УДК 621.192.3

Г. Д. Карташов

ОЦЕНИВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ МАРГИНАЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

Доказан ряд утверждений, упрощающих нахождение экстремумов линейного функционала от двумерного распределения при заданных маргинальных законах

Для лучшего понимания излагаемого материала рассмотрим одну из классических задач математической статистики. Имеется случайный вектор (ξ, η), требуется оценить коэффициент корреляции. Известно, что для этого необходимо знание реализации этого вектора $z_i = (\xi_i, \eta_i)$. Другими словами, компоненты вектора должны быть одновременно наблюдаемы. Имеется широкий круг практических задач, когда это невозможно сделать. Например, для технического изделия нельзя измерить его моменты отказов в различных режимах испытаний и в этом случае нельзя восстановить совместную функцию распределения моментов. В подобных случаях приходится довольствоваться приближенными методами. Одна из задач такого класса и рассматривается в настоящей статье.

Пусть (ξ, η) — случайный вектор, а $Q(y|x) := \mathsf{P}(\eta < y|\xi = x)$ — условное распределение. Предполагается, что функция $Q(y|x)$ неизвестна, а заданы только маргинальные законы $F(x) := \mathsf{P}(\xi < x)$ и $G(y) := \mathsf{P}(\eta < y)$. В этом случае распределение $Q(y|x)$ не может быть произвольным и должно удовлетворять маргинальному уравнению

$$\int Q(y|x)dF(x) = G(y). \tag{1}$$

Введем линейный функционал

$$\ell_Q(x) := \int \varphi(y)dQ(y|x), \tag{2}$$

где φ — известная борелевская функция на R_1 с

$$\int |\varphi(y)|dG(y) < \infty.$$

Наложим на функционал (2), точнее на распределение $Q(y|x)$, следующее ограничение. Потребуем, чтобы функция $\ell_Q(x)$ по x была бы неубывающей, т.е.

$$\ell_Q(x) \uparrow x. \tag{3}$$

Рассмотрение невозрастающих функций $\ell_Q(x)$ проводится аналогично. Более того, в полученных результатах достаточно заменить функцию φ на $-\varphi$.

Отметим, что необходимость введения условия (3) требует решения ряда практических задач (например, теории надежности [1]).

Вместо функционала (2) будем оценивать более общий линейный функционал

$$R_Q(\pi, F, G) := \int d\pi \ell_Q(x) = \int d\pi \int \varphi(y) dQ(y|x). \tag{4}$$

Здесь $\pi(x)$ — известное распределение с $\chi_\pi \subseteq \chi_F$ (χ_F — множество точек роста распределения $F(x)$).

Нетрудно видеть, что в такой постановке задача представляет собой бесконечномерный аналог линейного программирования.

Обозначим $S(F, G)$ множество всех условных распределений $Q(y|x)$, удовлетворяющих условиям (1) и (4). В работе [2] рассматривалась задача о нахождении абсолютных экстремумов

$$m(\pi, F, G) := \inf_{Q \in S(F,G)} R_Q(\pi, F, G), \tag{5}$$

$$M(\pi, F, G) := \sup_{Q \in S(F,G)} R_Q(\pi, F, G) \tag{6}$$

функционала $R_Q(\pi, F, G)$ на множестве $S(F, G)$. Там же было доказано, что основная трудность в решении этой задачи состоит в определении так называемого (π, F)-разбиения. Сформулируем это понятие применительно к абсолютному минимуму (5).

Определим вначале такое разбиение числовой оси R_1 на систему непересекающихся промежутков I_α (α — любое число из I_α), которое удовлетворяло бы трем условиям.

1. $I_\alpha \cap \chi_F \neq \varnothing$ для каждого I_α, причем $\bigcup\limits_\alpha I_\alpha = R_1$, $I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.

2. Для любого промежутка I_α

$$F(x|I_\alpha) \geqslant \pi(x|I_\alpha), \tag{7}$$

где $F(x|I_\alpha) := \mathsf{P}_F(\xi < x | \xi \in I_\alpha)$, $\pi(x|I_\alpha) := \mathsf{P}_\pi(\xi < x | \xi \in I_\alpha)$. Записи P_F и P_π означают, что вероятностные меры порождены распределениями $F(x)$ и $\pi(x)$ соответственно.

