предполагает близость траекторий к положению равновесия исходной системы. Аналогичное требование близости траектории по части переменных нормальной формы к положению равновесия присутствует и в методе, изложенном в работе [2].

В нелокальной постановке проблема стабилизации заданного изменения выхода рассмотрена в работах [1, 7], где для гладкой стационарной аффинной системы, преобразуемой к нормальной форме, приведено управление в виде нестационарной обратной связи и указаны условия, при которых это управление равномерно стабилизирует нулевое положение равновесия нестационарной системы в отклонениях. При этом указанное управление обеспечивает равномерную асимптотическую стабилизацию заданного изменения выхода и некоторого количества производных от выхода в силу системы, однако проблема равномерной асимптотической стабилизации по всем переменным нормальной формы остается открытой.

В настоящей статье найдены условия, при которых в переменных нормальной формы обеспечивается равномерная асимптотическая или экспоненциальная стабилизация по всем переменным программного движения, соответствующего заданному изменению выхода системы при фиксированных начальных условиях. При этом приведены необходимые сведения о нормальной форме для стационарных аффинных систем, рассмотрена задача нахождения программного движения и его стабилизации, для системы в отклонениях приведена нестационарная обратная связь и получены условия, при которых нулевое положение равновесия замкнутой системы равномерно асимптотически устойчиво и экспоненциально устойчиво. Приведен пример локальной экспоненциальной стабилизации.

Нормальная форма аффинной системы. Приведем, следуя работе [1], основные сведения о преобразовании аффинной системы к нормальной форме. Гладкой аффинной системе

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = A(x) + B(x)u,\\
&y = h(x),\\
&x \in \mathbb{R}^n, \quad u, y \in \mathbb{R}^1,\\
&A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\text{т}},\ B(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^{\text{т}},\\
&a_i(x), b_i(x), h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), i = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{1}$$

на $\mathbb{R}^n$ взаимно-однозначно соответствуют гладкие векторные поля

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Говорят, что выход $h(x)$ стационарной аффинной системы (1) имеет в точке x^0 относительную степень ρ, если

1) $L_B L_A^i h(x)$ — производные Ли по векторным полям A и B от выхода равны нулю в некоторой окрестности точки x^0 при $i < \rho - 1$;

2) $L_B L_A^{\rho-1} h(x^0) \neq 0$.

Приведенные условия эквивалентны тому, что в некоторой окрестности точки x^0 производные от выхода $h(x)$ в силу системы (1) до порядка $\rho - 1$ не содержат управления, а в производную порядка ρ управление входит с коэфициентом, отличным от нуля в точке x^0 [1, 8].

Из второго свойства вытекает, что $B(x^0) \neq 0$. Поэтому в некоторой окрестности точки x^0 существуют $n - 1$ функционально независимых первых интегралов векторного поля B. Из первого условия следует, что функции $L_A^i h(x)$, $i = \overline{0, \rho - 2}$, являются первыми интегралами векторного поля B. Выполнение второго условия гарантирует локальную функциональную независимость функций $z_i = L_A^{i-1} h(x)$, $i = \overline{1, \rho}$. Добавляя к множеству функций z_i, $i = \overline{1, \rho}$, еще $m = n - \rho$ первых интегралов $\eta_k = \eta_k(x)$ векторного поля B, в окрестности точки x^0 можно получить невырожденную замену переменных $(z^{\text{т}}, \eta^{\text{т}})^{\text{т}} = \Phi(x)$, где $z = (z_1, \ldots, z_\rho)^{\text{т}}$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^{\text{т}}$, $\rho + m = n$. Для упрощения записи в дальнейшем будем писать $(z, \eta) = \Phi(x)$, опуская знаки транспонирования.

В новых переменных система (1) запишется в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z, \eta) + g(z, \eta)u,\\
&\dot{\eta} = q(z, \eta),\\
&y = z_1,
\end{aligned} \tag{2}$$

который называют нормальной формой системы (1) в окрестности состояния x^0. Отметим, что из $L_B L_A^{\rho-1} h(x^0) \neq 0$ следует, что $g(\Phi(x^0)) \neq 0$.

Если x^0 — положение равновесия системы (1), то $A(x^0) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $h(x^0) = 0$, а функции η_k можно выбрать так, что $\eta_k(x^0) = 0$, $k = \overline{1, m}$. В этом случае в системе (2) $f(0,0) = 0$, $q(0,0) = 0$, $g(0,0) \neq 0$.

Систему $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ называют системой нулевой динамики или просто нулевой динамикой (нуль-динамикой [4]). Систему (1) называют минимально-фазовой (в окрестности точки x^0) [5], если положение равновесия $\eta = 0$ нулевой динамики асимптотически устойчиво, и экспоненциально минимально-фазовой, если оно экспоненциально устойчиво.

Для минимально-фазовых систем известны методы решения задачи стабилизации положения равновесия x^0 системы (2) [1, 2, 4]. Они заключаются в построении обратной связи, стабилизирующей по части переменных z положение равновесия $z = 0$. Локальная стабилизация положения равновесия $z = 0$, $\eta = 0$ при этом достигается за счет свойств нулевой динамики, а стабилизация при этом управлении положения равновесия x^0 следует из свойств замены переменных $(z, \eta) = \Phi(x)$.

Для системы (1) также вводят нормальную форму, определенную глобально. Говорят, что выход системы имеет относительную степень ρ в $\mathbb{R}^n$, если относительная степень выхода постоянна и равна ρ в каждой точке из $\mathbb{R}^n$. Если при этом $(z, \eta) = \Phi(x)$ — диффеоморфизм из $\mathbb{R}^n$ на $\Phi(\mathbb{R}^n)$, определяющий преобразование аффинной системы (1) к нормальной форме (2), то говорят, что нормальная форма определена глобально. Отметим, что $g(z, \eta) \neq 0$ в $\Phi(\mathbb{R}^n)$. Аналогично определяют нормальную форму в некоторой области Ω.

