УДК 519.21

А. В. Калинкин, А. В. Мастихин

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ГИБЕЛИ

Предложенный в работе [19] *метод построения незамкнутого решения первого и второго уравнений Колмогорова для экспоненциальной* (*двойной*) *производящей функции переходных вероятностей применен к одномерному, двухмерному и трехмерному марковским процессам гибели квадратичного типа. Для производящей функции переходных вероятностей получены представления в виде рядов Фурье, использующие обобщенные гипергеометрические функции и многочлены Якоби.*

Аналитический метод исследования марковских процессов с конечным или счетным множеством состояний основан на рассмотрении первой (обратной) и второй (прямой) систем дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей [1], [2], [5]. Число случаев, для которых найдено решение систем уравнений, невелико: известны решения для процесса простой гибели, процесса чистого рождения, процессов рождения и гибели линейного или пуассоновского типов (см. обзор [21], глава 2, § 2.1.1), ветвящихся процессов ([3], глава 1, § 8) и модификаций перечисленных случаев. “Неблагодарность решения уравнений Колмогорова” [4] отмечается специалистами в связи с приложениями теории марковских процессов.

Уравнения процесса простой гибели рассматриваются различными методами, например в работах [1], [4] применяется операционное исчисление. Явные выражения для переходных вероятностей имеют громоздкий вид [1] и малопригодны для исследования асимптотических свойств случайного процесса.

При специальных условиях на марковский процесс *вторая система дифференциальных уравнений* свертывается с помощью производящей функции переходных вероятностей, что позволяет представить систему в виде уравнения в частных производных [21]. В случае уравнения первого порядка имеем марковский ветвящийся процесс [3].

В случае второго порядка, исследование уравнения в частных производных и соответствующего марковского процесса гибели квадратичного типа начато работой [7], в которой ко второму уравнению Колмогорова применен метод разделения переменных и для производящей функции переходных вероятностей получен ряд Фурье с двумя разделенными переменными, при этом собственные функции — многочлены Гегенбауэра.

Таким же методом J. Letessier и G. Valent в цикле работ 1982–1995 гг. (см. [9], [10], обзор [11] и др.) получили решения в виде рядов по специальным функциям для уравнений второго, третьего и четвертого порядков. В работах [9], [11] и др. даны спектры и собственные функции для некоторых процессов рождения и гибели квадратичного, кубического и биквадратичного типов. Авторы строили ряды для второго уравнения Колмогорова со все более сложными функциями, когда уравнение для собственной функции принадлежит классу гипергеометрических уравнений (уравнение Фукса второго порядка с тремя особыми точками) или является обобщенным гипергеометрическим уравнением.

В работе [10] для процесса рождения и гибели квадратичного типа получено решение второго уравнения в виде ряда Фурье, когда собственные значения выражаются через эллиптический интеграл и уравнение для собственной функции принадлежит классу уравнений Гойна (уравнение Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками, см. [16], гл. 15, § 3).

Числовые коэффициенты в рядах определялись в работах [7, 9, 10] и др. стандартными для теории рядов Фурье интегральными формулами и во многих случаях остались ненайденными. Исходя из рядов для переходных вероятностей, неясна возможность делать выводы о предельных свойствах рассматриваемых марковских процессов. Построение незамкнутых решений уравнений Колмогорова для процессов рождения и гибели связано и с проблемой нахождения спектра таких уравнений [11]. Примеры решений, данные в работах [7], [9–11] и др., имеют дискретный спектр; построение примеров точных решений в случае непрерывного спектра [6] является сложной задачей [5].

В настоящей работе развитие метода разделения переменных применительно к уравнениям Колмогорова связано с введением экспоненциальной производящей функции переходных вероятностей [19], [21], что позволяет свернуть *первую систему дифференциальных уравнений* к уравнению в частных производных. Метод Фурье, применяемый одновременно к первому и второму уравнениям, приводит к ряду с тремя разделенными переменными, и коэффициенты ряда определяются известными в теории специальных функций разложениями экспоненты.

Даны примеры применения метода для уравнений процессов гибели квадратичного типа на N, N^2 и N^3. Найденные ряды содержат обобщенные гипергеометрические функции и многочлены Якоби. В последней части работы обсуждается переход от незамкнутых решений первого и второго уравнений к интегральному представлению решения.

Предварительные результаты приведены в работах [18], [20], [22, 23].

Обобщенный марковский процесс гибели квадратичного типа. На множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс ξ_t, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\}$, $i, j \in N$. Пусть при $t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$)

$$\begin{aligned} &P_{i,i-2}(t) = i(i-1)\lambda p_0 t + o\,(t), \\ &P_{i,i-1}(t) = (i(i-1)\lambda p_1 + i\mu)t + o\,(t), \\ &P_{ii}(t) = 1 - (i(i-1)\lambda + i\mu)t + o\,(t), \quad P_{ij}(t) = o\,(t), \end{aligned} \tag{1}$$

если $j \neq i-2, i-1, i$. Здесь $p_0 \geq 0$, $p_1 \geq 0$, $p_0 + p_1 = 1$. Введем производящие функции ($|s| \leq 1$)

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad i \in N.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в случае процесса ξ_t равносильна уравнению в частных производных [21]

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \lambda(p_0 + p_1 s - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \mu(1 - s)\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}, \tag{2}$$

с начальным условием $F_i(0; s) = s^i$.

Возможные скачки случайного процесса ξ_t изображены на рис. 1. В начальном состоянии i марковский процесс находится случайное время τ_i, $\mathbf{P}\{\tau_i \leq t\} = 1 - e^{-(i(i-1)\lambda + i\mu)t}$. Затем процесс переходит в состояние $i - 1$ с вероятностью $(p_1 i(i-1)\lambda + i\mu)/(i(i-1)\lambda + i\mu)$ или в состояние $i - 2$ с вероятностью $p_0 i(i-1)\lambda/(i(i-1)\lambda + i\mu)$. Далее аналогичная эволюция процесса гибели. Состояние 0 является поглощающим.

Марковский процесс ξ_t интерпретируется как модель бимолекулярной химической реакции с кинетической схемой $2T \to 0, T$; $T \to 0$ [7], [21].

