УДК 512.562

Г. Л. Луканкин, И. Г. Табакова

ОБ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Исследована задача линейного сопряжения голоморфных функций двух комплексных переменных для единичного шара. Показано, что поставленная задача существенно отличается от случая функции одной переменной.

Теория краевых задач для голоморфных функций возникла в трудах классиков математики Б. Римана, Д. Гильберта, А. Пуанкаре. Она была существенно продвинута работами Ф. Нетера, Т. Карлемана, Племела. Дальнейшее развитие этой теории в основном связано с именами российских математиков И.Н. Векуа [1], Ф.Д. Гахова [4], И.И. Привалова, И.И. Векуа, Г.Л. Луканкина [7, 8], С.Ю. Колягина.

Большой интерес к этим задачам объясняется тем, что их изучение, кроме определенного самостоятельного интереса, имеет важное значение для других разделов математики. К ним приводятся многие плоские задачи механики и математической физики. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши также тесно связаны с краевыми задачами для голоморфных функций.

В настоящей статье исследуется задача линейного сопряжения для единичного шара.

Новизна данной работы состоит в том, что задача линейного сопряжения поставлена и решена для голоморфных функций двух комплексных переменных. Краевое условие задачи задается на всей топологической (трехмерной) границе. Для решения задачи был использован метод И.Н. Векуа, который позволил свести задачу линейного сопряжения к двум задачам Дирихле в классе действительных частей голоморфных функций двух комплексных переменных. Показано, что эта задача существенно отличается от задачи для случая функции одной комплексной переменной.

Постановка и решение задачи линейного сопряжения. Рассматривается область D в пространстве C^2 двух комплексных переменных w, z, и на ее топологической трехмерной границе ∂D задаются три вещественные непрерывные функции α, β, γ. Требуется отыскать функцию $f\left(w, z\right) \equiv u+iv$, голоморфную внутри D, которая на границе ∂D удовлетворяла бы условию

$$\operatorname{Re}\left[\bar{\lambda} f\right] \equiv \alpha u + \beta v = \gamma, \qquad \lambda = \alpha + i\beta \quad (\text{на } \partial D)\,. \tag{1}$$

Покажем на примере единичного шара

$$D=\left\{(w,z):\ |w|^2+|z|^2<1\right\},$$

что задача (1) по своему характеру существенно отличается от классического случая задачи для одной комплексной переменной.

Введем на трехмерной сфере

$$\partial D=\left\{(\tau,\eta):\ |\tau|^2+|\eta|^2=1\right\}$$

систему координат (φ,ψ,θ), положив

$$\tau=\cos\theta\, e^{i\varphi},\quad \eta=\sin\theta\, e^{i\psi},\quad 0\le\varphi,\psi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Внутренние точки параллелепипеда

$$\prod:\quad 0\le\varphi,\psi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

посредством формул (2) взаимно-однозначно отображаются на некоторое подмножество полной меры на единичной трехмерной сфере ∂D.

Будем рассматриваемые ниже функции, заданные на сфере ∂D, выражать как функции параметров φ,ψ,θ.

Как и в случае одного комплексного переменного, будем предполагать, что непрерывная функция $\lambda=\alpha+i\beta$ не обращается в нуль ни в одной точке сферы ∂D. Тогда можно считать, что всюду на ∂D $|\lambda|=1$. Функция $t=\lambda$ осуществляет непрерывное отображение трехмерной сферы ∂D в окружность, и поскольку группа $\pi_3(\wp_1)$ тривиальна, то функцию λ можно представить в виде $\lambda=e^{i\omega}$, где ω — однозначная и непрерывная на ∂D функция.

Как было показано И.Н. Векуа [1], задача (1) в случае одной комплексной переменной эквивалентна последовательному решению двух задач Дирихле для гармонических функций. В рассматриваемом случае этот факт тоже имеет место, однако задача Дирихле ставится на этот раз в классе вещественных частей голоморфных функций двух комплексных переменных (такие функции называют плюригармоническими, а в случае двух действительных переменных — бигармоническими), непрерывных в замкнутой области $D+\partial D$.

