УДК 62.505

Е. И. Виноградова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ИНДЕКСА ОТЯГОЩЕННОСТИ БОЛЕЗНЯМИ ВОЗРАСТА ЧЕЛОВЕКА

Методами математического моделирования с использованием экспериментальных данных доказан факт наличия стохастической зависимости среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста индивида от длительностей естественных жизненных циклов его родителей.

В медицинской практике ряд заболеваний, многие из которых не имеют четко выраженной возрастной ориентации, нередко относят к так называемой группе болезней возраста. В эту группу, в частности, включают сахарный диабет второго типа, ишемическую болезнь сердца или атеросклероз другой локализации, рак, гипертоническую болезнь, цирроз печени, болезнь Альцгеймера [1]. Наличие болезней возраста у человека в той или иной степени связано с частичной или полной инвалидизацией, сокращением длительности естественного жизненного цикла (ЕЖЦ — продолжительность жизни индивида при условии, что его смерть не являлась насильственной), летальным исходом.

В результате длительных и интенсивных исследований выявлено огромное количество факторов, способствующих и предопределяющих проявление болезней возраста у человека [1]. Наряду с очевидной значимостью этих результатов, их наличие в значительной степени затрудняет корректное прогнозирование вероятностей появления болезней возраста у человека с целью планирования комплекса мер по их профилактике и обнаружению на ранних стадиях развития. В связи с этим весьма перспективной представляется гипотеза, высказанная действительным членом РАМН Н.П. Бочковым, о зависимости наличия болезней возраста у человека от длительности ЕЖЦ его родителей. Проверка этой гипотезы методами математического моделирования с использованием экспериментальных данных была проведена в работе [2], в которой:

1) для решения поставленной задачи были сформулированы следующие допущения:

— группа болезней возраста у человека может быть представлена атеросклерозом, гипертонической болезнью, злокачественными новообразованиями (рак) и сахарным диабетом второго типа;

— все представители группы болезней возраста являются “равноправными” и их ранжирование по важности представляется невозможным;

2) в качестве экспериментальных данных были использованы результаты обследования 54 женщин и 52 мужчин. Наряду с информацией о наличии ($x_j = 1$) или отсутствии ($x_j = 0$) у каждого из них j-й болезни возраста, где $j = 1, \ldots, 4$ и значение $j = 1$ соответствует сахарному диабету, $j = 2$ — атеросклерозу, $j = 3$ — раку, $j = 4$ — гипертонии, результаты обследования содержат так же данные о длительности ЕЖЦ их родителей. В соответствии с исходными данными вектор $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\text{т}}$ содержит исчерпывающую информацию о наличии или отсутствии рассматриваемых болезней возраста у человека;

3) введено понятие индекса отягощенности болезнями возраста человека как линейной формы вектора X (отклика):

$$J(X) \triangleq \sum_{j=1}^{4} \lambda_j x_j, \qquad (1)$$

где весовые коэффициенты $\{\lambda_j\}_{j=1}^{4}$ удовлетворяют стандартным требованиям, используемым при синтезе глобального критерия [3], т. е.

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j = 1\ ; \qquad \lambda_j \geqslant 0, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Таким образом фактически реализуется переход от векторного отклика к скалярному;

4) определена плотность распределения вероятностей случайной величины $J(X)$, которая для каждой возможной реализации вектора X позволяет с заданной доверительной вероятностью [4] не только построить доверительный интервал для среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста, но и прогнозировать число рассматриваемых болезней возраста у индивида;

5) идентифицированы оптимальные математические модели зависимости индекса отягощенности болезнями возраста индивида от длительности ЕЖЦ его родителей (отдельно для мужчин и для женщин);

6) для проверки устойчивости оптимальных моделей к вариациям возможных значений индекса отягощенности болезнями возраста (отклика) были применены методы имитационного моделирования [3] с использованием плотности распределения вероятностей случайной величины $J(X)$. Для каждой реализации вектора отклика фактически была проверена допустимость полученных оптимальных моделей, что является еще одним подтверждением их адекватности искомым зависимостям.