Программное движение. Рассмотрим задачу отслеживания заданного изменения выхода для аффинной системы (1), глобально преобразуемой к нормальной форме (2). Предположим, что для системы (1) задано изменение выхода $y = \psi^*(t)$, $t \geq 0$, где $\psi^*(t)$ — достаточно гладкая функция. Тогда для системы (2) задано программное изменение по переменной z_1, $z_1 = z_1^*(t) = \psi^*(t)$, $t \geq 0$. Дифференцируя $z_1^*(t)$ по времени необходимое число раз, получим по части переменных z программную траекторию $z = z^*(t) = (z_1^*(t), \ldots, z_\rho^*(t))^{\mathrm{т}}$, $t \geq 0$, $z|_{t=0} = z^*(0)$.

Подставив в систему (2) эту программную траекторию и производную $\dot{z}_\rho^*(t)$, получим

$$\dot{z}_\rho^*(t) = f(z^*(t), \eta) + g(z^*(t), \eta)u, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$\dot{\eta} = q(z^*(t), \eta). \tag{4}$$

Пусть для системы (4) заданы такие начальные условия $\eta|_{t=0} = \eta^0$, что задача Коши имеет решение $\eta^*(t)$, определенное при $t \geq 0$. Подставив $\eta^*(t)$ в уравнение (3) и разрешив последнее относительно u, получим программное управление в виде

$$u^*(t) = (\dot{z}^*_\rho(t) - f(z^*(t), \eta^*(t)))/g(z^*(t), \eta^*(t)), \tag{5}$$

которое при сделанных выше предположениях определено при $t \geq 0$.

Таким образом, при заданном изменении выхода и заданных начальных условиях η^0 для системы (2) однозначно определено программное движение $(z^*(t), \eta^*(t), u^*(t))$, $t \geq 0$, из состояния $(z^*(0), \eta^0)$.

В традиционной постановке [1, 2] задача стабилизации заданного изменения выхода сводится к задаче стабилизации траектории по части переменных $z^*(t)$. При этом к траектории по части переменных $\eta^*(t)$ не предъявляется каких-либо требований. Для технических систем важным может оказаться выполнение дополнительных требований и по переменным η, тогда возникает задача стабилизации программного движения, порожденного заданным изменением выхода.

Стабилизация программного движения. Пусть $(z^*(t), \eta^*(t), u^*(t))$ — программное движение, определенное при $t \geq 0$. Тогда имеют место тождества

$$\begin{aligned}
&\dot{z}^*_1(t) = z^*_2(t), \ldots, \dot{z}^*_{\rho-1}(t) = z^*_\rho(t),\\
&\dot{z}^*_\rho(t) = f(z^*(t), \eta^*(t)) + g(z^*(t), \eta^*(t))u^*(t),\\
&\dot{\eta}^*(t) = q(z^*(t), \eta^*(t)).
\end{aligned} \tag{6}$$

Запишем систему (2) в отклонениях от программного движения. Пусть $e(t) = z(t) - z^*(t)$, $\phi(t) = \eta(t) - \eta^*(t)$ и $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$. Переходя к переменным $e = (e_1, \ldots, e_\rho)^{\text{т}}$, $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^{\text{т}}$, $\rho + m = n$, получим нестационарную аффинную систему с выходом

$$\begin{aligned}
&\dot{e}_1 = e_2, \ldots, \dot{e}_{\rho-1} = e_\rho,\\
&\dot{e}_\rho = \bar{f}(e, \phi, t) + \bar{g}(e, \phi, t)\delta u,\\
&\dot{\phi} = \bar{q}(e, \phi, t),\\
&\bar{y} = e_1,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
&\bar{f}(e, \phi, t) = [f(z^*(t) + e, \eta^*(t) + \phi) - f(z^*(t), \eta^*(t))] +\\
&\qquad\qquad + [(g(z^*(t) + e, \eta^*(t) + \phi) - g(z^*(t), \eta^*(t))]\, u^*(t),\\
&\bar{g}(e, \phi, t) = g(z^*(t) + e, \eta^*(t) + \phi),\\
&\bar{q}(e, \phi, t) = q(z^*(t) + e, \eta^*(t) + \phi) - q(z^*(t), \eta^*(t)),\\
&\bar{f}(0, 0, t) = 0,\ \bar{q}(0, 0, t) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Задаче равномерной асимптотической стабилизации программного движения $(z^*(t), \eta^*(t), u^*(t))$ системы (2) соответствует задача равномерной асимптотической стабилизации положения равновесия $e = 0$, $\phi = 0$ системы (7).

Система (7) по форме аналогична нормальной форме (2). Будем говорить, что нестационарная система (7) записана в нормальной форме. Систему уравнений

$$\dot{\phi} = \bar{q}(0, \phi, t), \tag{9}$$

где $\bar{q}(0, 0, t) = 0$, будем называть нулевой динамикой нестационарной системы (7).

Если точка покоя $\phi = 0$ нулевой динамики равномерно асимптотически устойчива, то аффинную систему (7) с выходом $y = e_1$ будем называть минимально-фазовой.

Стабилизация положения равновесия нестационарной минимально-фазовой системы. Рассмотрим задачу равномерной асимптотической стабилизации положения равновесия системы (7).

Следуя работе [8], воспользуемся методом нелинейной стабилизации и выберем управление в виде

$$\delta u = -\frac{\bar{f}(e, \phi, t) + \sum\limits_{i=1}^{\rho} c_{i-1} e_i}{\bar{g}(e, \phi, t)}, \tag{10}$$

где коэффициенты c_j, $j = \overline{0, \rho - 1}$, таковы, что корни многочлена $\lambda^\rho + \sum\limits_{i=0}^{\rho-1} c_i \lambda^i$ имеют отрицательные действительные части.