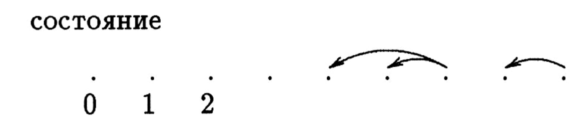

Рис. 1. Скачки обобщенного процесса гибели

Вводим экспоненциальную (двойную) производящую функцию

$$\mathcal{F}(t;z;s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} F_i(t;s) = \sum_{i=0,j=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} P_{ij}(t) s^j. \tag{3}$$

Функция $\mathcal{F}(t;z;s)$ является аналитической в области $|z| < \infty$, $|s| < 1$.

Первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей рассматриваемого марковского процесса получают вид [21]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z^2 \Big(p_0 \mathcal{F} + p_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} \Big) + \mu z \Big(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \Big), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (p_0 + p_1 s - s^2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s^2} + \mu (1 - s) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \tag{5}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0;z;s) = e^{zs}$. Линейные уравнения в частных производных второго порядка параболического типа (4), (5) решаются методом разделения переменных [12].

Далее нам потребуются следующие специальные функции (см. [14–17] и др.). Вырожденная гипергеометрическая функция определяется рядом ($b \neq 0, -1, -2, \ldots$)

$$_1F_1(a;b;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1) z^k}{b(b+1)\ldots(b+k-1) k!} \tag{6}$$

и удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$zy'' + (b - z) y' - ay = 0. \tag{7}$$

Функция (6) является аналитической на всей комплексной плоскости; при некоторых значениях параметров они выражаются через модифицированные функции Бесселя ([17], формулы 7.11.1(5)):

$$_1F_1(a;2a;z) = \Gamma\Big(a + \frac{1}{2}\Big) \Big(\frac{z}{4}\Big)^{1/2 - a} e^{z/2} I_{a-1/2}\Big(\frac{z}{2}\Big),$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Многочлен Якоби порядка n определяется выражением ([15], § 10.8)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+n-k+1)\ldots(\alpha+n)(\beta+k+1)\ldots(\beta+n)}{2^n k!(n-k)!} (x+1)^k (x-1)^{n-k},$$

$n = 0, 1, \ldots$, и является единственным полиномиальным решением дифференциального (гипергеометрического) уравнения

$$(1 - x^2) y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) x) y' + n(n + \alpha + \beta + 1) y = 0. \tag{8}$$

Далее потребуется разложение экспоненты ([15], § 10.20, формула (4))

$$e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}(2z)^n \times \\ \times e^{-z}{}_1F_1(n+\beta+1; 2n+\alpha+\beta+2; 2z)P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (9)$$

Теорема 1. *Пусть марковский процесс на множестве состояний* N *задан плотностями переходных вероятностей* (1). *Двойная производящая функция переходных вероятностей имеет вид* ($\lambda > 0$, $\mu \geq 0$)

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1+\mu/\lambda)}{\Gamma(2n-1+\mu/\lambda)}((1+p_0)z)^n e^{-p_0 z} \times \\ \times {}_1F_1(n+\mu/\lambda; 2n+\mu/\lambda; (1+p_0)z)P_n^{(-1,\mu/\lambda-1)} \times \\ \times \left(\frac{2s-1+p_0}{1+p_0}\right)e^{-(n(n-1)\lambda+n\mu)t}, \quad (10)$$

где $\Gamma(\alpha)$ *— гамма-функция,* ${}_1F_1(a, b; z)$ *— вырожденная гипергеометрическая функция,* $P_n^{(-1,\beta)}(x)$ *— многочлены Якоби.*

Доказательство. Решение системы уравнений (4), (5) ищем в форме ряда с тремя разделенными переменными ($|s| < 1$):

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \widetilde{C}_n(z) C_n(s) e^{-\lambda_n t}. \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в уравнения (4) и (5), получаем уравнения для функций $\widetilde{C}_n(z)$ и $C_n(s)$:

$$\lambda z^2(p_0\widetilde{C}_n(z) + p_1\widetilde{C}'_n(z) - \widetilde{C}''_n(z)) + \mu z(\widetilde{C}_n(z) - \widetilde{C}'_n(z)) + \lambda_n\widetilde{C}_n(z) = 0, \quad (12)$$

$$\lambda(p_0 + p_1 s - s^2)C''_n(s) + \mu(1-s)C'_n(s) + \lambda_n C_n(s) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots. \quad (13)$$

Дифференциальные уравнения (12) и (13), в случае $\mu = 0$ и $p_0 = 0$ или $p_0 = 1$, исследовались в работе [7], следуя которой показывается, исходя из условий на рассматриваемый марковский процесс, что для уравнения (13) имеет место краевое условие "$C_n(s)$ есть многочлен". Тогда последовательность "собственных значений" $\lambda_n = n(n-1)\lambda + n\mu$, $n = 0, 1, \ldots$ ([14], часть II, гл. 3, § 9.7). В уравнении (13) делаем замену переменной $x = (2s-1+p_0)/(1+p_0)$; вводим функцию $y(x)$ такую, что $C_n(s) = y(x)$. Тогда уравнение (13) получает вид уравнения (8):

$$(1-x^2)y'' + \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda}x\right)y' + n\left(n-1+\frac{\mu}{\lambda}\right)y = 0.$$

Следовательно, каждому λ_n соответствует “собственная функция”

$$C_n(s) = P_n^{(-1,\mu/\lambda-1)}\Big(\frac{2s-1+p_0}{1+p_0}\Big),$$

где

$$P_n^{(-1,\mu/\lambda-1)}(x) = \\ =\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)\dots(n-1)(\mu/\lambda+k)\dots(\mu/\lambda+n-1)}{2^n k!(n-k)!}(x+1)^k(x-1)^{n-k}. \quad (14)$$

Соответственно, уравнение (12) принимает вид

$$\lambda z^2(p_0\widetilde{C}_n(z) + p_1\widetilde{C}'_n(z) - \widetilde{C}''_n(z)) + \mu z(\widetilde{C}_n(z) - \widetilde{C}'_n(z)) + \\ + (n(n-1)\lambda + n\mu)\widetilde{C}_n(z) = 0$$

и представляет собой одну из приведенных форм вырожденного гипергеометрического уравнения (7) ([14], см. уравнение 2.273(6) при $a=-p_1$, $b=\mu/\lambda$, $\alpha=-p_0$, $\beta=-\mu/\lambda$, $\gamma=-n(n-1)-n\mu/\lambda$). Из условий на производящую функцию следует, что нас интересует решение, аналитическое на всей комплексной плоскости. Следуя работе [14],

$$\widetilde{C}_n(z) = ((1+p_0)z)^n e^{-p_0 z}\, {}_1F_1(n+\mu/\lambda; 2n+\mu/\lambda; (1+p_0)z),$$