Необходимо подчеркнуть, что результаты и выводы, содержащиеся в работе [2], были получены на основе имеющейся ограниченной выборки экспериментальных данных и могут не отражать ситуацию в целом. В связи с этим представляет интерес возможность обобщения этих выводов, что и является основной целью проведенных исследований.

Экспериментальные данные. Экспериментальные данные для достижения основной цели настоящих исследований были предоставлены академиком Н.П. Бочковым и частично уже использовались в работе [2]:

— результаты обследования группы мужчин и женщин, отражающие информацию о наличии или отсутствии у них каждой из четырех рассматриваемых болезней возраста;

— результаты опроса данной группы мужчин и женщин о наличии или отсутствии рассматриваемых болезней возраста у их родных братьев и сестер;

— данные о длительности ЕЖЦ родителей в каждой из рассматриваемых семей.

Для проведения дальнейших исследований, с целью выявления общих закономерностей зависимости индекса отягощенности болезнями возраста индивида от длительности ЕЖЦ его родителей, были отобраны семьи, в которых имеются одновременно братья и сестры. В соответствии с данными, представленными в табл. 1, мы фактически располагаем информацией о 55 семьях, в которых имеются одновременно братья и сестры. Для каждой такой семьи, наряду с данными о длительности ЕЖЦ родителей, известно суммарное число болезней возраста как для братьев, так и для сестер.

При проведении дальнейших исследований, согласно данным, приведенным в таблице, для каждой семьи было вычислено среднее значение индекса отягощенности болезнями возраста для женщин (сестер) и для мужчин (братьев). Целесообразность математического моделирования зависимости среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста индивида от длительности ЕЖЦ его родителей (в условиях крайней ограниченности исходных данных) с одной стороны следует из свойств выборочного среднего [4], а с другой — из свойства устойчивости оптимальных моделей к вариациям экспериментальной информации [2]. Кроме того, выборка, представленная в таблице, принципиально отличается от выборки, использованной в работе [2].

Математическое моделирование зависимости среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста индивида от длительностей естественных жизненных циклов его родителей. Пусть

Таблица

Экспериментальные данные

№ семьи n	Количество сестер $k(0, n)$	Количество братьев $k(1, n)$	Длительности естественных жизненных циклов (в годах)		Суммарное число болезней возраста	
			матери	отца	у сестер	у братьев
1	1	2	85	68	0	1
2	4	1	82	57	2	2
3	1	3	84	65	1	2
4	3	1	83	45	2	1
5	3	1	77	66	3	2
6	1	1	78	67	0	0
7	1	1	68	54	1	0
8	4	4	71	62	4	7
9	1	1	95	95	0	1
10	2	2	93	72	2	0
11	3	1	77	77	1	0
12	1	2	93	72	2	0
13	1	3	82	63	1	2
14	3	4	61	53	3	3
15	2	1	70	71	5	1
16	1	2	75	81	1	2
17	1	2	78	80	2	2
18	5	5	61	77	5	8
19	2	2	96	47	2	0
20	1	2	75	80	1	2
21	1	4	70	70	1	1
22	1	1	85	83	0	0
23	1	1	54	72	4	2
24	2	1	84	63	3	2
25	1	2	72	76	1	1
26	1	1	81	78	5	2
27	3	1	40	80	3	3
28	1	1	72	82	0	2
29	1	2	87	61	3	1
30	2	1	72	58	3	0
31	3	1	89	80	0	0
32	2	3	75	70	0	2
33	1	5	68	77	1	4
34	2	4	79	63	0	2
35	1	2	80	83	0	1
36	1	3	48	46	1	1
37	2	2	68	75	0	1
38	2	1	90	75	1	1
39	1	3	65	54	0	1
40	1	1	90	80	1	1
41	1	2	90	53	1	3
42	1	1	63	70	2	0
43	1	1	65	66	2	1
44	3	2	82	70	2	2
45	2	1	90	45	2	1
46	2	2	70	77	1	0
47	1	2	73	69	1	2
48	1	2	74	68	1	5
49	1	2	73	68	0	3