В самом деле, предположим, что $\Omega(w,z)=\omega_1+i\omega_2$ — голоморфная функция внутри единичного шара D, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Re}\Omega=\omega\quad(\text{на границе } \partial D). \tag{3}$$

Тогда условие (1) можно переписать в виде

$$\mathrm{Re}\left[\bar{\lambda} f\right] = \mathrm{Re}\left[e^{-i\omega} f\right] = \mathrm{Re}\left[e^{-i(\omega+i\omega_1)} e^{-\omega_1} f\right] = \gamma,$$

откуда следует, что для новой, голоморфной в этой же области, функции $F = f\ \exp\left\{-i\Omega\right\}$ достаточно решить еще одну задачу Дирихле

$$\mathrm{Re} F = e^{\omega_1}\gamma \equiv \gamma_1 \qquad (\text{на } \partial D) \tag{4}$$

в классе бигармонических функций. После этого решение задачи (1) представляется формулой

$$f = F\ \exp\left\{i\Omega\right\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что однородная задача (1) (при $\gamma \equiv 0$) имеет над полем вещественных чисел одно линейное независимое решение $f = i\ \exp\left\{i\Omega\right\}$.

Класс бигармонических функций в пространстве четырех вещественных переменных у́же класса гармонических функций от тех же переменных. Поэтому, в отличие от задачи Дирихле для уравнения Лапласа, задача (3), вообще говоря, неразрешима.

Чтобы выяснить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи вида (3), воспользуемся разложением $\Omega\left(w, z\right)$ в степенной ряд и разложением функции ω в ряд Фурье.

Предположим, что при каждом фиксированном θ функцию ω можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\omega(\varphi,\psi,\theta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \Big[\alpha_{mn}(\theta)\cos m\varphi \cos n\psi + \beta_{mn}(\theta)\sin m\varphi \sin n\psi + \\ + \gamma_{mn}(\theta)\sin m\varphi \cos n\psi + \delta_{mn}(\theta)\sin n\psi \cos m\varphi\Big], \tag{5}$$

где

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} 1/4 \text{ при } m = n = 0, \\ 1/2 \text{ при } m = 0, n > 0 \text{ или } n = 0, m > 0, \\ 1 \text{ при } m > 0, n > 0, \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{mn}(\theta) &= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega(\varphi,\psi,\theta)\cos m\varphi\cos n\psi d\varphi d\psi,\\
\beta_{mn}(\theta) &= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega(\varphi,\psi,\theta)\sin m\varphi\sin n\psi d\varphi d\psi,\\
\gamma_{mn}(\theta) &= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega(\varphi,\psi,\theta)\sin m\varphi\cos n\psi d\varphi d\psi,\\
\delta_{mn}(\theta) &= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega(\varphi,\psi,\theta)\sin n\psi\cos m\varphi d\varphi d\psi.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Для этого достаточными условиями являются, например, следующие: функции ω, ω_φ, ω_ψ — однозначны и непрерывны на сфере, а смешанная производная $\omega_{\varphi\psi}$ $(\omega_{\psi\varphi})$ существует (в обобщенном смысле) и равномерна по θ:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\omega_{\varphi\psi}\right|^2 d\varphi d\psi < \infty. \qquad (7)$$

Выражая коэффициенты Фурье ω через коэффициенты Фурье функции $\omega_{\varphi\psi}$ путем интегрирования по частям формул (6) и учитывая соотношение (7), получим (равномерно по θ)

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} m^2n^2(\left|\alpha_{mn}(\theta)\right|^2+\left|\beta_{mn}(\theta)\right|^2+\left|\gamma_{mn}(\theta)\right|^2+\left|\delta_{mn}(\theta)\right|^2) < \infty. \qquad (7')$$

Предположим теперь, что задача (3) имеет решение $\Omega\,(w,z)$. Функцию $\Omega\,(w,z)$, голоморфную в области D, можно разложить в двойной степенной ряд

$$\Omega(w,z) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}C_{mn}W^mZ^n =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}C_{mn}R^{m+n}\cos^m\theta\sin^n\theta\, e^{i(m\varphi+n\psi)}, \qquad (8)$$

где $w = R\cos\theta\, e^{i\phi}$, $z = R\sin\theta\, e^{i\psi}$, $0 < R < 1$, а числа $C_{mn} = a_{mn} - ib_{mn}$ во всяком случае удовлетворяют условию

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left|C_{mn}\right|^2 < \infty.$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{Re}\Omega(w,z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[a_{mn}\cos(m\varphi + n\psi) + b_{mn}\sin(m\varphi + n\psi)\right] \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}} R^{m+n}\cos^m\theta\sin^n\theta. \quad (9)$$

