

В. Е. П а л о ш

**УСТОЙЧИВОСТЬ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА
С ВЯЗКОУПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ,
НАГРУЖЕННОГО СЛЕДЯЩЕЙ
И КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛАМИ**

Рассмотрен маятник Циглера с вязкоупругими шарнирами, дополнительно нагруженный консервативной силой. Решена задача устойчивости положения равновесия в линейной постановке. Показана дестабилизация равновесия системы малыми диссипативными силами. Найдено значение консервативной силы, при котором дестабилизации не происходит. Исследовано поведение действительных частей корней характеристического уравнения в зависимости от значений действующих на систему сил. Рассмотрен критический случай устойчивости одного нулевого корня.

Введение. В 1952 г. Ганс Циглер [1] рассмотрел колебания двойного маятника, состоящего из двух невесомых стержней равной длины и нагруженного на конце следящей силой. Предполагалось, что массы сосредоточены в узлах, шарниры обладают линейной жесткостью с коэффициентом A и линейным демпфированием с коэффициентом B .

При анализе устойчивости равновесия, был получен следующий результат: критическая нагрузка при исчезающе малом демпфировании оказалась меньше, чем критическая нагрузка, вычисленная при отсутствии демпфирования. Это явление получило название парадокса дестабилизации.

В работе [2] рассмотрен маятник Циглера с различными коэффициентами демпфирования. Сделан вывод, что в этом случае также наблюдается парадокс дестабилизации, а устойчивость положения равновесия зависит от отношения коэффициентов демпфирования. Однако, как отмечается в статье [3], при стремлении параметров диссипации к нулю критическая сила как функция двух переменных не имеет предела. Поэтому критическая нагрузка при бесконечно малых диссипативных силах является неопределенной.

Парадокс дестабилизации сохраняется и при нелинейных законах трения. В работе [4] предполагается, что силы трения в обоих шарнирах подчиняются следующему закону: $K_D(x, \dot{x}) = Ax^2\dot{x} + B\dot{x}^3$. Задача решается с помощью построения функции Ляпунова. В итоге выяснено, что парадоксальное поведение критической нагрузки не исчезает при рассмотрении нелинейных законов демпфирования.

Отметим также статью [5], где в нелинейной постановке решена задача устойчивости положения равновесия маятника Циглера в критическом случае устойчивости пары чисто мнимых корней, т.е. когда следящая сила имеет критическое значение.

Следует заметить, что парадокс дестабилизации возникает и в континуальных моделях. Обзор результатов, посвященных этому вопросу, а также других результатов, связанных с парадоксом дестабилизации, приведен в работе [6].

Статья [7] посвящена качественному и численному описанию парадоксального поведения неконсервативных систем под действием малых диссипативных и гироскопических сил. Для объяснения парадокса дестабилизации исследуется движение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Получена функциональная зависимость критической нагрузки от параметров диссипативных и гироскопических сил, позволяющая определять скачок для критической нагрузки.

В настоящей работе, состоящей из двух частей, рассмотрен маятник Циглера, дополнительно нагруженный консервативной силой. В первой части показано, какое влияние на парадокс дестабилизации оказывает добавление консервативной силы. Во второй части исследована устойчивость нулевого положения равновесия в критическом случае одного нулевого корня, который возникает вследствие добавления консервативной силы. Отметим, что в данной работе рассматривается устойчивость по Ляпунову.

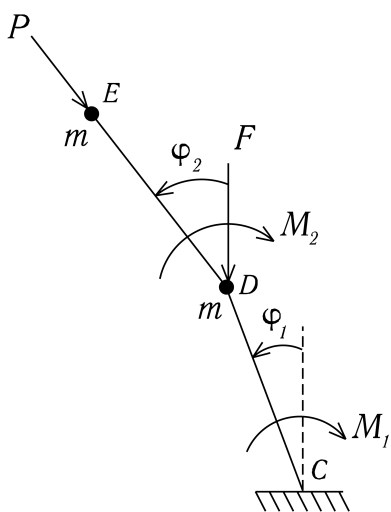


Рис. 1. Двойной маятник под действием консервативной (F) и следящей (P) сил

Уравнения движения маятника.