где ${}_1F_1(a;b;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Таким образом, искомый ряд (11) имеет вид

$$\mathcal{F}(t;z;s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n((1+p_0)z)^n e^{-p_0 z}\times \\ \times {}_1F_1(n+\mu/\lambda; 2n+\mu/\lambda; (1+p_0)z) P_n^{(-1,\mu/\lambda-1)}\times \\ \times \Big(\frac{2s-1+p_0}{1+p_0}\Big) e^{-(n(n-1)\lambda+n\mu)t}.$$

Значения A_n определяются из сравнения начального условия $\mathcal{F}(0;z;s) = e^{zs}$ с разложением для экспоненты (9):

$$e^{zs} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1+\mu/\lambda)}{\Gamma(2n-1+\mu/\lambda)}((1+p_0)z)^n e^{-p_0 z}\times \\ \times {}_1F_1(n+\mu/\lambda; 2n+\mu/\lambda; (1+p_0)z) P_n^{(-1,\mu/\lambda-1)}\Big(\frac{2s-1+p_0}{1+p_0}\Big). \quad (15)$$

Получаем $A_n = \Gamma(n-1+\mu/\lambda)/\Gamma(2n-1+\mu/\lambda)$ и приходим к выражению (10). Сходимость ряда (10) при любых z, s и $t\in[0,\infty)$ следует из сходимости разложения (15). Теорема доказана.

При $t=0$ формула (10) есть разложение в ряд экспоненты e^{zs}. В случае $\mu>0$, $p_0=1$, имеем разложение по многочленам Якоби.

В случае $\mu = 0$, $p_0 = 1$, имеем разложение Сонина ([15], § 7.10.1, формула (5)).

Из выражения (6) имеем ${}_1F_1(\mu/\lambda; \mu/\lambda; z) = e^z = 1 + z + z^2/2 + \ldots$, ${}_1F_1(1 + \mu/\lambda; 2 + \mu/\lambda; z) = 1 + ((1 + \mu/\lambda)/(2 + \mu/\lambda))(1 + p_0)z + \ldots$, ${}_1F_1(2 + \mu/\lambda; 4 + \mu/\lambda; z) = 1 + \ldots$, и из выражения (14) имеем $P_0^{(-1,\mu/\lambda-1)}(x) = 1$; $P_1^{(-1,\mu/\lambda-1)}(x) = (\mu/(2\lambda))(x-1)$; $P_2^{(-1,\mu/\lambda-1)}(x) = ((1+\mu/\lambda)/8)[(2+\mu/\lambda)x^2 - (2\mu/\lambda)x - 2 + \mu/\lambda]$. Подставляя в формулу (10) указанные выражения и приравнивая коэффициенты при степенях $1, z, zs, z^2, z^2s, z^2s^2$ в получившемся ряде и определении (3), находим переходные вероятности

$$
\begin{aligned}
&P_{00}(t) = 1;\quad P_{10}(t) = 1 - e^{-\mu t};\quad P_{11}(t) = e^{-\mu t};\\
&P_{20}(t) = 1 - 2\Big[\frac{1+\mu/\lambda}{2+\mu/\lambda}(1+p_0) - p_0\Big]e^{-\mu t} +\\
&\quad + \frac{1}{4}\Big[\frac{-2+\mu/\lambda}{2+\mu/\lambda}(1+p_0)^2 - \frac{2\mu/\lambda}{2+\mu/\lambda}(-1+p_0^2) + (-1+p_0)^2\Big]e^{-(2\lambda+2\mu)t};\\
&P_{21}(t) = 2\Big[\frac{1+\mu/\lambda}{2+\mu/\lambda}(1+p_0) - p_0\Big]e^{-\mu t} -\\
&\qquad - \Big[\frac{\mu/\lambda}{2+\mu/\lambda}(1+p_0) + 1 - p_0\Big]e^{-(2\lambda+2\mu)t};\\
&P_{22}(t) = e^{-(2\lambda+2\mu)t}.
\end{aligned}
$$

Эти выражения для $P_{ij}(t)$ могут быть получены при указанных значениях i, j непосредственным решением системы дифференциальных уравнений Колмогорова [1] для рассматриваемого обобщенного процесса гибели.

Двухмерный процесс гибели квадратичного типа. Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого представимы при $t \to 0+$ в виде ($\lambda > 0$)

$$
\begin{aligned}
&P_{(\alpha_1-1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p_{00}\alpha_1\alpha_2\lambda t + o\,(t),\ P_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p_{10}\alpha_1\alpha_2\lambda t + o\,(t),\\
&P_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p_{01}\alpha_1\alpha_2\lambda t + o\,(t),\ P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - \alpha_1\alpha_2\lambda t + o\,(t),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $p_{00} \geq 0$, $p_{10} \geq 0$, $p_{01} \geq 0$, $p_{00} + p_{10} + p_{01} = 1$. С помощью производящей функции ($|s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1$)

$$
F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in N^2,
$$

вторая система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей марковского процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ записывается в виде урав-

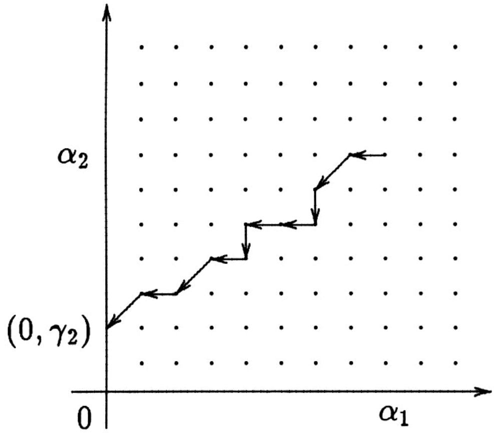

Рис. 2. Реализация двухмерного процесса гибели

нения в частных производных [21]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2)}{\partial t}=\lambda(p_{00}+p_{10}s_1+p_{01}s_2-s_1s_2)\frac{\partial^2 F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2},$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(0;s_1,s_2)=s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}$.