Сравнивая теперь разложения (5) и (9) на границе ∂D, имеем

$$\lambda_{mn}(\theta) = -\beta_{mn}(\theta)\,,\ \gamma_{mn}(\theta) = \delta_{mn}(\theta)\,, \quad \text{где}\ \ m,n = 1,2,\ldots, \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_{00}=\frac{1}{4}\alpha_{00},\ \sqrt{m+1}a_{m,0}\cos^m\theta=\frac{1}{2}\alpha_{m,0},\ \sqrt{m+1}b_{m,0}\cos^m\theta=\frac{1}{2}\gamma_{m,0},\\
&\sqrt{n+1}a_{0,n}\sin^n\theta = \frac{1}{2}\alpha_{0,n},\ \sqrt{n+1}b_{0,n}\sin^n\theta = \frac{1}{2}\delta_{0,n},\\
&\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}a_{mn}\cos^m\theta\sin^n\theta = \alpha_{mn} = -\beta_{mn},\\
&\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}b_{mn}\cos^m\theta\sin^n\theta = \gamma_{mn} = \delta_{mn}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Умножая последние два равенства из соотношений (11) на $\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta$, интегрируя от 0 до $\pi/2$ и учитывая, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}\theta\sin^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\frac{m!n!}{(m+n+1)!},$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
a_{mn} &= 2\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\,d\theta,\\
a_{mn} &= -2\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\,d\theta,\\
b_{mn} &= 2\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\,d\theta,\\
b_{mn} &= 2\sqrt{\frac{(m+n+1)!}{m!n!}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\,d\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Аналогично найдем

$$\left.\begin{aligned}
a_{00} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \alpha_{0,0}(\theta)\cos\theta\ \sin\theta\, d\theta,\\
a_{m,0} &= \sqrt{m+1}\int\limits_0^{\pi/2} \alpha_{m,0}(\theta)\cos^{m+1}(\theta)\sin\theta\, d\theta,\\
b_{m,0} &= \sqrt{m+1}\int\limits_0^{\pi/2} \gamma_{m,0}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin\theta\, d\theta,\\
a_{0,n} &= \sqrt{n+1}\int\limits_0^{\pi/2} \alpha_{0,n}(\theta)\cos\theta\sin^{n+1}\theta\, d\theta,\\
b_{0,n} &= \sqrt{n+1}\int\limits_0^{\pi/2} \delta_{0,n}(\theta)\cos\theta\sin^{n+1}\theta\, d\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

Учитывая соотношения (10), (11), (12), (12′), найдем, что для разрешимости задачи (3) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\alpha_{0,0} = \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \alpha_{0,0}(\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta,\\
\dfrac{1}{2}\alpha_{mn} = \dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}\cos^m\theta\sin^n\theta \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \alpha_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\, d\theta,\\
\dfrac{1}{2}\beta_{mn} = \dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}\cos^m\theta\sin^n\theta \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \beta_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\, d\theta,\\
\dfrac{1}{2}\gamma_{mn} = \dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}\cos^m\theta\sin^n\theta \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \gamma_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\, d\theta,\\
\dfrac{1}{2}\delta_{mn} = \dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}\cos^m\theta\sin^n\theta \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \delta_{mn}(\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta\, d\theta.
\end{cases} \qquad (13)$$

Равенства (10) с учетом соотношений (6) и (13) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega(\varphi,\psi,\theta)\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta e^{i(m\varphi-n\psi)}d\varphi d\psi d\theta = 0. \qquad (14)$$

Заметим, что условия (13) также могут быть записаны в виде условий (14), выражающих ортогональность функции и некоторому бесконечному (счетному) множеству элементарных функций. С этой целью вместо равенств функций, присутствующих в формулах (13), следует записать равенства их коэффициентов Фурье относительно произвольной тригонометрической системы функций, полной на сегменте $[0, \pi/2]$. Выбирая в качестве такой системы функции $\{\cos 4k\theta, \sin 4k\theta\}$, запишем условия (13) в соответствующих обозначениях в виде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\varphi,\psi,\theta)e^{i(m\varphi\pm n\psi)}T'_{mnk}(\theta)d\varphi\, d\psi\, d\theta=0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\varphi,\psi,\theta)e^{i(m\varphi\pm n\psi)}T''_{mnk}(\theta)d\varphi\, d\psi\, d\theta=0, \tag{15}$$

где

$$T'_{mnk}=\cos 4k\theta-2\frac{(m+n+1)!}{m!n!}A_{mnk}\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta,$$
$$T''_{mnk}=\sin 4k\theta-2\frac{(m+n+1)!}{m!n!}B_{mnk}\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta,$$

A_{mnk}, B_{mnk} — коэффициенты Фурье функции $\cos^{m+1}\theta\sin^{n+1}\theta$.