№ семьи n	Количество сестер $k(0,n)$	Количество братьев $k(1,n)$	Длительности естественных жизненных циклов (в годах)		Суммарное число болезней возраста	
			матери	отца	у сестер	у братьев
50	1	1	78	60	1	2
51	1	1	75	76	0	1
52	1	1	80	90	0	2
53	2	1	94	74	3	1
54	1	1	77	82	0	0
55	2	2	95	45	4	4

$n \in \{1, 2, \ldots, 55\}$ — порядковый номер семьи, данные о которой представлены в табл. 1, и $J_i(m, n)$ — значение индекса отягощенности болезнями возраста для i-й сестры (при $m = 0$) или i-го брата (при $m = 1$), определенное согласно равенству (1) при $\lambda_j = 0,25$, $j = 1, \ldots, 4$. В этом случае, если $k(m, n)$ — число сестер (при $m = 0$) и братьев (при $m = 1$) в этой семье, то средние значения индексов отягощенности болезнями возраста для них определяются стандартным способом [4]:

$$\overline{J}(m, n) = \frac{1}{k(m, n)} \sum_{i=1}^{k(m,n)} J_i(m, n), \quad m \in \{0, 1\}, \quad n \in \{1, 2, \ldots, 55\}.$$

Искомую математическую модель — наилучшую допустимую (оптимальную) модель, устанавливающую зависимость реализации среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для мужчин или женщин от нормированной длительности ЕЖЦ их родителей, — как и в работе [2], будем искать в классе полиномиальных моделей неизвестного порядка N:

$$\begin{aligned}
&\overline{J}(m, n) = \sum_{i=0}^{N} A_i(m)\tau^i(m, n) + \varepsilon_N(m, n), \quad m \in \{0,\ 1\}, \\
&n = 1, \ldots, P; \\
&\tau(m, n) \triangleq \begin{bmatrix} \tau_0(m, n) \\ \tau_1(m, n) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}); \\
&\tau^0(m, n) \triangleq 1; \\
&\tau^i(m, n) \triangleq \begin{bmatrix} \tau_0^i(m, n) \cdot \tau_1^0(m, n) \\ \tau_0^{i-1}(m, n) \cdot \tau_1^1(m, n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_0^0(m, n) \cdot \tau_1^i(m, n) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(i+1)\times 1}(\mathbb{R}),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $A_i(m) \in \mathrm{M}_{1\times(i+1)}(\mathbb{R})$ — матрица-строка неизвестных параметров;

$P = 55$ — количество исследуемых семей;

$$\tau_s(m,n) \triangleq \frac{t_s(m,n) - \min\limits_{n,s}\{t_s(m,n)\}}{\max\limits_{n,s}\{t_s(m,n)\} - \min\limits_{n,s}\{t_s(m,n)\}} \tag{3}$$

— нормированная длительность ЕЖЦ s-го родителя n-й семьи, и значение $s = 0$ соответствует матери, а $s = 1$ — отцу, $t_s(m,n)$ — длительность ЕЖЦ s-го родителя n-й семьи в годах; $\varepsilon_N(m,\ n)$ — невязка модели (2). А так как дисперсия невязок нам неизвестна, то максимально возможный порядок $N(m)$ модели (2) для каждого фиксированного значения $m \in \{0,1\}$, где $m = 0$ соответствует женщинам, а $m = 1$ — мужчинам), определяется как максимально возможное целое значение N, удовлетворяющее неравенству $(N+1)(N+2) < 2(P-1)$.