Первые ρ уравнений системы (7), замкнутой управлением (10), примут вид $\dot{e} = Ae$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \ldots & -c_{\rho-1} \end{pmatrix},$$

и поэтому выделенная подсистема при указанном выше способе выбора коэффициентов c_i асимптотически устойчива.

Условия, при которых нулевое положение равновесия системы (7) при управлении (10) равномерно асимптотически устойчиво, дает следующая теорема.

Теорема 1. *Если нестационарная каскадная система*

$$\dot{e} = Ae, \tag{11}$$

$$\dot{\phi} = \bar{q}(e, \phi, t), \quad \bar{q}(0, 0, t) = 0, \tag{12}$$

такова, что функция $\bar{q}(e,\phi,t)$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $(e,\phi)=(0,0)$*, матрица Якоби* $\dfrac{\partial\bar{q}(e,\phi,t)}{\partial(e,\phi)}$ *ограничена по норме равномерно по* t *в некоторой замкнутой ограниченной окрестности точки* $(e,\phi)=(0,0)$*, система нулевой динамики* $\dot{\phi}=\bar{q}(0,\phi,t)$ *равномерно асимптотически устойчива в точке* $\phi=0$*, а линейная подсистема* (11) *асимптотически устойчива в точке* $e=0$*, то каскадная динамическая система* (11), (12) *равномерно асимптотически устойчива в положении равновесия* $(e,\phi)=(0,0)$.

Доказательство. Пусть P — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением стационарного уравнения Ляпунова

$$PA+A^{\mathrm{т}}P=-I.$$

Тогда для функции Ляпунова $V_0(e)=e^{\mathrm{т}}Pe$ ее производная в силу системы (11) равна

$$\dot{V}_0(e)=e^{\mathrm{т}}(A^{\mathrm{т}}P+PA)e=-e^{\mathrm{т}}e=-\|e\|^2.$$

Поскольку функция $\bar{q}(0,\phi,t)$ непрерывно дифференцируема и матрица Якоби $\dfrac{\partial\bar{q}(0,\phi,t)}{\partial\phi}$ в некоторой замкнутой окрестности точки $\phi=0$ ограничена по норме равномерно по t, то для системы нулевой динамики в некоторой окрестности точки $\phi=0$ при $t\geq 0$ существует такая непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\phi,t)$, что [3]

$$\begin{gathered}\alpha_1(\|\phi\|)\leq V_1(\phi,t)\leq\alpha_2(\|\phi\|),\\ \frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial t}+\frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial\phi}\bar{q}(0,\phi,t)\leq-\alpha_3(\|\phi\|),\\ \left\|\frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial\phi}\right\|\leq\alpha_4(\|\phi\|),\end{gathered}\tag{13}$$

где $\alpha_i(\|\phi\|)$, $i=\overline{1,4}$, — функции класса $\mathcal{K}$ (см. например, работу [4]). Напомним, что функцию $\alpha(r)$, $r\in[0,r_0]$ называют функцией класса $\mathcal{K}$, если она непрерывная, монотонно возрастающая и $\alpha(0)=0$.

Рассмотрим функцию

$$V(e,\phi,t)=V_1(\phi,t)+k\sqrt{V_0(e)}.$$

В окрестности точки $e=0$, $\phi=0$ эта функция непрерывна при любом t, и для нее при $t\geq 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_1(\|\phi\|)+k\sqrt{V_0(e)}\leq V(e,\phi,t)\leq\alpha_2(\|\phi\|)+k\sqrt{V_0(e)},$$

на основании которого имеем оценку

$$W_3(e,\phi) \le V(e,\phi,t) \le W_4(e,\phi),$$

где $W_3(e,\phi) = \alpha_1(\|\phi\|) + k\sqrt{e^{\text{т}}Pe}$, $W_4(e,\phi) = \alpha_2(\|\phi\|) + k\sqrt{e^{\text{т}}Pe}$ — непрерывные положительно определенные в некоторой окрестности $(e,\phi) = (0,0)$ функции. Следовательно, функция $V(e,\phi,t)$ положительно определена.

Введенная функция $V(e,\phi,t)$ не является дифференцируемой в точках с $e = 0$, однако производную функции $\sqrt{V_0(e)} = \sqrt{e^{\text{т}}Pe}$ в силу системы (11), (12) при $e = 0$ можно доопределить по непрерывности. Действительно,

$$\lambda_{\min}\|e\|^2 \le e^{\text{т}}Pe \le \lambda_{\max}\|e\|^2, \tag{14}$$

где $\lambda_{\min} > 0$, $\lambda_{\max} > 0$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы P. Поэтому

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\max}}}\|e\| \le \frac{\|e\|^2}{2\sqrt{e^{\text{т}}Pe}} \le \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\min}}}\|e\|, \tag{15}$$

а так как

$$\frac{d\sqrt{V_0(e)}}{dt} = \frac{e^{\text{т}}(A^{\text{т}}P + PA)e}{2\sqrt{e^{\text{т}}Pe}} = -\frac{\|e\|^2}{2\sqrt{e^{\text{т}}Pe}},$$

то с учетом соотношений (15) при $\|e\| \to 0$ производную $\dfrac{d\sqrt{V_0(e)}}{dt}$ можно доопределить по непрерывности нулем при $e = 0$. Поэтому и производную функции $V(e,\phi,t)$ в силу системы (11), (12)

$$\begin{aligned}\dot V(e,\phi,t) &= \frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial t} + \frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial \phi}\bar q(e,\phi,t) - \frac{k}{2\sqrt{e^{\text{т}}Pe}}\|e\|^2 = \\ &= \frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial t} + \frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial \phi}\bar q(0,\phi,t) + \\ &\qquad + \frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial \phi}(\bar q(e,\phi,t) - \bar q(0,\phi,t)) - \frac{k}{2\sqrt{e^{\text{т}}Pe}}\|e\|^2\end{aligned}$$

можно рассматривать в окрестности точки $(e,\phi) = (0,0)$ при $t \ge 0$ как непрерывную функцию.