Двойной маятник представляет собой систему двух невесомых стержней CD и DE длиной l (рис. 1). Шарниры обладают вязкоупругими свойствами, так что восстанавливающие моменты в них равны $M_1 = -A\varphi_1 - B\dot{\varphi}_1$, $M_2 = -A(\varphi_2 - \varphi_1) - B(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$. В шарнире D и на свободном конце E расположены две одинаковые массы m . Гравитационные силы отсутствуют. На свободный конец маятника E действует следящая сила P , направление которой во все время движения совпадает с направлением стержня DE . На шарнир D действует консервативная сила F , всегда направленная вертикально вниз.

Положение маятника определяется двумя углами: φ_1 и φ_2 . Выберем их в качестве обобщенных координат. Уравнения движения маятника имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = Q_i - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_i}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где функция Лагранжа $L = T - \Pi$; кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad (2)$$

потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} A \varphi_1^2 + \frac{1}{2} A (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + Fl(\cos \varphi_1 - 1). \quad (3)$$

Обобщенная сила Q_i , соответствующая i -й координате, для $i = 1, 2$ равна:

$$Q_1 = Pl \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad Q_2 = 0. \quad (4)$$

Диссипативная функция Релея Φ имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} B \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} B (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2. \quad (5)$$

Подставляя соотношения (2)–(5) в формулу (1), получаем уравнения движения маятника

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ml^2 \ddot{\varphi}_1 + ml^2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + ml^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ \quad = A(\varphi_2 - 2\varphi_1) + B(\dot{\varphi}_2 - 2\dot{\varphi}_1) + \\ \quad \quad + Pl \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + Fl \sin \varphi_1, \\ ml^2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + ml^2 \ddot{\varphi}_2 - ml^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ \quad = -A(\varphi_2 - \varphi_1) - B(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1). \end{array} \right. \quad (6)$$

Система, описываемая уравнениями (6), имеет положение равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, устойчивость которого и исследуется.

С помощью подстановки $\tau = t \sqrt{\frac{A}{ml^2}}$ уравнения движения (6) сводятся к безразмерному виду. Раскладываем нелинейные слагаемые в ряды. Отметим, что разложения нелинейных слагаемых в окрестности нулевого положения равновесия содержат только члены нечетных степеней. Получаем следующую систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1'' &= (p + f - 3)\varphi_1 + (2 - p)\varphi_2 - 3b\varphi_1' + 2b\varphi_2' - (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ \frac{b}{2}(7\varphi_1' - 5\varphi_2')(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{6}(3 - p)(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - \\ &- (p + f - 3)\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - (2 - p)\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - \frac{f}{6}\varphi_1^3 + \dots, \\ \varphi_2'' &= (4 - p - f)\varphi_1 + (p - 3)\varphi_2 + 4b\varphi_1' - 3b\varphi_2' + (2\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ b\left(-5\varphi_1' + \frac{7}{2}\varphi_2'\right)(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \left(\frac{5}{3}p + f - 5\right)\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \\ &+ \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}p\right)\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{f}{12}(\varphi_2^3 + (2\varphi_1 - \varphi_2)^3) + \dots, \end{aligned} \right.$$

где введены следующие безразмерные параметры: $p = \frac{Pl}{A}$, $f = \frac{Fl}{A}$, $b = \frac{B}{\sqrt{Aml^2}}$; штрих в уравнениях обозначает производную по τ , а многоточие – совокупность членов не ниже пятого порядка.