Пример реализации процесса $(\xi_1(t),\xi_2(t))$ изображен на рис. 2. В начальном состоянии (α_1,α_2) марковский процесс находится случайное время $\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)}\leq t\}=1-e^{-\alpha_1\alpha_2\lambda t}$. Затем с вероятностью p_{10} процесс переходит в состояние (α_1,α_2-1), с вероятностью p_{00} переходит в состояние (α_1-1,α_2-1) или с вероятностью p_{01} переходит в состояние (α_1-1,α_2). Далее получим аналогичную эволюцию случайного процесса. Состояния $\{(\gamma_1,0),\ (0,\gamma_2),\ \gamma_1,\gamma_2=0,1,2,\ldots\}$ являются поглощающими. “Вложенная цепь Маркова” для процесса $(\xi_1(t),\xi_2(t))$ является случайным блужданием на N^2.

Марковский процесс $(\xi_1(t),\xi_2(t))$ представляет собой модель популяции с особями мужского рода и особями женского рода. Состояние (α_1,α_2) интерпретируется как наличие совокупности из α_1 особей типа T_1 и α_2 особей типа T_2; в случайные моменты времени происходят взаимодействия пар различных особей, превращающихся в новые совокупности особей. Основные предположения в модели: любая пара особей T_1+T_2 в популяции порождает потомство независимо от всех других; частота актов порождения новых особей пропорциональна числу особей типа T_1 и пропорциональна числу особей типа T_2.

С помощью экспоненциальной производящей функции

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2;s_1,s_2)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!}F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2)$$

первая и вторая системы дифференциальных уравнений для переходных вероятностей такого марковского процесса записываются в виде [21]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z_1 z_2 \Big(p_{00}\mathcal{F} + p_{10}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} + p_{01}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big), \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (p_{00} + p_{10}s_1 + p_{01}s_2 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2}, \tag{18}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Обобщенная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$_0F_1(b; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{b(b+1)\ldots(b+k-1)k!} \tag{19}$$

и удовлетворяет уравнению

$$zy'' + by' - y = 0.$$

Функция (19) выражается через модифицированные функции Бесселя ([17], формула 7.13.1(1)):

$$_0F_1(b; z) = \Gamma(b) z^{(1-b)/2} I_{b-1}(2\sqrt{z}).$$

Теорема 2. *Пусть марковский процесс на множестве состояний* N^2 *задан плотностями переходных вероятностей* (16). *Двойная производящая функция переходных вероятностей имеет вид* $(p_{10} < 1, p_{01} < 1)$

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \\ = e^{p_{01}z_1 + p_{10}z_2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \frac{((1-p_{01})z_1)^{\alpha_1}((1-p_{10})z_2)^{\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)!} \times \\ \times {}_0F_1(\alpha_1 + \alpha_2 + 1; (1-p_{01})(1-p_{10})z_1 z_2) \times \\ \times \Big(\frac{s_\sigma - p_\sigma}{1 - p_\sigma}\Big)^{|\alpha_1 - \alpha_2|} P^{(-1, |\alpha_1 - \alpha_2|)}_{\min(\alpha_1, \alpha_2)} \Big(2\,\frac{s_1 - p_{01}}{1 - p_{01}}\,\frac{s_2 - p_{10}}{1 - p_{10}} - 1 \Big) e^{-\alpha_1 \alpha_2 \lambda t}, \tag{20}$$

где $_0F_1(b; z)$ — *обобщенная гипергеометрическая функция,* $P_n^{(-1,\beta)}(x)$ — *многочлены Якоби*; $s_\sigma = s_1$, $p_\sigma = p_{01}$, *если* $\alpha_1 \geq \alpha_2$, *и* $s_\sigma = s_2$, $p_\sigma = p_{10}$, *если* $\alpha_1 < \alpha_2$; *при* $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ *выражение* $(\alpha_1 + \alpha_2)/\max(\alpha_1, \alpha_2)$ *полагается равным* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваем уравнения в частных производных (17), (18). Решение ищем в форме ряда ($|s_1| < 1$, $|s_2| < 1$)

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} A_{\alpha_1 \alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1 \alpha_2}(z_1, z_2) C_{\alpha_1 \alpha_2}(s_1, s_2) e^{-\lambda_{\alpha_1 \alpha_2} t}. \tag{21}$$

Подставив выражение (21) в уравнения (17) и (18), получаем уравнения для функций $\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2)$ и $C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2)$:

$$\lambda z_1 z_2 \Big(p_{00}\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} + p_{10}\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1} + p_{01}\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1 \partial z_2}\Big) + \\ + \lambda_{\alpha_1\alpha_2}\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} = 0; \quad (22)$$

$$\lambda(p_{00} + p_{10}s_1 + p_{01}s_2 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 C_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_1\alpha_2} = 0; \\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots . \quad (23)$$

Из условий для скачков процесса $\xi(t)$ следует, что для уравнения (23) имеет место краевое условие “$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2)$ есть многочлен”. Тогда последовательность “собственных значений” $\lambda_{\alpha_1\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2\lambda$, $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$, и из уравнения (23) нетрудно найти соответствующую “собственную функцию”

$$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) = \Big(\frac{s_\sigma - p_\sigma}{1 - p_\sigma}\Big)^{|\alpha_1-\alpha_2|} P^{(-1,|\alpha_1-\alpha_2|)}_{\min(\alpha_1,\alpha_2)}\Big(2\,\frac{s_1 - p_{01}}{1 - p_{01}}\,\frac{s_2 - p_{10}}{1 - p_{10}} - 1\Big),$$

где $P^{(-1,\beta)}_n(x)$ — многочлены Якоби; $s_\sigma = s_1$, $p_\sigma = p_{01}$, если $\alpha_1 \geq \alpha_2$ и $s_\sigma = s_2$, $p_\sigma = p_{10}$, если $\alpha_1 < \alpha_2$. Соответственно, уравнение (22) принимает вид

$$z_1 z_2 \Big(p_{00}\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} + p_{10}\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1} + p_{01}\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1 \partial z_2}\Big) + \alpha_1\alpha_2\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} = 0.$$

Из условий для функции $\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2)$ следует, что нас интересует аналитическое решение при любых z_1, z_2:

$$\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) = ((1 - p_{01})z_1)^{\alpha_1}((1 - p_{10})z_2)^{\alpha_2} \times \\ \times e^{p_{01}z_1 + p_{10}z_2}\,{}_0F_1(\alpha_1 + \alpha_2 + 1; (1 - p_{01})(1 - p_{10})z_1 z_2),$$

где ${}_0F_1(b; z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Для определения значений $A_{\alpha_1\alpha_2}$ получим разложение экспоненты $e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$. Исходя из определения гипергеометрической функции (19) устанавливается равенство

$$e^{z_1+z_2} = {}_0F_1(1; z_1 z_2) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{z_1^k}{k!} + \frac{z_2^k}{k!}\Big){}_0F_1(k + 1; z_1 z_2). \quad (24)$$