3. Условие 2 не должно выполняться для любого объединения $\bigcup\limits_{\alpha \leqslant i \leqslant \beta} I_i$, если его можно разбить на два таких подмножества $\bigcup\limits_{\alpha \leqslant i < k} I_i$ и $\bigcup\limits_{k \leqslant i \leqslant \beta} I_i$, что $\mathsf{P}_F\left(\bigcup\limits_{\alpha \leqslant i < k} I_i\right) > 0$ и $\mathsf{P}_F\left(\bigcup\limits_{k \leqslant i \leqslant \beta} I_i\right) > 0$.

С помощью этой системы промежутков I_α разобьем множество χ_F на совокупность непересекающихся подмножеств X^*_α, положив $X^*_\alpha := I_\alpha \cap \chi_F$. Заметим, что все множества X^*_α удовлетворяют условиям 2 и 3, поскольку $F(x|X^*_\alpha) = F(x|I_\alpha)$ и $\pi(x|X^*_\alpha) = \pi(x|I_\alpha)$.

Совокупность подмножеств $\{X^*_\alpha\}$ называют (π, F)-разбиением, а каждое подмножество X^*_α — предельной группой. Очевидно, что (π, F)-разбиение всегда существует и не зависит от распределения $G(y)$.

Зная (π, F)-разбиение, легко найти абсолютный минимум $m(\pi, F, G)$. Согласно работе [1] он достигается на экстремальном распределении

$$Q^*(y|x) := \left\{ \int\limits_{\varphi(\eta)<y} dG(y) \right\}^{\{\alpha(x),\beta(x)\}} \qquad \text{при} \;\; x \in X^*_\alpha. \tag{8}$$

Здесь

$$\alpha(x) := \mathsf{P}_F\left(\bigcup_{i<x} X^*_i\right), \quad \beta(x) := \mathsf{P}_F\left(\bigcup_{i\leqslant x} X^*_i\right),$$

$$G(y)^{\{\alpha,\beta\}} = \begin{cases} 0, & y < y_1, \\ \dfrac{G(y)-\alpha}{\beta-\alpha}, & y_1 \leqslant y < y_2, \\ 1, & y \geqslant y_2, \end{cases}$$

где y_1 и y_2 — любые решения следующих неравенств:

$$\begin{cases} G(y_1+0) \geqslant \alpha, \\ G(y_1-0) \leqslant \alpha, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} G(y_2+0) \geqslant \beta, \\ G(y_2-0) \leqslant \beta. \end{cases}$$

Абсолютный максимум $M(\pi, F, G)$ находится таким же образом, только в условии 2 знак неравенства надо изменить на обратный.

Приведенное описание показывает, что основная трудность в определении экстремумов функционала $R_Q(\pi, F, G)$ состоит в нахождении (π, F)-разбиения.

В данной статье приводится ряд утверждений, упрощающих решение этого вопроса. Рассмотрение проведем для распределений $F(x)$ и $\pi(x)$, имеющих плотности вероятностей $f(x)$ и $n(x)$ соответственно. Для определенности будем считать, что распределения $F(x)$ и $\pi(x)$ сосредоточены на промежутке (a, b), т.е. $\chi_F = (a, b)$, $\chi_\pi \in \chi_F$, причем $f(x) > 0 \, \forall \, x \in (a, b)$. Случаи $a \to -\infty$ или $b \to +\infty$ не исключаются.

Составим отношение вероятностей $\gamma(x) := \dfrac{n(x)}{f(x)}$, $x \in (a, b)$. Оно играет важную роль в нахождении (π, F)-разбиения. В частности имеет место

Лемма [2]. *Если отношение вероятностей $\gamma(x)$ монотонно убывает на промежутке (a, b), то каждая точка $x \in (a, b)$ является предельной группой. Если же оно не убывает на промежутке $I \subseteq (a, b)$, то множество I принадлежит одной предельной группе.*

Рассмотрим теперь случай, когда отношение вероятностей $\gamma(x)$ имеет один экстремум на промежутке (a, b).