Далее полагаем

$$Y(m) \triangleq [\overline{J}(m,1), \overline{J}(m,2), \ldots, \overline{J}(m,P),] \in \mathrm{M}_{1\times P}(\mathbb{R});$$

$$T_N(m) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \tau(m,1) & \tau(m,2) & \ldots & \tau(m,P) \\ \tau^2(m,1) & \tau^2(m,2) & \ldots & \tau^2(m,P) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \tau^N(m,1) & \tau^N(m,2) & \ldots & \tau^N(m,P) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}\times P}(\mathbb{R});$$

$$A_N(m) \triangleq [A_0(m) \ \vdots \ A_1(m) \ \vdots \ \ldots \ \vdots \ A_N(m)] \in \mathrm{M}_{1\times\frac{(N+1)(N+2)}{2}}(\mathbb{R});$$

$$\varepsilon_N(m) \triangleq [\varepsilon_N(m,1),\ \ \varepsilon_N(m,2),\ \ldots,\ \varepsilon_N(m,P)] \in \mathrm{M}_{1\times P}(\mathbb{R}) \tag{4}$$

и приходим к задаче линейного оценивания неизвестных параметров полиномиальной модели (2), представленных матрицей $A_N(m)$:

$$Y(m) = A_N(m)T_N(m) + \varepsilon_N(m),\ \ m \in \{0,\ 1\},\ \ N = 1,\ \ldots,\ N(m). \tag{5}$$

Решение задачи параметрической идентификации исходной математической модели (2), (3) с использованием представления (4), (5), проверку ее адекватности изучаемому явлению и поиск оптимальной модели из множества допустимых (адекватных) моделей реализуем с использованием известного алгоритма [5].

Если $N = N^m_{\text{opt}}$ — порядок оптимальной модели для фиксированного значения $m \in \{0,\ 1\}$, то ее невязки с используемым уровнем значимости удовлетворяют стандартным требованиям регрессионного анализа [6], а матрица $A^*_N(m) \in \mathrm{M}_{1\times\rho(m)}(\mathbb{R})$ содержит лишь статистически значимые параметры, где $\rho(m)$ — число таких параметров. Это позволяет построить байесовскую прогнозную плотность распределения вероятностей [7] для оптимальной модели:

$$f(\overline{J}(m)|Y(m),\ T_N^*(m),\ T_{N,m}^*) \sim$$

$$\sim \left|1 + \frac{h_N(m)}{\mu_N(m)}\left[\overline{J}(m) - \widehat{A}_N^*(m)T_{N,m}^*\right]^2\right|^{-\frac{\mu_N(m)+1}{2}},$$

$$\mu_N(m) = P - \rho(m),$$

$$h_N(m) = \tag{6}$$

$$= \frac{1 - \left(T_{N,m}^*\right)^{\mathrm{T}}\left[\left(T_{N,m}^*\right)\left(T_{N,m}^*\right)^{\mathrm{T}} + \left(T_N^*(m)\right)\left(T_N^*(m)\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\left(T_{N,m}^*\right)}{s_N^2(m)},$$

$$s_N^2(m) = \frac{\left[Y(m) - \widehat{A}_N^*(m)T_N^*(m)\right]^{\mathrm{T}}\left[Y(m) - \widehat{A}_N^*(m)T_N^*(m)\right]}{\mu_N(m)},$$

$$\widehat{A}_N^*(m) = Y(m)\left(T_N^*(m)\right)^+,$$

где матрицы $T_N^*(m) \in \mathrm{M}_{\rho(m)\times P}(\mathbb{R})$, $T_{N,m}^* \in \mathrm{M}_{\rho(m)\times P}(\mathbb{R})$ содержат лишь те строки матрицы $T_N(m)$ и вектора

$$T_{N,m} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tau(m) \\ \tau^2(m) \\ \dots \\ \tau^N(m) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}\times 1}(\mathbb{R}),\ \ \tau(m) = \begin{bmatrix} \tau_0(m) \\ \tau_1(m) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}),$$