Для рассматриваемых специальных функций справедливы соотношения ([17], формула 6.8.3.13):

$${}_0F_1(1; zs) = {}_0F_1(1; z) + 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{(2l)!}{}_0F_1(2l + 1; z)P^{(-1,0)}_l(2s - 1); \quad (25)$$

$$\frac{1}{k!}{}_0F_1(k+1;zs) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{(2l+k-1)!(l+k)} {}_0F_1(2l+k+1;z) P_l^{(-1,k)}(2s-1), \quad (26)$$

$k = 1, 2, \ldots$ Используя выражения (24), (25) и (26), имеем цепочку равенств:

$$e^{z_1 s_1 + z_2 s_2} = e^{p_{01} z_1 + p_{10} z_2} e^{z_1(s_1 - p_{01}) + z_2(s_2 - p_{10})} =$$

$$= e^{p_{01} z_1 + p_{10} z_2} \Big\{ {}_0F_1\Big(1; (1-p_{01})(1-p_{10}) z_1 z_2 \Big(\frac{s_1 - p_{01}}{1-p_{01}}\Big)\Big(\frac{s_2 - p_{10}}{1-p_{10}}\Big)\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{((1-p_{01})z_1)^k}{k!}\Big(\frac{s_1 - p_{01}}{1-p_{01}}\Big)^k + \frac{((1-p_{10})z_2)^k}{k!}\Big(\frac{s_2 - p_{10}}{1-p_{10}}\Big)^k\Big] \times$$

$$\times {}_0F_1\Big(k+1; (1-p_{01})(1-p_{10}) z_1 z_2 \Big(\frac{s_1 - p_{01}}{1-p_{01}}\Big)\Big(\frac{s_2 - p_{10}}{1-p_{10}}\Big)\Big)\Big\} =$$

$$= e^{p_{01} z_1 + p_{10} z_2} \Big\{ {}_0F_1(1; (1-p_{01})(1-p_{10}) z_1 z_2) +$$

$$+ 2 \sum_{\alpha_1 = 1}^{\infty} \frac{((1-p_{01})z_1)^{\alpha_1}((1-p_{10})z_2)^{\alpha_1}}{(2\alpha_1)!} \times$$

$$\times {}_0F_1(2\alpha_1 + 1; (1-p_{01})(1-p_{10}) z_1 z_2) P_{\alpha_1}^{(-1,0)}\Big(2\,\frac{s_1 - p_{01}}{1-p_{01}}\,\frac{s_2 - p_{10}}{1-p_{10}} - 1\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha_2 = 0}^{\infty} \frac{((1-p_{01})z_1)^{\alpha_2 + k}((1-p_{10})z_2)^{\alpha_2}}{(2\alpha_2 + k - 1)!(\alpha_2 + k)} \times$$

$$\times {}_0F_1(2\alpha_2 + k + 1; (1-p_{01})(1-p_{10}) z_1 z_2) \times$$

$$\times \Big(\frac{s_1 - p_{01}}{1-p_{01}}\Big)^k P_{\alpha_2}^{(-1,k)}\Big(2\,\frac{s_1 - p_{01}}{1-p_{01}}\,\frac{s_2 - p_{10}}{1-p_{10}} - 1\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 = 0}^{\infty} \frac{((1-p_{01})z_1)^{\alpha_1}((1-p_{10})z_2)^{\alpha_1 + k}}{(2\alpha_1 + k - 1)!(\alpha_1 + k)} \times$$

$$\times {}_0F_1(2\alpha_1 + k + 1; (1-p_{01})(1-p_{10}) z_1 z_2) \times$$

$$\times \Big(\frac{s_2 - p_{10}}{1-p_{10}}\Big)^k P_{\alpha_1}^{(-1,k)}\Big(2\,\frac{s_1 - p_{01}}{1-p_{01}}\,\frac{s_2 - p_{10}}{1-p_{10}} - 1\Big)\Big\}. \quad (27)$$

Из сравнения ряда (21) при $t = 0$ с разложением экспоненты (27) следует, что $A_{00} = 1$, $A_{\alpha_1 \alpha_2} = 1/(\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)!)$, если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, и $A_{\alpha_1 \alpha_2} = 1/(\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)!)$, если $\alpha_1 < \alpha_2$; получаем решение (20) для системы уравнений (17), (18).

Абсолютная сходимость ряда (20) при любых z_1, z_2, s_1, s_2 и $t \in [0, \infty)$ следует из сходимости ряда (27). Теорема доказана.

Дадим выражения для $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t)$ при начальных значениях $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$. Из выражения (19) имеем ${}_0F_1(1;z) = 1 + z + \ldots$, ${}_0F_1(2;z) = 1 + z/2 + \ldots$, ${}_0F_1(3;z) = 1 + \ldots$, ${}_0F_1(4;z) = 1 + {} + \ldots$, и из выражения (14) имеем $P_0^{(-1,0)}(x) = 1$, $P_0^{(-1,1)}(x) = 1$, $P_1^{(-1,0)}(x) = (1/2)(x-1)$, $P_1^{(-1,1)}(x) = x-1$. Подставляя эти функции в формулу (20), вместе с разложением экспоненты $e^{p_{01}z_1+p_{10}z_2} = 1 + {} + p_{01}z_1 + p_{10}z_2 + p_{01}^2z_1^2/2 + p_{01}p_{10}z_1z_2 + p_{10}^2z_2^2/2 + \ldots$, и приравнивая коэффициенты при степенях $1, z_1, z_1s_1, z_2, z_2s_2, \ldots, z_1z_2^2s_2^2, z_1z_2^2s_1s_2^2$ в получившемся ряде и при определении двойной производящей функции переходных вероятностей, находим:

$$P^{(0,0)}_{(0,0)}(t) = 1,\ P^{(1,0)}_{(0,0)}(t) = 0,\ P^{(1,0)}_{(1,0)}(t) = 1,\ P^{(0,1)}_{(0,0)}(t) = 0,\ P^{(0,1)}_{(0,1)}(t) = 1,$$
$$P^{(1,1)}_{(0,0)}(t) = p_{00}(1-e^{-\lambda t}), P^{(1,1)}_{(1,0)}(t) = p_{10}(1-e^{-\lambda t}),\ P^{(1,1)}_{(0,1)}(t)=p_{01}(1-e^{-\lambda t}),$$
$$P^{(1,1)}_{(1,1)}(t) = e^{-\lambda t}, P^{(0,2)}_{(0,0)}(t) = 0,\ P^{(0,2)}_{(0,1)}(t) = 0,\ P^{(0,2)}_{(0,2)}(t) = 1,$$
$$P^{(1,2)}_{(0,0)}(t) = p_{00}p_{10}(1-2e^{-\lambda t}+e^{-2\lambda t}),\ P^{(1,2)}_{(1,0)}(t) = p_{10}^2(1-2e^{-\lambda t}+e^{-2\lambda t}),$$
$$P^{(1,2)}_{(0,1)}(t) = p_{00} + p_{10}p_{01} - 2p_{10}p_{01}e^{-\lambda t} - (p_{00} - p_{10}p_{01})e^{-2\lambda t},$$
$$P^{(1,2)}_{(1,1)}(t) = 2p_{10}(e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}),\ P^{(1,2)}_{(0,2)}(t) = p_{01}(1-e^{-2\lambda t}),\ P^{(1,2)}_{(1,2)}(t) = e^{-2\lambda t}.$$

Вероятностная модель бимолекулярной реакции. Рассмотрим однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0,\infty)$, на множестве состояний $N^3 = \{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 = {} = 0,1,\ldots\}$. Пусть переходные вероятности $P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)$ представимы при $t \to 0+$ в виде [2] ($\lambda > 0$)

$$\begin{gathered} P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2-1,\alpha_3+1)}(t) = \alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t), \\ P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t) = 1 - \alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t). \end{gathered} \tag{28}$$

С помощью производящей функции ($|s_1| \le 1, |s_2| \le 1, |s_3| \le 1$)

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3},$$

вторая система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей процесса записывается в виде [21]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial t} = \lambda(s_3 - s_1s_2)\frac{\partial^2 F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t; s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2}, \tag{29}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3}$.

В состоянии $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ марковский процесс находится случайное время $\tau_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$, $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \le t\} = 1 - e^{-\alpha_1\alpha_2\lambda t}$, и затем переходит в состояние $(\alpha_1-1, \alpha_2-1, \alpha_3+1)$. Реализация процесса

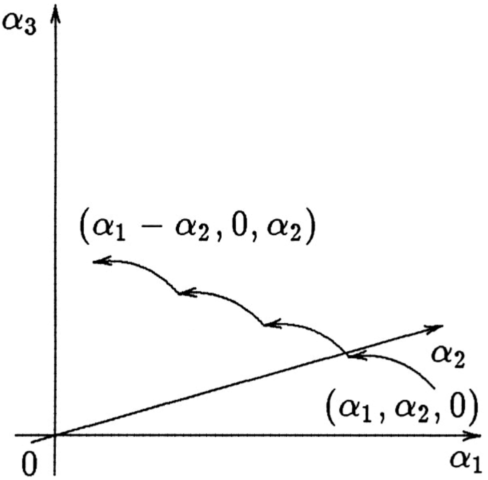

Рис. 3. Реализация процесса $T_1 + T_2 \to T_3$, случай $\alpha_1 > \alpha_2$

$(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ при начальном состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ изображена на рис. 3. Если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то остановка процесса произойдет в поглощающем состоянии $(\alpha_1 - \alpha_2, 0, \alpha_2)$, и если $\alpha_2 \geq \alpha_1$, то в состоянии $(0, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_1)$.

Марковский процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ представляет собой модель химической реакции $T_1 + T_2 \to T_3$ [2]. Состояние процесса $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ интерпретируется как наличие α_1 элементов типа T_1, α_2 элементов типа T_2, α_3 элементов типа T_3; в случайные моменты времени пары элементов $T_1 + T_2$ превращаются в элемент типа T_3. В работе [2] обсуждается связь второго уравнения (29) и известного в химической кинетике закона действующих масс [7], [21]; там же получены громоздкие явные выражения для переходных вероятностей процесса.

С помощью экспоненциальной производящей функции

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} F_{(\alpha_1, \alpha_2, 0)}(t; s_1, s_2, s_3),$$

первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова для рассматриваемого процесса записываются в виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z_1 z_2 \Big(s_3 \mathcal{F} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big), \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (s_3 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2}, \tag{31}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Теорема 3. *Пусть марковский процесс на множестве состояний N^3 задан плотностями переходных вероятностей* (28). *Двойная производящая функция переходных вероятностей имеет вид*

$$
\mathcal{F}(t; z_1, z_2;\ s_1, s_2, s_3) =
$$
$$
= \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\max(\alpha_1,\alpha_2)} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)!} {}_0F_1(\alpha_1+\alpha_2+1; z_1 z_2 s_3)\times
$$
$$
\times\, s_\sigma^{|\alpha_1-\alpha_2|} s_3^{\min(\alpha_1,\alpha_2)} P_{\min(\alpha_1,\alpha_2)}^{(-1,|\alpha_1-\alpha_2|)}\Big(2\frac{s_1 s_2}{s_3}-1\Big) e^{-\alpha_1\alpha_2\lambda t}, \quad (32)
$$

где ${}_0F_1(b; z)$ *— обобщенная гипергеометрическая функция,* $P_n^{(-1,\beta)}(x)$ *— многочлены Якоби*; $s_\sigma = s_1$, *если* $\alpha_1 \ge \alpha_2$, *и* $s_\sigma = s_2$, *если* $\alpha_1 < \alpha_2$; *при* $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ *выражение* $(\alpha_1+\alpha_2)/\max(\alpha_1,\alpha_2)$ *полагается равным* 1.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, система уравнений (30), (31) решается методом разделения переменных. В частности, если в формуле (20) положить $p_{10} = p_{01} = 0$ (т.е. $p_{00} = 1$), и в формуле (32) положить $s_3 = 1$, то указанные формулы совпадают.

Процесс простой гибели, нелинейное свойство переходных вероятностей марковского ветвящегося процесса и вывод замкнутых решений уравнений Колмогорова. Рассматривается марковский процесс ξ_t, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$; переходные вероятности $P_{ij}(t)$, $i, j \in N$, представимы при $t \to 0+$ в виде [1]

$$
P_{i,i-1}(t) = \varphi_i t + o\,(t), \quad P_{ii}(t) = 1 - \varphi_i t + o\,(t), \quad (33)
$$

где заданы $\varphi_0 = 0$, $\varphi_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Скачок процесса гибели ξ_t изображен на рис. 4. В начальном состоянии i процесс находится случайное время τ_i, $\mathbf{P}\{\tau_i \le t\} = 1 - e^{-\varphi_i t}$. В момент τ_i происходит переход процесса в состояние $i-1$ и так далее.