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $n(x)$ дифференцируемы на промежутке (a, b), т.е. $f(x), n(x) \in C'[(a, b)]$.*

Существует единственный экстремум функции $\gamma(x)$ в точке $\bar{x}$, $a < \bar{x} < b$, тогда
а) если $\bar{x}$ — точка минимума и $\lim\limits_{x \to a+0} \gamma(x) > 1$, то (π, F)-разбиение состоит из промежутка $]x^*, b)$ и всех точек $x \in (a, x^*]$; здесь x^* — единственное решение уравнения

$$\psi(x) := \frac{1 - \pi(x)}{1 - F(x)} - \gamma(x) = 0, \tag{9}$$

причем $x^* < \bar{x}$;
б) если $\bar{x}$ — точка максимума и $\lim\limits_{x \to b+0} \gamma(x) > 1$, то (π, F)-разбиение состоит из всех точек $x \in [x_*, b]$ и промежутка $[a, x_*]$; здесь x_* — единственное решение уравнения

$$\frac{\pi(x)}{F(x)} - \gamma(x) = 0, \tag{10}$$

причем $x^* > \bar{x}$.

◄ Для точки минимума $\bar{x}$ функция $\gamma(x)$ убывает на промежутке $(a, \bar{x})$ и возрастает при $x \in (\bar{x}, b)$. Используя теорему о среднем, запишем

$$\psi(x) = \frac{\int\limits_a^x n(x)dx}{\int\limits_a^x f(x)dx} - \gamma(x) = \frac{\int\limits_a^x \gamma(x)n(x)dx}{\int\limits_a^x f(x)dx} - \gamma(x) = \gamma(\theta_x) - \gamma(x), \tag{11}$$

где θ_x — некоторое число, $a < \theta_x < \bar{x}$.

Отсюда следует, что функция $\psi(x)$ возрастает на промежутке $(a, \bar{x})$. Согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{x \to a+0} \psi(x) = \lim_{x \to a+0} \gamma(x) - \lim_{x \to a+0} \gamma(x) = 0.$$

Поэтому функция $\psi(x) > 0$ на некотором промежутке $(a, \tilde{x})$, $\tilde{x} \geq \bar{x}$. При $x > \tilde{x}$ функция $\psi(x)$ начинает убывать, причем $\lim\limits_{x \to b-0} \psi(x) = 1 - \lim\limits_{x \to b-0} \gamma(x) < 0$. Следовательно, существует единственное решение x^* уравнения (9).

Покажем теперь, что промежуток $X^*\colon (a, x^*]$ принадлежит одной предельной группе. Для этого убедимся вначале в выполнении условия (2). Очевидно, что

$$F(x|X^*) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{F(x)}{F(X^*)}, & a \le x < x^*, \\ 1, & x \ge x^*. \end{cases}$$

Распределение $\pi(x|X^*)$ имеет такой же вид, только в последней формуле надо заменить F на π. Отсюда следует, что

$$\operatorname{sign}[F(x|X^*) - \pi(x|X^*)]'_x = \\ = \operatorname{sign}\left[\frac{\pi(X^*)}{F(X^*)} - \gamma(x)\right] = \operatorname{sign}[\gamma(\theta^*_x) - \gamma(x)]. \quad (12)$$

Здесь θ^*_x — некоторое число, $a < \theta^*_x < x^*$. Но на промежутке (a, x^*) справедливо неравенство $\gamma(\theta^*_x) \ge \gamma(x)$, а значит и неравенство (7).

Докажем выполнение условия 3 для предельной группы X^*. Зафиксируем произвольное $\tilde{x}$, $x^* < \tilde{x} < b$ и рассмотрим множество X^*_α до промежутка $\tilde{X}\colon (a, \tilde{x}]$. Заметим, что $\mathsf{P}_F(X^*) > 0$ и $\mathsf{P}(\bar{X}) > 0$, где $\bar{X}\colon (x^*, \tilde{x}]$. Из (11) имеем, что при $x = x^*$

$$\operatorname{sign}[F(x|X^*) - \pi(x|X^*)]'_x = \operatorname{sign}\psi(x^*) = 0.$$

Кроме того, поскольку на промежутке $\bar{x}$ функция $\gamma(x)$ возрастает, то

$$\operatorname{sign}[F(x|\bar{X}) - \pi(x|\bar{X})]'_x = \operatorname{sign}[\gamma(\theta_x) - \gamma(x)] < 0,$$

где θ_x — некоторое число $x^* < \theta_x < \tilde{x}$.