Пусть Ω — некоторая достаточно малая замкнутая ограниченная окрестность точки $(e,\phi) = (0,0)$. В $\Omega \times [0,+\infty)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial \phi}(\bar q(e,\phi,t) - \bar q(0,\phi,t)) \le \\ &\le \left\|\frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial \phi}\right\| \|(\bar q(e,\phi,t) - \bar q(0,\phi,t))\| \le \gamma \left\|\frac{\partial V_1(\phi,t)}{\partial \phi}\right\| \|e\| \le \\ &\le \gamma\alpha_4(\|\phi\|)\|e\| \le c\|e\|,\end{aligned} \tag{16}$$

где $\gamma = \max_\Omega(\|\partial\bar{q}(e,\phi,t)/\partial(e,\phi)\|)$, а $c = \gamma \max_\Omega \alpha_4(\|\phi\|) > 0$.

С учетом полученной оценки (16) и неравенств (13) и (15) для производной функции $V(e,\phi,t)$ получим

$$\begin{aligned}\dot{V}(e,\phi,t) &\leq -\alpha_3(\|\phi\|) + c\|e\| - \frac{k}{2\sqrt{e^{\mathrm{T}}Pe}}\|e\|^2 \leq \\ &\leq -\alpha_3(\|\phi\|) + c\|e\| - \frac{k}{2\sqrt{\lambda_{\max}}}\|e\|.\end{aligned} \tag{17}$$

Выбрав $k > 2c\sqrt{\lambda_{max}}$, в Ω получаем оценку $\dot{V}(e,\phi,t) \leq -W_5(e,\phi)$, где

$$W_5(e,\phi) = \alpha_3(\|\phi\|) + c_1\|e\| > 0,$$

а $c_1 = \dfrac{k}{2\sqrt{\lambda_{\max}}} - c > 0$.

Таким образом, все условия теоремы о равномерной асимптотической устойчивости [3] выполнены, и положение равновесия $(e,\phi) = (0,0)$ является равномерно асимптотически устойчивым, что завершает доказательство теоремы.

Отметим, что **теорема 1** является обобщением на случай нестационарных систем аналогичного утверждения об асимптотической устойчивости каскадных стационарных систем, приведенного в работе [3].

Экспоненциальная стабилизация. Известно, что положение равновесия $e = 0$ системы (11) с гурвицевой матрицей A экспоненциально устойчиво [9].

Условия, при которых положение равновесия нестационарной системы (11), (12) локально экспоненциально устойчиво, дает следующая теорема.

Теорема 2. *Если нестационарная каскадная система* (11), (12) *такова, что функция* $\bar{q}(e,\phi,t)$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $(e,\phi) = (0,0)$, *матрица Якоби* $\dfrac{\partial\bar{q}(e,\phi,t)}{\partial(e,\phi)}$ *ограничена по норме равномерно по* t *в некоторой замкнутой ограниченной окрестности точки* $(e,\phi) = (0,0)$, *система нулевой динамики* $\dot{\phi} = \bar{q}(0,\phi,t)$ *локально экспоненциально устойчива в точке* $\phi = 0$, *а линейная подсистема* (11) *экспоненциально устойчива в точке* $e = 0$, *то каскадная динамическая система* (11), (12) *локально экспоненциально устойчива в положении равновесия* $(e,\phi) = (0,0)$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что функция $q(0,\phi,t)$ непрерывно дифференцируема, а матрица Якоби $\dfrac{\partial\bar{q}(0,\phi,t)}{\partial\phi}$ ограничена по норме равномерно по t в некоторой замкнутой ограниченной окрестности точки $\phi = 0$. Поскольку положение равновесия системы нулевой динамики локально экспоненциально устойчиво, то [9] в некоторой окрестности положения равновесия существуют функция Ляпунова $V_1(\phi, t)$ и положительные константы c_1, c_2, c_3 и c_4, такие, что

$$
\begin{gathered}
c_1\|\phi\|^2 \le V_1(\phi, t) \le c_2\|\phi\|^2, \\
\frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}\bar{q}(0, \phi, t) \le -c_3\|\phi\|^2, \\
\left\|\frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}\right\| \le c_4\|\phi\|.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Будем искать функцию Ляпунова для каскадной системы (11), (12) в виде $V(e, \phi, t) = V_1(\phi, t) + kV_0(e)$, где положительная константа k подлежит определению.

Представим производную функции $V(e, \phi, t)$ в силу системы (11), (12) в виде

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(e, \phi, t) &= \frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}\bar{q}(e, \phi, t) - k\|e\|^2 = \\
&= \frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}\bar{q}(0, \phi, t) + \frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}(\bar{q}(e, \phi, t) - \bar{q}(0, \phi, t)) - k\|e\|^2.
\end{aligned}
$$

Пусть Ω — некоторая достаточно малая замкнутая ограниченная окрестность точки $(e, \phi) = (0, 0)$. В $\Omega \times [0, +\infty)$ справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}(\bar{q}(e, \phi, t) - \bar{q}(0, \phi, t)) \le \\
&\le \left\|\frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}\right\| \|(\bar{q}(e, \phi, t) - \bar{q}(0, \phi, t))\| \le \gamma \left\|\frac{\partial V_1(\phi, t)}{\partial \phi}\right\| \|e\| \le \\
&\le \gamma c_4\|\phi\|\|e\| \le c\|\phi\|\|e\|,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $\gamma = \max_\Omega(\|\partial\bar{q}(e, \phi, t)/\partial(e, \phi)\|)$, а $c = \gamma c_4 > 0$.