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (3) и учитывая, что

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n+1)!}{m!n!}x^m y^n=\frac{1}{(1-x-y)^2} \tag{16}$$

при условии

$$|x|^2+|y|^2<1,$$

получим

$$\Omega(w,z)=$$
$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\varphi',\psi',\theta')\cos\theta'\sin\theta'\Bigg[1+2\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n+1)!}{m!n!}\times$$
$$\times\left(R\cos\theta'\cos\theta\, e^{i(\varphi-\varphi')}\right)^m(R\sin\theta'\sin\theta\, e^{i(\psi-\psi')})^n\Bigg]d\theta' d\varphi' d\psi'-ib_{0,0}=$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \omega(\varphi', \psi', \theta') \times$$

$$\times \left[\frac{2}{(1 - R\cos\theta' \cos\theta e^{i(\varphi-\varphi')} - R\sin\theta' \sin\theta \, e^{i(\psi-\psi')})^2} - 1 \right] \times$$

$$\times \cos\theta' \sin\theta' d\theta' d\varphi' d\psi' - ib_{0,0}. \quad (17)$$

Интегральное представление (17) перепишем в виде

$$\Omega(w,z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos^2\theta \int\limits_{\Delta|\tau|,|\theta|} \omega(\tau,\eta) \left[\frac{2}{(1 - w\bar{\tau} - z\bar{\eta})^2} - 1 \right] \frac{d\tau}{\tau} \wedge \frac{d\eta}{\eta} + i\beta_0, \quad (17')$$

где $\omega(\tau,\eta) \equiv \omega(\phi,\psi,\theta)$, $b_{0,0} = -\beta_0 =$ const.

Эта формула представляет собой аналог интеграла Шварца.

Покажем теперь достаточность условий (14), (15). Для этого нам нужно доказать, что интеграл (17$'$) или, что то же самое, ряд (16) дает решение краевой задачи (3), то есть функция $\Omega(w,z)$ голоморфна внутри шара, непрерывна в замкнутом шаре и удовлетворяет краевому условию $\mathrm{Re}\Omega = \omega$ на границе ∂D. Голоморфность функции $\Omega(w,z)$ очевидна.

Ряд (16) представляет собой непрерывную функцию в замкнутой области $D + \partial D$. Действительно, оценивая остаток ряда (16), получим

$$|\Omega_n(w,z)| \le \sum_{m,n=N}^{\infty} \frac{(m+n+1)!}{m!n!} R^{m+n} \cos^m\theta \sin^n\theta \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} |(\alpha_{mn} - \beta_{mn}) - i(\gamma_{mn} + \delta_{mn})| \cos^{m+1}\theta (\sin\theta)^{n+1} d\theta \le$$

$$\le \sum_{m,n=N}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2} \frac{(m+n+1)!}{m!n!} R^{2(m+n)} \cos^{2m}\theta \sin^{2n}\theta \sum_{m,n=N}^{\infty} 4m^2n^2 \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} (|\alpha_{mn}|^2 + |\gamma_{mn}|^2) \cos\theta \sin\theta d\theta \frac{(m+n+1)!}{m!n!} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m+1} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta \le$$

$$\le \sum_{m,n+N}^{\infty} \frac{R^{2(m+n)}}{m^2n^2}\frac{(m+n+1)!}{m!n!}\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^n \times$$

$$\times \sum_{m,n=N}^{\infty} 2m^2n^2 \int\limits_0^{\pi/2} (|\alpha_{mn}|^2+|\beta_{mn}|^2)\cos\theta\sin\theta d\theta,$$

где $\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^n = \max\limits_{0\le\theta\le\pi/2}\cos^{2m}\theta\sin^{2n}\theta.$

В силу условий (7′)

$$\sum_{m,n=N}^{\infty} 2m^2n^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(|\alpha_{mn}|^2+|\beta_{mn}|^2\right)\cos\theta\sin\theta d\theta \le M = \text{ const} < \infty.$$