которые соответствуют статистически значимым элементам матрицы-строки $A_N(m)$, то есть элементам матрицы-строки $A_N^*(m)$; $P = 55$;

$$\overline{J}(m) = \widehat{A}_N^*(m)T_{N,m}^* \tag{7}$$

— прогнозное среднее значения индекса отягощенности болезнями возраста для женщин при $m = 0$ и мужчин при $m = 1$, а $\tau_0(m)$ и $\tau_1(m)$ — нормированная длительность ЕЖЦ матери и отца в рассматриваемых семьях соответственно; $\left(T_N^*(m)\right)^+$ — матрица, псевдообратная матрице $T_N^*(m)$ [6].

Плотность распределения вероятностей (6) является одномерной плотностью распределения вероятностей Стьюдента [4, 7]. Таким образом, по нормированной длительности ЕЖЦ родителей конкретного индивида можно найти не только точечную, но и интервальную оценку для прогнозного среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста.

Результаты и обсуждение. Как уже отмечалось выше, при проведении вычислительных экспериментов были использованы средние значения весовых коэффициентов $\lambda_j = 0,25, \quad j = 1, \ldots, 4$, в равенстве (1) для определения значений индекса отягощенности болезнями возраста и данные о 55 семьях, представленные в таблице. Для каждого фиксированного значения $m \in \{0, 1\}$ была идентифицирована оптимальная математическая модель зависимости среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для мужчин и женщин от длительности ЕЖЦ их родителей. Для женщин ($m = 0$) отклик — линейная функция нормированной длительности ЕЖЦ матери:

$$\overline{J}_0 = a_0 + a_1\tau_0. \tag{8}$$

Для мужчин ($m = 1$) отклик линейно зависит от длительности ЕЖЦ матери, а от длительности ЕЖЦ отца — по квадратичному закону:

$$\overline{J}_1 = a_2\tau_0 + a_3\tau_0\tau_1 + a_4\tau_1^2. \tag{9}$$

Значения точечных оценок МНК для параметров, входящих в оптимальные модели (8) и (9), соответственно равны:

$$\widehat{a}_0 = 0{,}418; \;\; \widehat{a}_1 = -0{,}261, \tag{10}$$

$$\widehat{a}_2 = 0{,}575; \;\; \widehat{a}_3 = -1{,}222; \;\; \widehat{a}_4 = 0{,}865. \tag{11}$$

Значения статистик Колмогорова–Смирнова в модификации Тюрина [8] для невязок оптимальных моделей (8)–(11) для женщин и мужчин, равные 0,851 и 0,667, соответственно, не превосходят критического значения 0,895 этой статистики при используемом уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Реализация алгоритма идентификации оптимальной модели [5] предполагает построение апостериорных симметричных доверительных интервалов [6] с доверительной вероятностью $1 - \alpha = 0{,}95$ для параметров всех моделей рассматриваемого класса. Для значений параметров оптимальных моделей (8)–(11) с вероятностью 0,95 должны выполняться неравенства:

$$0{,}242 \leqslant a_0 \leqslant 0{,}595, \quad -0{,}507 \leqslant a_1 \leqslant -0{,}014; \tag{12}$$

$$0{,}378 \leqslant a_2 \leqslant 0{,}772, \quad -1{,}819 \leqslant a_3 \leqslant -0{,}626, \quad 0{,}470 \leqslant a_4 \leqslant 1{,}260. \tag{13}$$

Таким образом, все параметры оптимальных моделей являются статистически значимыми [9], и с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ у нас нет оснований для отклонения гипотезы об адекватности оптимальных моделей (8)–(11).