Таким образом, имеем

$$
\dot{V}(e, \phi, t) \le -c_3\|\phi\|^2 + c\|\phi\|\|e\| - k\|e\|^2. \tag{20}
$$

Рассмотрим правую часть неравенства (20) как квадратичную форму ν относительно двух переменных $\|\phi\|$ и $\|e\|$. Эта квадратичная форма отрицательно определена, согласно критерию Сильвестра, при $k > c^2/4c_3$. Следовательно, при указанном выборе константы $k > 0$ производная $\dot{V}(e, \phi, t)$ в силу системы (11), (12) отрицательно определена в Ω, и справедлива оценка

$$
\dot{V}(e, \phi, t) \le \lambda\|(e, \phi)^{\text{т}}\|^2, \tag{21}
$$

где $\lambda < 0$ — максимальное по модулю собственное число матрицы квадратичной формы ν.

Для функции $V(e,\phi,t)$ из неравенств (14), (18) получим

$$V(e,\phi,t) = kV_1(\phi) + V_0(e) \geq kc_1\|\phi\|^2 + \lambda_{\min}\|e\|^2 \geq c_5\|(e,\phi)^{\mathrm{т}}\|^2, \quad (22)$$

$$V(e,\phi,t) \leq kc_2\|\phi\|^2 + \lambda_{\max}\|e\|^2 \leq c_6\|(e,\phi)^{\mathrm{т}}\|^2, \quad (23)$$

где $c_5 = \min(kc_1, \lambda_{\min})$, $c_6 = \max(kc_2, \lambda_{\max})$. Из полученных неравенств (21), (22) и (23), согласно работе [9], следует, что положение равновесия $(e,\phi) = (0,0)$ локально экспоненциально устойчиво, что завершает доказательство **теоремы 2**.

Если положение равновесия $\phi = 0$ системы нулевой динамики экспоненциально устойчиво в целом, то можно ожидать, что при дополнительных предположениях положение равновесия каскадной системы также будет экспоненциально устойчиво в целом. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если нестационарная каскадная система* (11)*,* (12) *такова, что функция* $\bar{q}(e,\phi,t)$ *непрерывно дифференцируема в* $\mathbb{R}^n$*, матрица Якоби* $\dfrac{\partial\bar{q}(e,\phi,t)}{\partial(e,\phi)}$ *ограничена по норме в* $\mathbb{R}^n$ *равномерно по* t*, положение равновесия* $\phi = 0$ *системы нулевой динамики* $\dot{\phi} = \bar{q}(0,\phi,t)$ *экспоненциально устойчиво в целом, а линейная подсистема* (11) *экспоненциально устойчива в точке* $e = 0$*, то положение равновесия* $(e,\phi) = (0,0)$ *каскадной динамической системы* (11)*,* (12) *экспоненциально устойчиво в целом.*

Доказательство этой теоремы в основных пунктах аналогично доказательству теоремы 2. Отличия состоят в том, что при выполнении условий **теоремы 3** существует глобально определенная функция Ляпунова [9] $V_1(\phi,t)$, для которой глобально выполняются неравенства (18). Оценка (19) (при $\gamma = \max_{\mathbb{R}^n}(\|\partial\bar{q}(e,\phi,t)/\partial(e,\phi))\|)$ также справедлива глобально. Соответственно, неравенства (21), (22) и (23) выполняются в $\mathbb{R}^n$, откуда вытекает экспоненциальная устойчивость в целом положения равновесия $(e,\phi) = (0,0)$ каскадной системы.

Исследование равномерной асимптотической устойчивости или экспоненциальной устойчивости нулевой динамики представляет сложную проблему в силу сложности выражения $\bar{q}(0,\phi,t)$ (см. (8)). Однако для частных случаев можно указать в переменных (z,η) вид стационарной нормальной формы, при котором требуемая устойчивость нулевой динамики нестационарной системы в отклонениях гарантируется.

Рассмотрим систему в нормальной форме

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z,\eta) + g(z,\eta)u,\\
&\dot{\eta} = -p(z)\eta,\\
&y = z_1,\\
&z \in \mathbb{R}^\rho,\ \eta \in \mathbb{R}^1,
\end{aligned} \tag{24}$$

определенную в $\mathbb{R}^n$.

Пусть для системы (24) задано изменение выхода $z_1^*(t)$, $t \geq 0$, и $z^*(t)$ — соответствующая ему траектория по части переменных, а $p(z^*(t))$ — функция, непрерывная при $t \geq 0$. Тогда решение задачи Коши $\dot{\eta} = -p(z^*(t))\eta$, $\quad \eta|_{t=0} = \eta^0$,

$$\eta^*(t) = \eta^0 e^{-\int_0^t p(z^*(\tau))d\tau} \tag{25}$$

определено при $t \geq 0$, и однозначно определено программное движение $(z^*(t), \eta^*(t), u^*(t))$, $t \geq 0$.

Следовательно, система в отклонениях для соотношений (24)

$$\begin{aligned}
&\dot{e}_1 = e_2, \ldots, \dot{e}_{\rho-1} = e_\rho,\\
&\dot{e}_\rho = \bar{f}(e,\phi) + \bar{g}(e,\phi)u,\\
&\dot{\phi} = -p(e+z^*(t))\phi - (p(e+z^*(t)) - p(z^*(t)))\eta^*(t),\\
&\bar{y} = e_1,\\
&e \in \mathbb{R}^\rho,\ \phi \in \mathbb{R}^1,
\end{aligned} \tag{26}$$

где $\bar{f}(e,\phi)$ и $\bar{g}(e,\phi)$ имеют вид (8), определена в $\mathbb{R}^{\rho+1} \times [0, +\infty)$.