Отсюда следует справедливость условия 3 и утверждения о том, что каждая точка $x \in]x^*, b)$ составляет предельную группу.

Аналогично доказывается пункт *б*).►

С помощью **теоремы 1** легко установить (π, F)-разбиение для широкого класса распределений $F(x)$ и $\pi(x)$, например для нормальных законов [2], усеченно нормальных, логарифмически нормальных, гамма-распределений и др.

Будем интерпретировать $\pi(x)$ как распределение случайной величины ξ по вероятностной мере P_π, т.е. $\pi(x)\colon \mathsf{P}_\pi(\xi < x)$.

Теорема 2. *Пусть установлено* $(\pi, F) = \{X^*_\alpha\}$ *— разбиение для случайной величины* ξ*, принимающие значения из промежутка* (a, b) *(случаи* $a \to -\infty$ *и/или* $b \to +\infty$ *не исключаются). Введем новую случайную величину* $\xi := h(\xi)$*, где* h *— монотонно возрастающая или убывающая функция на промежутке* (a, b) *с распределениями*

$\bar{\pi}(x) := \mathsf{P}_{\pi}(\zeta < x)$ *и* $\bar{F}(x)\colon \mathsf{P}_F(\xi < x)$. *Тогда* $(\bar{\pi}, \bar{G})$*-разбиение состоит из предельных групп* $\bar{X}^*_\alpha = h(X^*_\alpha) \forall X_\alpha \in (\pi, G)$.

◄ Доказательство проведем для монотонно возрастающих функций $h(x)$, поскольку для убывающих функций оно аналогично.

Очевидно, промежутки $\bar{I}_\alpha\colon h(I_\alpha)$ не пересекаются между собой и $\bigcup\limits_\alpha \bar{I}_\alpha = h(R_1)$. Убедимся в справедливости условия 2.

Согласно выражению (5)

$$F(x|I_\alpha) = \mathsf{P}_F(\xi < x|\xi \in I_\alpha) \geq \pi(x|I_\alpha) = \\ = \mathsf{P}_\pi(\xi < x|\xi \in I_\alpha) \text{ для всех } I_\alpha. \quad (13)$$

Заметим, что условия $\xi \in I_\alpha$ и $\zeta = h(\xi) \in h(I_\alpha) = \bar{I}_\alpha$ эквивалентны между собой. Неравенство $\zeta < x$ можно представить в виде $\zeta = h(\xi) < h(x) := z$. Из неравенства (13) следует, что

$$\bar{F}(z|\bar{I}_\alpha) \geq \bar{\pi}(z|\bar{I}_\alpha), \quad z \in \psi(R_1) \forall \bar{I}_\alpha.$$

Тем самым установлено выполнение условия 2.

Методом от противного легко доказать условие 3.►

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К а р т а ш о в Г. Д. Исследование проблемы инвариантности в теории надежности: Автореф. дис.. . . д-ра. физ.-мат. наук. – М.: МИЭМ, 1975. – 32 с.
2. К а р т а ш о в Г. Д. О некоторых вероятностных задачах теории надежности при наличии ограничений // Теория вероятностей и ее применение. – 1969. Т. XIV. Вып. 4. – С. 623–638.

Статья поступила в редакцию 29.05.2006

Геннадий Дмитриевич Карташов родился в 1938 г., окончил в 1961 г. Воронежский государственный университет. Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Заслуженный деятель науки РФ, автор более 200 научных работ в области математической статистики и теории надежности.

G. D. Kartashov (b. 1938) graduated from Voronezh State Techical University in 1961. D. Sc. (Eng), professor, Head of “Higher Mathematics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Academician of the International Slavic Academy. Author of more than 150 publications in the field of probability theory, mathematical statistics and reliability theory.