Согласно оптимальной математической модели (8), (10), (12), на реализации среднего значения индекса отягощенности болезнями возра-

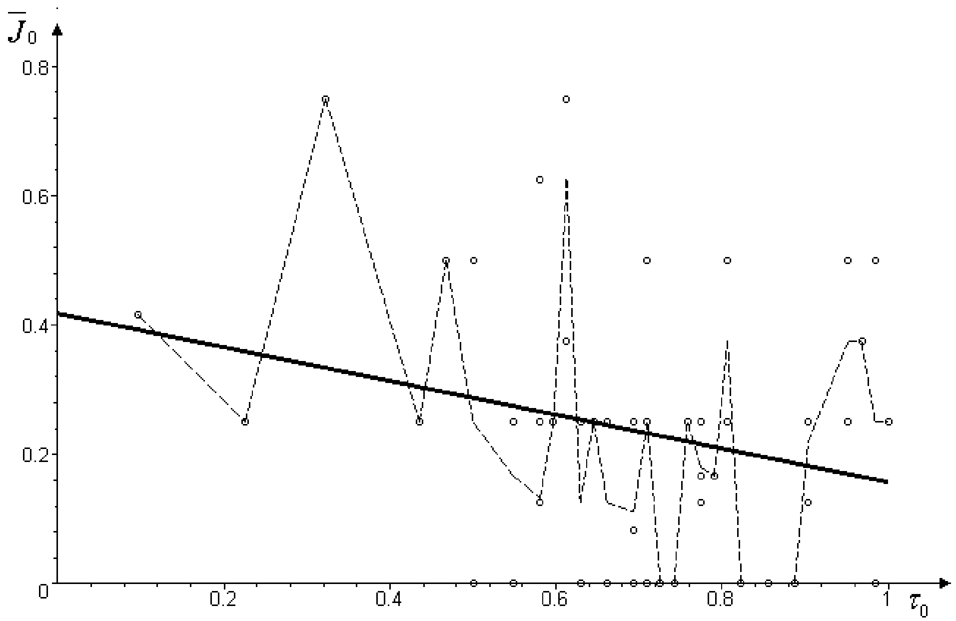

Рис. 1. Графики теоретической (——), построенной с использованием оптимальной модели (8), (10), и экспериментальной (○– – –○) зависимостей среднего индекса отягощенности болезнями возраста для женщин от нормированных длительностей естественных жизненных циклов их матерей

ста женщин доминирующее влияние оказывают нормированные длительности ЕЖЦ их матерей τ_0. При этом искомая зависимость является линейной: при монотонном возрастании нормированной длительности ЕЖЦ τ_0 матерей монотонно убывают средние значения индекса отягощенности болезнями возраста их дочерей. Следовательно, семьям с большей длительностью ЕЖЦ матерей соответствует меньшее среднее значение индекса отягощенности болезнями возраста для женщин в этой семье. Все это проиллюстрировано на рис. 1, где сплошной линией изображен график теоретической зависимости (8), (10) среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для женщин от нормированных длительности ЕЖЦ их матерей. На этом же рисунке пунктирной ломаной линией соединены экспериментальные значения или их математические ожидания, если одинаковые значения длительности ЕЖЦ имеют матери нескольких семей.

Согласно выражениям (9), (11), (13) зависимость среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для мужчин является более сложной — на реализации среднего значения индекса для мужчин оказывают влияние длительности ЕЖЦ как их отцов, так и матерей, т.е. графиком указанной зависимости является поверхность. Рассмотрим сечения этой поверхности плоскостями $\tau_0 =$ const и $\tau_1 =$ const. Графики полученных сечений при фиксированных значениях длительности ЕЖЦ отцов τ_1 или матерей τ_0, равных 0,097, 0,258, 0,471, 0,661,