Теорема 4. Если найдется такая константа $c > 0$, что при $t \geq 0$ имеет место неравенство $p(z^*(t)) \geq c$, то положение равновесия $\phi = 0$ нулевой динамики

$$\dot{\phi} = -p(z^*(t))\phi \tag{27}$$

нестационарной системы (26) экспоненциально устойчиво в целом.

Доказательство. Рассмотрим функцию $V(\phi) = \dfrac{\phi^2}{2}$. Ее производная, в силу системы (27),

$$\dot{V} = -p(z^*(t))\phi^2 \leq -c\phi^2.$$

Из приведенных оценок [3, 9] следует, что положение равновесия $\phi = 0$ экспоненциально устойчиво в целом, что завершает доказательство.

Отметим, что при выполнении условия $p(z^*(t)) \geq c > 0$ положение равновесия $\eta = 0$ уравнения $\dot{\eta} = -p(z^*(t))\eta$, $t \geq 0$, в системе (24) также является экспоненциально устойчивым в целом.

Равномерную асимптотическую устойчивость нулевой динамики системы в отклонениях можно гарантировать для нормальной формы

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z,\eta) + g(z,\eta)u,\\
&\dot{\eta} = -P(z)\eta,\\
&y = z_1,\\
&z \in \mathbb{R}^\rho,\ \eta \in \mathbb{R}^k,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где $P(z)$ — квадратная матрица соответствующей размерности, элементы которой — непрерывные функции.

Для программной траектории по части переменных $z^*(t)$, $t \geq 0$, решение задачи Коши $\dot{\eta} = -P(z^*(t))\eta$, $\eta|_{t=0} = \eta^0$, определено при $t \geq 0$ [10].

Система в отклонениях от программного движения имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{e}_1 = e_2, \ldots, \dot{e}_{\rho-1} = e_\rho,\\
&\dot{e}_\rho = \bar{f}(e,\phi) + \bar{g}(e,\phi)u,\\
&\dot{\phi} = -P(e+z^*(t))\phi - (P(e+z^*(t)) - P(z^*(t)))\eta^*(t),\\
&\bar{y} = e_1,\\
&e \in \mathbb{R}^\rho,\ ,\phi \in \mathbb{R}^m,\ \rho + m = n,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

где $\bar{f}(e,\phi)$ и $\bar{g}(e,\phi)$ имеют вид соотношений (8).

Пусть для динамической системы (28) задано изменение выхода $z_1^*(t)$, $t \geq 0$, и $z^*(t)$ — соответствующая ему траектория по части переменных, при которой положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$
\dot{\eta} = -P(z^*(t))\eta \tag{30}
$$

равномерно асимптотически устойчиво.

Вследствие линейности по η уравнения $\dot{\eta} = -P(z)\eta$, нулевая динамика системы в отклонениях (29) линейна по ϕ и имеет вид $\dot{\phi} = -P(z^*(t))\phi$. Если положение равновесия системы (30) равномерно асимптотически устойчиво, то положение равновесия $\phi = 0$ нулевой динамики также равномерно асимптотически устойчиво.

Критерии равномерной асимптотической устойчивости линейных систем вида (30) можно найти, например, в работе [11].

Пример. Устойчивость нулевой динамики системы в отклонениях сама по себе не гарантирует устойчивости программного движения системы, поскольку имеет место, когда по части переменных z система точно следует по программной траектории. Если же по части переменных z программная траектория неустойчива, без дополнительной стабилизации реализация заданного программного движения может оказаться невозможной.

Рассмотрим динамическую систему с управлением и с выходом

$$\begin{aligned} &\dot{z} = k_1 z - a_1 z\eta + u, \\ &\dot{\eta} = -k_2\eta + a_2 z\eta, \\ &y = z, \end{aligned} \tag{31}$$

описывающую гипотетическую химическую реакцию. Эта система записана в нормальной форме, которая определена глобально. Относительная степень выхода равна 1.

Будем проводить численное моделирование при значениях параметров $k_1 = 0{,}4$, $k_2 = 0{,}1$, $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = 0{,}5$.

Рассмотрим задачу остановки реакции из состояния $z|_{t=0} = a$, $\eta|_{t=0} = \eta^0$, т.е. задачу приведения системы (31) в положение равновесия $z = 0$, $\eta = 0$. Зададим изменение выхода $z^*(t) = ae^{-bt}$, $t \geq 0$, где $a > 0$, $b > 0$.

Подставив заданное изменение выхода во второе уравнение системы (31), получим

$$\dot{\eta} = -k_2\eta + a_2(ae^{-bt})\eta = -(k_2 - a_2(ae^{-bt}))\eta. \tag{32}$$

При $\eta|_{t=0} = \eta^0$ решение задачи Коши имеет вид

$$\eta^*(t) = \eta^0 e^{-\left[k_2 t - \frac{aa_2}{b}(1-e^{-bt})\right]}. \tag{33}$$

Подставляя $z^*(t)$ и $\eta^*(t)$ в первое уравнение системы (31), получим программное управление

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \dot{z}^*(t) - k_1 z^*(t) + a_1 z^*(t)\eta^*(t) = \\ &= ae^{-bt}\left(-b - k_1 + a_1\eta^0 e^{-\left[k_2 t - \frac{aa_2}{b}(1-e^{-bt})\right]}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Таким образом, найдено программное движение, определенное при $t \geq 0$.

На рис. 1 приведены зависимости переменных z и η от времени при свободном движении системы ($u = 0$) из точки $z(0) = 0{,}15$, $\eta(0) = 0{,}6$, а также графики программного изменения переменных $z^*(t)$, $\eta^*(t)$ и программного управления $u^*(t)$ при $a = 0{,}15$, $b = 0{,}1$, $\eta^0 = 0{,}6$.