Исследование устойчивости в первом приближении. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1'' &= -3b\varphi_1' + 2b\varphi_2' + (p + f - 3)\varphi_1 + (2 - p)\varphi_2, \\ \varphi_2'' &= 4b\varphi_1' - 3b\varphi_2' + (4 - p - f)\varphi_1 + (p - 3)\varphi_2. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Запишем характеристическое уравнение для этой системы:

$$\lambda^4 + 6b\lambda^3 + (6 - 2p - f + b^2)\lambda^2 + (2 - f)b\lambda + (1 - f) = 0. \quad (8)$$

С помощью критерия Рауса–Гурвица условия асимптотической устойчивости системы (7) сводятся к неравенствам

$$\left\{ \begin{aligned} f &< 1, \\ p &< \frac{1}{12 - 6f} \left(6b^2 - 3b^2f + \frac{5}{2}f^2 - 4f + 16 \right). \end{aligned} \right.$$

Обозначим критическое значение следящей силы как

$$\tilde{p} = \frac{1}{12 - 6f} \left(6b^2 - 3b^2f + \frac{5}{2}f^2 - 4f + 16 \right).$$

При $p = \tilde{p}$ характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней и два корня с отрицательными действительными частями.

Зависимость критической силы \tilde{p} от коэффициента b при некоторых значениях силы f показана на рис. 2. Видно, что наличие консервативной силы приводит к увеличению критической нагрузки. Кроме того, значение критической силы возрастает с увеличением коэффициента b . То есть, не возникает того эффекта, когда с увеличением вязкости значение критической силы начинает уменьшаться. Данный эффект присутствует в маятнике Циглера с разными коэффициентами

вязкости в шарнирах, что исследовано в работе [8]. Как будет показано далее, дестабилизация наблюдается только при переходе от модели без вязкости к модели с вязкостью.

Выясним, как наличие консервативной нагрузки влияет на парадокс дестабилизации. Для этого рассмотрим уравнения первого приближения (7) при условии равенства нулю коэффициента b :

$$\begin{cases} \varphi_1'' = (p + f - 3)\varphi_1 + (2 - p)\varphi_2, \\ \varphi_2'' = (4 - p - f)\varphi_1 + (p - 3)\varphi_2. \end{cases} \quad (9)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + (6 - 2p - f)\lambda^2 + (1 - f) = 0$$

должно иметь две пары чисто мнимых корней, для этого должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} 6 - 2p - f > 0, \\ 1 - f > 0, \\ D = (6 - 2p - f)^2 - 4(1 - f) > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем условия устойчивости системы (9)

$$\begin{cases} f < 1, \\ p < 3 - \frac{f}{2} - \sqrt{1 - f}. \end{cases}$$

Критическое значение следящей силы в этом случае обозначим как $p^* = 3 - \frac{f}{2} - \sqrt{1 - f}$. Предельное значение критической силы \tilde{p} равно $\tilde{p}_{\text{lim}} = \lim_{b \rightarrow 0} \tilde{p} = \frac{1}{12 - 6f} \left(\frac{5}{2}f^2 - 4f + 16 \right)$. Графики зависимостей этих критических сил от силы f показаны на рис. 3.

Видно, что происходит потеря устойчивости в случае наличия вязкости при всех значениях консервативной силы f кроме одного. При $f \approx 0,971$ критические значения совпадают: $p^* = \tilde{p}_{\text{lim}}$. Таким образом, если $f \approx 0,971$, то парадокса дестабилизации не наблюдается.

Для каждого значения консервативной силы f есть такое значение коэффициента b (обозначим его \tilde{b}), при котором величины \tilde{p} и p^* совпадают. График зависимости \tilde{b} от f показан на рис. 4.