Первая и вторая системы дифференциальных уравнений для переходных вероятностей процесса ξ_t, после свертки двойной производящей функцией ($|s| \le 1$)

$$
\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_i} F_i(t; s), \quad F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad i \in N, \quad (34)
$$

получают вид [21]

$$
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = z(\mathcal{F} - D_z(\mathcal{F})), \quad (35)
$$

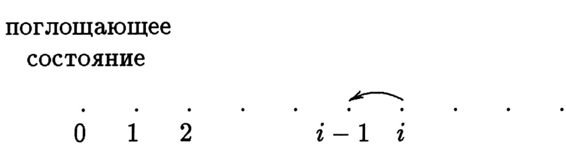

Рис. 4. Скачки процесса простой гибели

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = (1-s)D_s(\mathcal{F}), \tag{36}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0;z;s) = e(zs)$. Здесь применяется оператор Гельфонда–Леонтьева [13] обобщенного дифференцирования

$$D_z\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i z^{i-1},$$

определенный на аналитических в окрестности нуля функциях. Функция

$$e(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i}$$

является собственной функцией для оператора D_z, $D_z(e(z)) = e(z)$.

Теорема 4 [21] **.** *Пусть марковский процесс гибели на множестве состояний N задан плотностями переходных вероятностей* (33), $\varphi_{i+1} > \varphi_i$, $i \in N$, и $\lim_{i\to\infty} \varphi_i = \infty$. *Двойная производящая функция переходных вероятностей представима рядом Фурье*

$$\mathcal{F}(t;z;s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1 \dots \varphi_n} \widetilde{C}_n(z) C_n(s) e^{-\varphi_n t}, \tag{37}$$

где

$$\widetilde{C}_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\dots(\varphi_{n+k} - \varphi_n)},$$

$$C_n(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{k+1} \dots \varphi_n}{(\varphi_k - \varphi_n)\dots(\varphi_{n-1} - \varphi_n)}\, s^k.$$

Ряд (37) *абсолютно сходится при любых z, $|s| < 1$ и $t \in [0,\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражения для переходных вероятностей процесса простой гибели известны [1]: $P_{0j}(t) = \delta_j^0,\ j \in N;\ P_{ij}(t) = 0$ при $j > i \geq 1$; при $j \leq i$

$$P_{ij}(t) =$$
$$= \varphi_{j+1} \dots \varphi_i \sum_{n=j}^{i} \frac{e^{-\varphi_n t}}{(\varphi_i - \varphi_n)\dots(\varphi_{n+1} - \varphi_n)(\varphi_{n-1} - \varphi_n)\dots(\varphi_j - \varphi_n)}. \tag{38}$$

Используем определение двойной производящей функции (34) и (38):

$$\mathcal{F}(t;z;s) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i} P_{ij}(t) s^j = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\sum_{n=j}^{i} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_j} \times$$

$$\times \frac{e^{-\varphi_n t}}{(\varphi_i - \varphi_n)\ldots(\varphi_{n+1} - \varphi_n)(\varphi_{n-1} - \varphi_n)\ldots(\varphi_j - \varphi_n)}\, s^j =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\varphi_n t}}{\varphi_1 \ldots \varphi_n}\Big(z^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{z^i}{(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\ldots(\varphi_i - \varphi_n)}\Big)\times$$

$$\times \Big(s^n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi_{j+1}\ldots\varphi_n}{(\varphi_j - \varphi_n)\ldots(\varphi_{n-1} - \varphi_n)} s^j\Big).$$

Сходимость ряда для $\mathcal{F}(t; z; s)$ следует из оценки

$$\Big|\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1\ldots\varphi_i} P_{ij}(t) s^j\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|z|^i}{\varphi_1\ldots\varphi_i}\, |s|^j \leq \frac{1}{1-|s|}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|z|^i}{\varphi_1\ldots\varphi_i} < \infty$$

для любых z и $|s| < 1$. Теорема 4 доказана.

Таким образом, решение (37) системы уравнений Колмогорова (35), (36) имеет вид ряда с тремя разделенными переменными. При $t = 0$ получаем разложение функции

$$e(zs) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1\ldots\varphi_n} \widetilde{C}_n(z) C_n(s);$$

функции $\widetilde{C}_n(z)$ и $C_n(s)$ связаны интегральным преобразованием.

Важным частным случаем является процесс гибели линейного типа, в котором $\varphi_i = i\mu$, $i \in N$ ($\mu > 0$). Тогда $D_z = \mu\,(d/dz)$, и производящая функция переходных вероятностей $F_i(t; s)$ удовлетворяет уравнению [3], [5] (ср. уравнение (2) при $\lambda = 0$):

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \mu(1-s)\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}, \tag{39}$$

с начальным условием $F_i(t; s) = s^i$. Для процесса линейного типа ряд (37) легко суммируется, и выражение для $\mathcal{F}(t; z; s)$ получает вид

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/\mu)^n}{n!} e^{z/\mu}(s-1)^n\, e^{-n\mu t} = e^{(z/\mu)(1+(s-1)e^{-\mu t})}. \tag{40}$$

Из определения $\mathcal{F}(t; z, s) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(z^i/(\mu^i i!))F_i(t; s)$ и разложения функции (40) по степеням z, приравнивая коэффициенты при степенях z^i, получаем *свойство ветвления* переходных вероятностей ([3], гл. 1)

$$F_i(t; s) = (1 - e^{-\mu t} + s\, e^{-\mu t})^i = F_1^i(t; s), \quad i \in N. \tag{41}$$

Непосредственное решение линейного уравнения в частных производных первого порядка (39) методом характеристик приводит к выражению (41) (см., например, [5], § 3.2).

Нелинейное свойство переходных вероятностей (41) позволяет рассматривать *процесс гибели частиц*: в момент времени $t = 0$ имеется i тождественных частиц, каждая из которых существует случайное время $\tau^{(k)}$, $\mathbf{P}\{\tau^{(k)} \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}$; величины $\tau^{(k)}$, $k = 1, \ldots, i$, независимы (гибель одной из этих частиц соответствует переходу марковского процесса ξ_t из состояния i в состояние $i - 1$ и так далее).