Численные эксперименты показывают, что полученное программное движение неустойчиво. На рис. 2 приведены графики зависимостей $z(t)$ и $\eta(t)$, полученные при подстановке программного управления в систему (31) при $z|_{t=0} = z^*(0)$, $\eta|_{t=0} = \eta^*(0)$, а также программная и реализующаяся траектории системы при $t = 0\ldots 44$. Интегрирование проводилось методом Рунге–Кутты 4-5 порядка с автоматическим выбором шага при относительной точности 0,001 (метод ode45 пакета Matlab), тем не менее реализующаяся траектория при $t \geq 35$ существенно отличается от программной, что является следствием неустойчивости по первому приближению положения равновесия $z = 0$ первого уравнения системы (31).

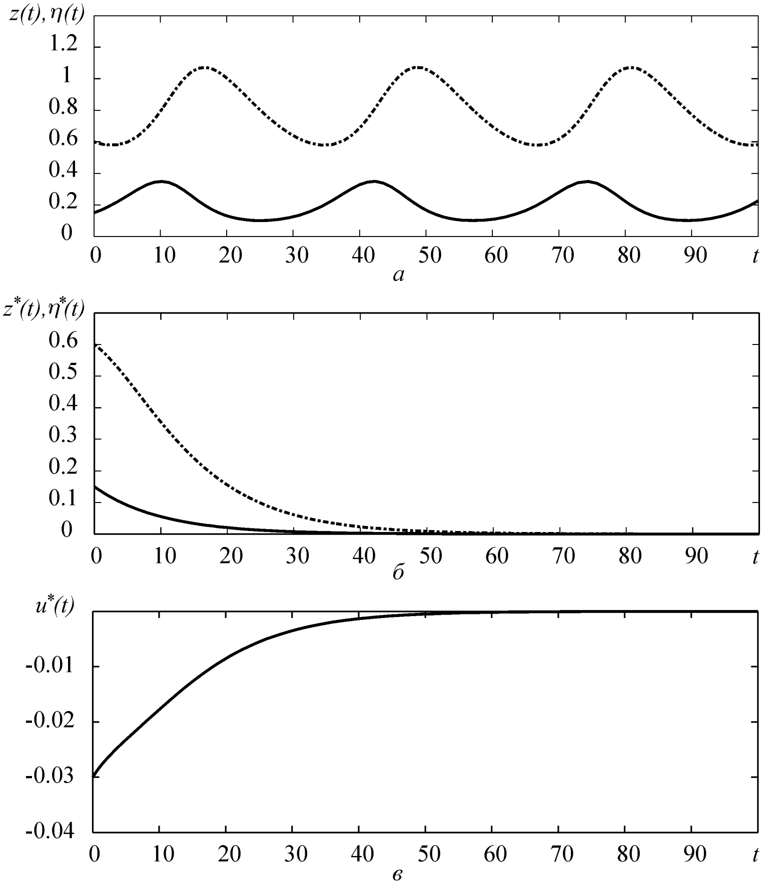


Рис. 1. Графики свободного движения системы (*а*), программной траектории (*б*) и программного управления (*в*)

При приближении программной траектории к $z = 0$ в силу неустойчивости реализующаяся траектория по переменному z отклоняется от программной. При существенном отклонении $z(t)$ от $z^*(t)$ неравенство $p(z(t)) > 0$ может нарушиться, и положение равновесия $\eta = 0$ перестанет быть устойчивым. В рассматриваемом примере экспоненциальная устойчивость положения равновесия $\eta = 0$ уравнения (32) гарантируется при $k_2 - a_2 a \geq c > 0$ При выбранных значениях параметров устойчивость нарушается при $z(t) \geq k_2/a_2 = 0{,}8$.

Для стабилизации программной траектории воспользуемся тем, что система (31) имеет вид соотношений (24), и при заданном изменении выхода выполняются условия **теоремы 4**, т.е. нулевая динамика системы в отклонениях экспоненциально устойчива в целом.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\bar{q}(e, \phi) = q(z^*(t) + e, \eta^*(t) + \phi) - q(z^*(t), \eta^*(t)) = \\ = -k_2\phi + a_2(z^*(t) + e)\phi + a_2 e\eta^*(t)\end{aligned}$$

непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$.

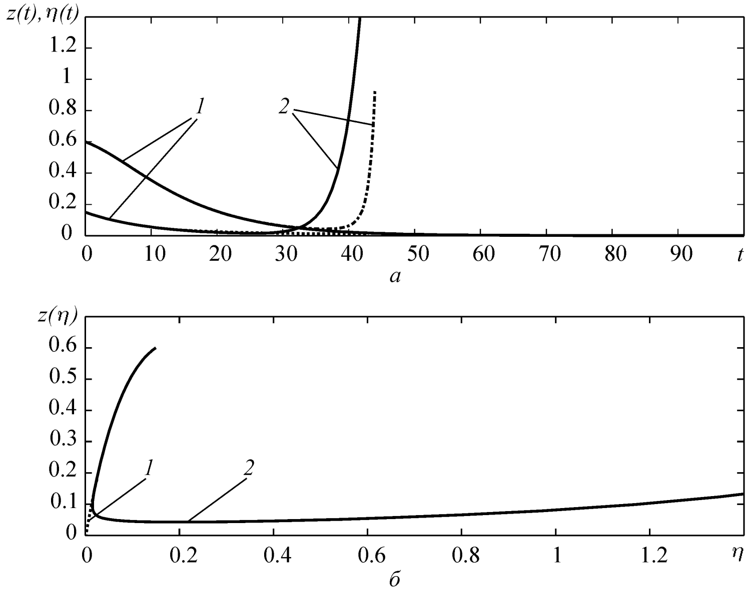


Рис. 2. Графики изменения переменных для программной *1* и реализующейся *2* траекторий в зависимости от t (*а*) и в виде $z(\eta)$ (*б*)

Элементы матрицы Якоби $\partial\bar{q}/\partial(e,\phi)$ имеют вид

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial e} = a_2(\phi + \eta^*(t)), \quad \frac{\partial\bar{q}}{\partial\phi} = -k_2 + a_2(z^*(t) + e).$$

Из полученных соотношений видно, что матрица Якоби лишь локально ограничена в любой замкнутой окрестности точки $(e,\phi) = (0,0)$.