Далее, пользуясь формулой Стирлинга, получим

$$|\Omega_n(w,z)| \le \mathrm{M}\sum_{m,n=N}^{\infty}\frac{m+n+1}{m^2n^2}R^{2(m+n)} * \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{2\pi(m+n)}\left(\frac{m+n}{e}\right)^{m+n} e^{\frac{Q_1}{12(m+n)}}}{2\pi\sqrt{mn}\left(\frac{m}{e}\right)^m\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{Q_2}{12m}}e^{\frac{Q_3}{12n}}} \le$$

$$\le M_1\sum_{m,n=N}^{\infty}\frac{m+n+1}{m^2n^2}\sqrt{\frac{m+n}{mn}}R^{2(m+n)} \le$$

$$\le M_1\sum_{m,n=N}^{\infty}\frac{m+n+1}{m^2n^2}\frac{2}{\sqrt{m+n}}R^{2(m+n)} \le$$

$$\le 2M_1\sum_{m,n=N}^{\infty}\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+1\right)\frac{R^{2(m+n)}}{m^2n^2} =$$

$$= 2M_1\sum_{m,n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{m^{3/2}n^2}+\frac{1}{m^2n^{3/2}}+\frac{1}{m^2n^2}\right)R^{2(m+n)}.$$

Так как последняя сумма представляет собой остаток ряда вида

$$\sum_{m,n=N}^{\infty}\frac{R^{2(m+n)}}{m^e n^\wp},$$

где $l > 1$, $\wp > 1$, который равномерно и абсолютно сходится при $R \leq 1$, то функция $\Omega_N(w, z)$ по абсолютной величине может быть сделана меньше любого наперед заданного положительного числа при достаточно большом N.

Далее, переходя к пределу в ряде (16) при $R \to 1$ и учитывая формулы (14), (15), получим, что $\operatorname{Re}\Omega = \omega$ на границе ∂D.

Теорема 1. *Для разрешимости задачи Дирихле в классе бигармонических функций внутри единичного шара* $D = \{(w, z) : |w|^2 + |z|^2 < 1\}$ *по краевому условию (3), заданному на всей топологической трехмерной границе* ∂D, *необходимо и достаточно, чтобы правая часть* ω *условия (3) удовлетворяла условиям* (14), (15) (*или* (10), (13)).

Условия **теоремы 1** означают ортогональность правой части ω граничного соотношения (3) бесконечному (счетному) числу элементарных функций. Пользуясь терминологией, установившейся в теории краевых задач, мы можем сказать, что рассматриваемая задача Дирихле имеет дефективные числа $\ell = 0$, $\ell' = \infty$, индекс $\chi = -\infty$.

Заметим, что от предположений гладкости функции ω легко избавиться. Действительно, равномерно приближая непрерывную функцию ω на границе ∂D некоторой последовательностью функций с указанными свойствами гладкости и используя принцип максимума модуля для функции $\Omega\,(w, z)$, получим, что интеграл $(17')$ дает решение задачи (3), если функция ω только непрерывна и удовлетворяет условиям (14), (15).

Аналогично вторая задача Дирихле (4) разрешима тогда и только тогда, когда функция $\gamma_1 = \gamma\, e^{\omega_1}$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \gamma\,(\varphi, \psi, \theta) e^{\omega_1(\varphi,\psi,\theta)}\,(\cos\theta)^{m+1}\,(\sin\theta)^{n+1}\,d\theta d\varphi d\psi = 0,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \gamma e^{\omega_1} e^{i(m\varphi \pm n\psi)} T'_{mnk}\,(\theta)\,d\theta d\varphi d\psi = 0, \tag{18}$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \gamma e^{\omega_1} e^{i(m\varphi \pm n\psi)} T''_{mnk}\,(\theta)\,d\theta d\varphi d\psi = 0,$$

причем решение ее представлено в виде

$$F\left(w,z\right)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}d\cos^2\theta\int\limits_{\Delta|\tau|,|\eta|}\gamma_1\left[\frac{2}{\left(1-w\bar{\tau}-z\bar{\eta}\right)^2}-1\right]\frac{d\tau}{\tau}\wedge\frac{d\eta}{\eta}+i\beta_0',\tag{19}$$

где $F\left(w,z\right)=f\,\exp\left\{-i\Omega\right\}$, $\gamma_1=\gamma\,e^{\omega_1}$, $\omega_1=Jm\,\Omega$.

Учитывая ранее сказанное, результаты анализа задач (3), (4), получаем теорему.