Для марковских процессов, обладающих свойством ветвления, построен мощный аналитический аппарат их исследования [3]. Тем самым, для процесса простой гибели ставится задача вывода нелинейного свойства переходных вероятностей, обобщающего свойство (41), что сводится к аналитической проблеме суммирования ряда Фурье (37) — при тех или иных предположениях о функции $\varphi_i = \varphi(i)$, $i \in N$.

Для процесса гибели квадратичного типа, в котором $\varphi_i = i(i-1)\lambda$ $(D_z = \lambda z\,(d^2/dz^2))$, ряд (37) (т.е. ряд (10) при $\lambda > 0$, $\mu = 0$, $p_1 = 1$) суммирован в работах [19], [21] с помощью теоремы сложения Гегенбауэра ([15], § 7.6.1) к замкнутому представлению для двойной производящей функции переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z; s)$. Получено интегральное представление для $F_i(t; s)$, аналогичное по своей структуре выражению (41).

Для обобщенного процесса гибели квадратичного типа ($\lambda > 0$, $\mu > 0$) также возможно получить замкнутое решение уравнений Колмогорова (4), (5) методами, изложенными в работах [19], [21]. Ряд (10) рассматривается с целью суммирования и вывода нелинейного свойства переходных вероятностей

$$F_i(t; s) = \mathbf{M}(X_t + sY_t)^i, \quad i \in N, \tag{42}$$

где X_t, Y_t — некоторые взаимосвязанные случайные процессы.

Для двухмерного процесса гибели квадратичного типа ряд (20) рассматривается с целью вывода путем суммирования ряда замкнутого решения системы (17), (18) в виде, аналогичном нелинейному свойству (41):

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \mathbf{M}(X_t + s_1 Y_t)^{\alpha_1}(Z_t + s_2 U_t)^{\alpha_2}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in N^2, \tag{43}$$

где X_t, Y_t, Z_t, U_t — некоторые взаимосвязанные случайные процессы.

Возможность вывода интегральных представлений вида (42), (43) детально обсуждается в гл. 5 работы [21]. Формулы, подобные (42), (43), получены для процесса эпидемии — марковского процесса гибели квадратичного типа на множестве состояний N^3 [24].

Заключение. Рассмотренная модификация метода разделения переменных, применительно к первому и второму уравнениям Колмогорова, может быть использована для других марковских процессов гибели. Для примера укажем на процесс простой гибели полиномиального типа, в котором $\varphi_i = i(i-1)\ldots(i-k+1)\lambda$ $(k = 3, 4, \ldots)$; уравнения для двойной производящей функции имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z^k \Big(\frac{\partial^{k-1}\mathcal{F}}{\partial z^{k-1}} - \frac{\partial^k \mathcal{F}}{\partial z^k} \Big),$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (s^{k-1} - s^k) \frac{\partial^k \mathcal{F}}{\partial s^k},$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z; s) = e^{zs}$.

Аналогичным образом, к ряду с тремя разделенными переменными приводит решение первого и второго уравнений для переходных вероятностей процесса чистого рождения и обобщенных процессов рождения. Например, для приложений представляет интерес процесс чистого рождения квадратичного типа на N^2 [8], [5]; уравнения для двойной производящей функции имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial z_1^2 \partial z_2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \mu z_2 \Big(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_2^2} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} \Big),$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (s_1^2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu (s_2^2 - s_2) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1},$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Сложной задачей является развитие изложенного метода на случай марковских процессов рождения и гибели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
2. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
4. Рыков В. В. Обобщенные процессы рождения и гибели и модели старения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – Вып. 3. – С. 103–120.
5. Anderson W. J. Continuous-time Markov chains: An applications-oriented approach. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 442 p.
6. Lederman W., Reuter G. E. H. Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes // Phil. Trans. of the Royal Sotiety of London. Ser. A. – 1954. – V. 246. – P. 321–369.
7. McQuarrie D. A., Jachimowcki C. J., Russel M. E. Kinetic of small system. II // J. Chim. Phys. – 1964. – V. 40, № 10. – P. 2914–2921.
8. Becker N. G. Interactions between spesies: some comparisous between deterministic and stochastic models // Rocky Mountain J. Math. – 1973. – V. 3. – P. 53–68.

9. Letessier J., Valent G. Exact eigenfunctions and spectrum for several cubic and quartic birth and death processes // Physics Letters. Ser. A. – 1985. – V.108, № 5–6. – P. 245–247.
10. Valent G. An integral transform involving Hein function and a related eigenvalue problem // SIAM J. Math. Anal. – 1986. – V. 17, №. 3. – P. 688–703.
11. Letessier J., Valent G. Some exact solutions of the Kolmogorov boundary value problem // Approx. Theory Appl. – 1988. – V. 4, №. 2. – P. 97–117.
12. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Риз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
13. Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Математ. сборник. – 1951. – Т. 29(71), вып. 3. – С. 477–500.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
17. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Марычев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
18. Kalinkin A., Valent G. Exact solution of the linear Kolmogorov equations for a quadratic death process // Обозр. прикл. и промышл. матем. Сер. Вероятность и статистика. – 1998. – Т. 5, вып. 2. – С. 304–305.
19. Калинкин А. В. Проблема точных решений уравнений Колмогорова для марковских процессов с дискретными состояниями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 1999. – № 1(2). – С. 14–24.
20. Калинкин А. В. Уравнения процесса гибели и размножения и оператор Гельфонда–Леонтьева обобщенной производной // Обозр. прикл. и промышл. матем. Сер. “Вероятн. и статист.” – 2000. – Т. 7, вып. 1. – С. 106–107.
21. Калинкин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, вып. 2. – С. 23–84.
22. Калинкин А. В. Решение уравнений Колмогорова для вероятностной модели бимолекулярной реакции // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2003. – Т. 10, вып. 1. – С. 167–168.
23. Калинкин А. В. Незамкнутое решение уравнений Колмогорова для двухмерного процесса гибели квадратичного типа // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2004. – Т. 11, вып. 2. – С. 347–348.
24. Мастихин А. В. Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Гани // Математические заметки. – 2007. (*В печати.*).

Статья поступила в редакцию 17.11.2006

Александр Вячеславович Калинкин родился в 1956 г., окончил в 1978 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области теории вероятностей и математического моделирования.

A.V. Kalinkin (b. 1956) graduated from the Lomonosov State University in 1978. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 40 publications in the field of probability theory and mathematical simulation.