Для стабилизации возьмем нестационарную обратную связь вида (10), которая в данном случае имеет вид

$$\delta u = -\frac{\bar{f}(e,\phi,t) + c_0 e}{\bar{g}(e,\phi,t)}, \tag{35}$$

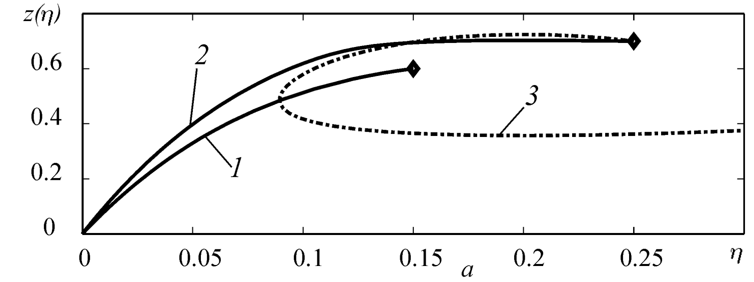
где $\bar{g}(e,\phi,t) = 1$, а $c_0 > 0$ — константа, определяющая свойства обратной связи.

Таким образом, для системы в отклонениях, соответствующей заданному программному движению системы (31) и замкнутой обратной связью (35), выполняются условия **теоремы 2**. Следовательно, положение равновесия $(e,\phi) = (0,0)$ замкнутой системы локально экспоненциально устойчиво.

Заметим, что все расчеты удобнее проводить в исходных переменных z, η и обращение к переменым e, ϕ необходимо лишь для теоретического анализа. В исходных переменных имеем

$$\delta u = -(k_1 z - a_1 z\eta - k_1 z^*(t) + a_1 z^*(t)\eta^*(t) + c_0(z - z^*(t))).$$

В системе (31) при этом $u = u^*(t) + \delta u$.



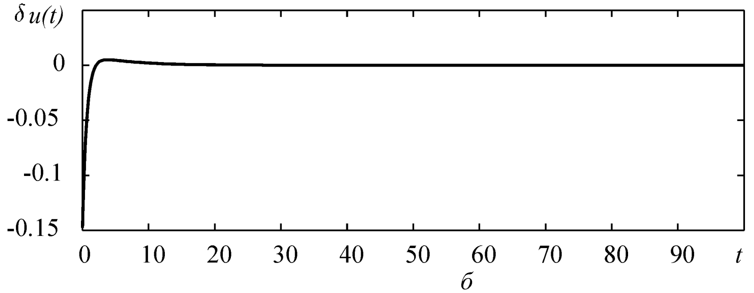


Рис. 3. Графики программной *1*, реализующейся стабилизированной *2* и нестабилизированной *3* траекторий (*а*) и стабилизирующего управления (*б*)

Для численного моделирования примем $c_0 = 1{,}5$. На рис. 3 приведены графики программной и реализующихся стабилизированной и нестабилизированной траекторий при $z|_{t=0} = z^*(t) + 0.1$ и $\eta|_{t=0} = \eta^*(t) + 0.1$, а также график зависимости стабилизирующего управления от времени.

Выводы. Для аффинных динамических систем со скалярным управлением и выходом, преобразуемых к нормальной форме, приведены условия, при которых метод нелинейной стабилизации обеспечивает равномерную асимптотическую или экспоненциальную стабилизацию программного движения, соответствующего заданному изменению выхода.

Стабилизация имеет место в переменных нормальной формы. Для технических систем такие переменные часто имеют физическую интерпретацию. В случае, если требуется стабилизация программного движения в исходных переменных, проблема требует дополнительного исследования.

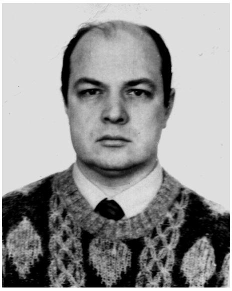
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 05-01-00840 и программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2007) гг.)”, проект РНП 2.1.1.2381.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I s i d o r i A. Nonlinear control systems. 3rd ed. London, 1995.
2. S a s t r y S. Nonlinear systems: analysis, stability and control. Springer, 1999.

3. K h a l i l H. Nonlinear systems. 3rd ed. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
4. М и р о ш н и к И. В., Н и к и ф о р о в В. О., Ф р а д к о в А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
5. I s i d o r i A., B y r n e s C. Output regulation of nonlinear systems // IEEE Tranc. Automat. Contr. – 1990. – V. 35. – P. 131–134.
6. D e v a s i a S., C h e n D., P a d e n B. Nonlinear inversion-based output tracking // IEEE Tranc. Automat. Contr. – 1996. – V. 41. – P. 930–942.
7. B y r n e s C., I s i d o r i A. Asymptotic stabilization of minimum-phase nonlinear systems // IEEE Tranc. Automat. Contr. – 1991. – V. 36. – P. 1122–1137.
8. К р а с н о щ е ч е н к о В. И., К р и щ е н к о А. П. Нелинейные системы: Геометрические методы анализа и синтеза. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 520 с.
9. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
10. П о н т р я г и н Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970.
11. Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.

Статья поступила в редакцию 27.03.2006



Сергей Борисович Ткачев родился в 1961 г., окончил в 1984 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Имеет 14 печатных работ в области математической теории управления.

S.B. Tkachov (b. 1961) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1984. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Winner of the Prize of the Russian Federation Government in the field of Science and Technology. Author of 14 publications in the field of mathematical theory of control.