Теорема 2. *Пусть функция* ω *из представления* $\lambda=e^{i\omega}$ *удовлетворяет условиям* (14) *и* (15). *Тогда, сформулированная однородная задача линейного сопряжения* (1) *(при* $\gamma\equiv 0$*) имеет одно линейно независимое (над полем вещественных чисел) решение, которое может быть представлено по формуле*

$$f=i\,\exp\left\{i\Omega\right\}.\tag{20}$$

Неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть краевого условия ортогональна счетному числу элементарных функций и это решение представимо в виде

$$f=e^{i\Omega}F,\tag{21}$$

где функции Ω и F представляются соответственно по формулам (17) и (19). Число $\ell\leq 1$, индекс $\chi=-\infty$.

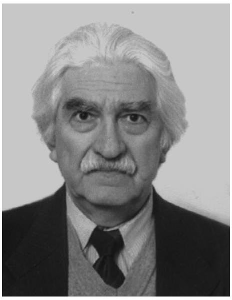
Таким образом, на примере единичного шара мы установили, что рассматриваемая задача линейного сопряжения в пространстве C^2 двух комплексных переменных имеет бесконечный индекс. Этот факт является следствием того, что система Коши–Римана в рассматриваемом случае — переопределенная. Поэтому задание краевых условий на всей топологической границе и могло привести к бесконечному индексу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И. Н. Об одной линейной граничной задаче Римана / Труды Тбилисск. матем. ин-та АН ГССР. – 1942. – Т. 11, вып. 2. – С. 109–139.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1998. – 265 с.
3. Виноградова И. Н. О решении некоторых краевых задач / Сб. трудов “Теория функций, функциональный анализ и их приложения” – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1973. – Вып. 15. – С. 198–216.
4. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964. – 365 с.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963. – 543 с.

6. Д з е б и с о в Х. П. Интегральные представления аналитических функций в неограниченных областях с определяющими многообразиями // Владикавказ. мат. журн. – 2003. – Т. 5, вып. 2. – С. 10–17.
7. Л а т ы ш е в А. В., Л у к а н к и н Г. Л. Краевые задачи теории функций комплексного переменного. – М.: МГОУ, 2003. – 102 с.
8. Л у к а н к и н Г. Л. О некоторых краевых задачах для функций двух комплексных переменных // Ученые записки МОПИ. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1970. – Т. 269, вып. 14. – С. 23–48.
9. Л у к а н к и н Г. Л. Пространственная задача линейного сопряжения // Вестник МАН ВШ. – 1999. – № 4, вып. 6. – С. 82–89.
10. Н е л а е в А. В., Я к ш и н а А. С. О неоднородной краевой задаче Римана для функций многих комплексных переменных, голоморфных в кратнокруговых областях // Сб. науч. трудов “Математика. Компьютер”. – М.: Прогресс-Традиция. – 2001. – Вып. 8. – Ч. 2. – С. 415–423.
11. Ф у к с Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз, 1962. – 472 с.
12. Ш а б а т Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. – М.: Наука, 1976. – 263 с.
13. R i z z a G. B. Dirichlet problem for n-harmonic functions an related geometrical properties / Math. Ann. – 1955. – V. 130, № 3. – P. 99–107.

Статья поступила в редакцию 30.11.2005



Геннадий Лаврович Луканкин родился в 1937 г., окончил МОПИ им. Н.К. Крупской в 1959 г. Канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, проф., чл.-кор. РАО, зав. кафедрой мат. анализа МГОУ. Автор более 300 научных работ в области комплексного анализа и методики преподавания математики, а также учебников для средней и высшей школ.

G.L. Lukankin (b. 1937) graduated from the Moscow Regional Pedagogical Institute n.a. N.K. Krupskaya in 1959. Ph. D. (Phys.-Math.), D. Sc. (Pedagogy), professor, corresponding member of the Russian Academy of Education, head of the mathematical analysis department of the Moscow State Open University. Author of more than 300 publications in the field of analysis of complex-valued variables and methodology of teaching mathematics, including textbooks for secondary and higher schools.

Ирина Геннадьевна Табакова родилась в 1982 г., окончила МПГУ в 2004 г. Аспирантка кафедры “Математический анализ” МГОУ. Автор 4 научных работ в области комплексного анализа.

I.G. Tabakova (b. 1982) graduated from the Moscow State Pedagogical University in 2004. Post-graduate of “Mathematical Analysis” department of the Moscow State Open University. Author of 3 publications in the field of analysis of complex-valued variables.