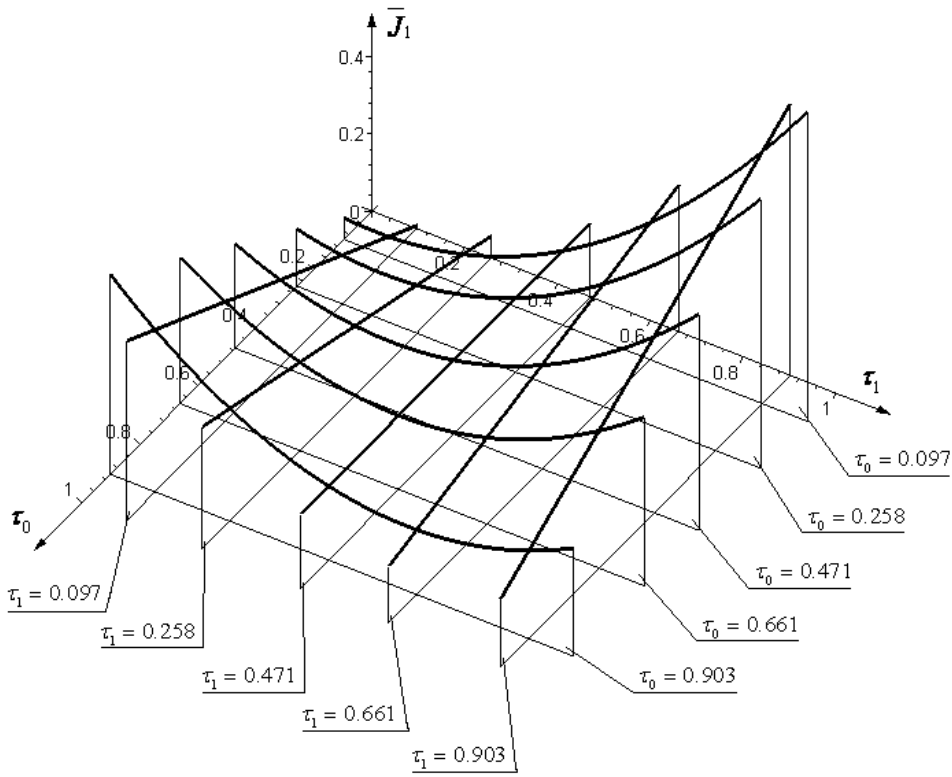

Рис. 2. Графики сечений поверхности (9), (11) плоскостями $\tau_0 = \mathrm{const}$ и $\tau_1 = \mathrm{const}$, являющейся теоретической зависимостью среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для мужчин от нормированных длительностей естественных жизненных циклов их матерей и отцов

0,903, что соответствует длительности ЕЖЦ в годах 40, 50, 63,2, 75 и 90 лет, приведены на рис. 2.

Как видно из рис. 2, при фиксированном значении длительности ЕЖЦ отца, т. е. при фиксированном значении τ_1, зависимость среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для мужчин от длительности ЕЖЦ их матерей является линейной функцией. Причем эта функция возрастает при значениях нормированной длительности ЕЖЦ отца $\tau_1 < 0{,}471$, является постоянной при $\tau_1 = 0{,}471$, и убывает при больших значениях τ_1. Таким образом, характер рассматриваемой зависимости соответствует при $\tau_1 > 0{,}471$ зависимости среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для женщин, определяемой моделью (8), (10) и изображенной на рис. 1. При любом фиксированном значении $\tau_1 < 0{,}471$ вид этой зависимости аналогичен полученному в работе [2].

При фиксированном значении нормированной длительности ЕЖЦ матери τ_0 (рис. 2) зависимость среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для мужчин от нормированной длительности

ЕЖЦ отца τ_1 является квадратичной и при $\tau_1^* = -(0{,}5a_3/a_4)\tau_0$ имеет точку глобального минимума.

Подводя итоги проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Зависимость индекса отягощенности болезнями возраста индивида или среднего значения данного индекса от длительности ЕЖЦ его родителей имеет место, что подтверждает результаты работы [2] с использованием другой выборки экспериментальных данных.

2. Оптимальные модели искомых зависимостей, полученные в работе [2], в данном исследовании также являются допустимыми, что говорит о корректности полученных результатов. Отличие этих моделей от оптимальных моделей (8), (9) можно объяснить как спецификой использованного критерия выбора оптимальной модели (критерий отношения остаточных дисперсий) [5, 7], так и ограниченностью выборок использованных экспериментальных данных. Этот факт также можно объяснить косвенным влиянием наличия или отсутствия братьев и сестер у индивида на индекс отягощенности болезнями возраста.

3. Представляет интерес проведение дальнейших исследований, позволяющих установить прямую зависимость индекса отягощенности болезнями возраста индивида от наличия и количества его братьев и сестер.

4. В соответствии с видом оптимальных моделей (8), (9) зависимостей среднего значения индекса отягощенности болезнями возраста для мужчин и женщин от длительности ЕЖЦ их родителей, на среднее значение данного индекса как для мужчин, так и для женщин оказывает влияние длительность ЕЖЦ матерей. При этом при фиксированных значениях $\tau_1 > 0{,}471$ в формуле (9) характер этих зависимостей идентичный (рис. 1, 2). Поскольку были идентифицированы математические модели данных зависимостей с использованием именно средних значений индекса для всех братьев и сестер семьи, что должно являться более стабильным результатом, т. е. более адекватно отражать ситуацию в целом, можно предположить, что наследование болезней возраста у индивида происходит прежде всего по материнской линии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Внутренние болезни. В 10 книгах. Пер. с англ. / Под ред. Е. Браунвальда, К.Дж. Иссельбахера, Р.Г. Петерсдорфа и др. Книга 1. – М.: Медицина, 1993. – 500 с.; Книга 2. – М.: Медицина, 1993. – 544 с.; Книга 5. –М.: Медицина, 1995. – 448 с.; Книга 8. – М.: Медицина, 1996. – 320 с.
2. Vinogradova E. I., Volkov I. K. The effect of parental life spans on age diseases in humans // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. – 2006. – Vol. 21, № 3.

3. В о л к о в И. К., З а г о р у й к о Е. А. Исследование операций. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 436 с.
4. П у г а ч е в В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
5. C h e b o t a r e v A. N., V i n o g r a d o v a E. I., V o l k o v I. K. Effect of the state of the geomagnetic field and solar activity on chromosome aberrations frequencies dynamics // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. – 2003. – Vol. 18, № 6. – P. 467–478.
6. А л ь б е р т А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
7. З е л ь н е р А. Байесовские методы в эконометрии. – М.: Статистика, 1980. – 438 с.
8. Т ю р и н Ю. Н. О предельном распределении статистики Колмогорова–Смирнова для сложной гипотезы // Изв. АН СССР. Математика. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 1314–1343.
9. З а к с Ш. Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776 с.

Статья поступила в редакцию 1.06.2006

Елена Ивановна Виноградова родилась в 1980 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2002 г. Старший преподаватель кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 5 научных работ в области идентификации математических моделей по данным эксперимента.

Ye.I. Vinogradova (b. 1979) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Senior teacher of “Mathematical Simulation” department of Bauman Moscow State Technical University. Author of 5 publications in the field of identification of mathematical models according to experimental data.

УДК 519.62:519.622.2:531.312

В. В. М у р а в ь е в

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РУНГЕ–КУТТЫ 4-ГО ПОРЯДКА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предложен способ анализа численного решения задач динамики тонкостенных оболочек, полученный при использовании метода конечных элементов и Рунге–Кутты 4-го порядка по времени. Построены функции, прогнозирующие численное решение, имеющие вид функций аналитического решения. Разработаны рекомендации по выбору величины шага интегрирования по времени. Для свободных и вынужденных колебаний оценена погрешность получаемого численного решения. Прогнозы численных решений сравниваются с аналитическими решениями и результатами численных экспериментов.

Обычно анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций в случае динамического нагружения проводится