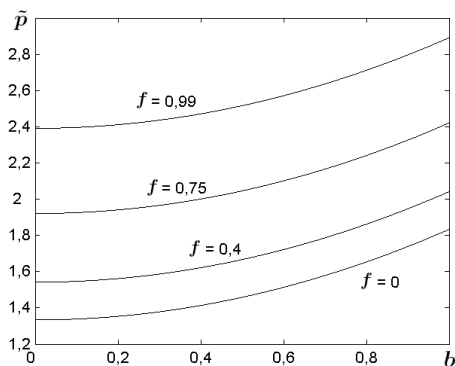


Рис. 2. Зависимость критической силы \tilde{p} от коэффициента b

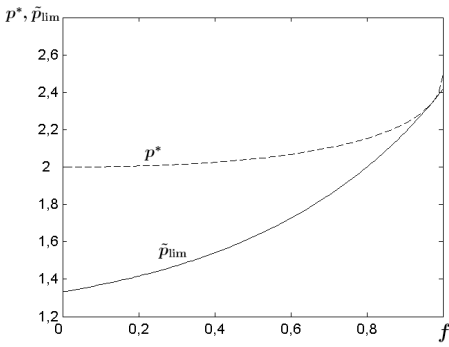


Рис. 3. Сравнение значения критической силы в отсутствие вязкости с предельным значением критической силы при наличии демпфирования в зависимости от консервативной силы f

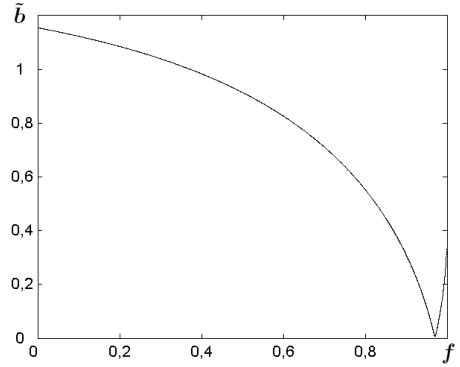


Рис. 4. Зависимость коэффициента \tilde{b} , при котором совпадают величины \tilde{p} и p^* , от силы f

Заметим, что из устойчивости системы (9) не следует устойчивость системы (6) при коэффициенте $B = 0$. Отметим также, что доказать устойчивость по Ляпунову системы (6) в нелинейной постановке при отсутствии вязкости нельзя [5].

Анализ собственных значений. Исследуем поведение собственных значений λ в зависимости от силы p при малом значении коэффициента b , а также предельный переход критической силы \tilde{p} . Поскольку собственные значения λ непрерывны как функции b , то при стремлении коэффициента b к нулю, они стремятся к собственным значениям системы при $b = 0$.

Значение потенциальной силы примем равным $f = 0,75$, в этом случае $p^* = 2,125$.

На рис. 5 показана зависимость действительных частей корней характеристического уравнения (8) от величины силы p

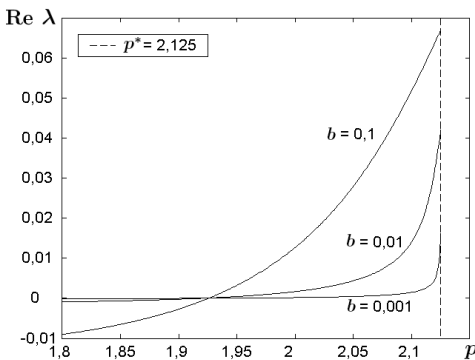


Рис. 5. Зависимость собственных значений корней характеристического уравнения от силы p

при некоторых малых значениях b . При сравнительно больших b небольшое возрастание нагрузки выше значения \tilde{p} приводит к заметному возрастанию действительных частей. Однако при малых b роль \tilde{p} как критической нагрузки уменьшается, поскольку небольшое увеличение p выше значения \tilde{p} уже не приводит к большому увеличению $\text{Re}\lambda$. Существенное возрастание $\text{Re}\lambda$ теперь связано с малым увеличени-

ем нагрузки выше значения несколько меньшего, чем p^* . При стремлении b к нулю, $\text{Re}\lambda$ также стремится к нулю при любых $p < p^*$.

Теорема о критическом случае. Для дальнейшего исследования воспользуемся следующей теоремой, приведенной в работе [9].

Теорема. Пусть дана система

$$\begin{cases} x' = X(x, x_1, \dots, x_n), \\ x'_s = p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s(x, x_1, \dots, x_n), \quad s = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (10)$$

где X и X_s — слагаемые не ниже второго порядка. Характеристическое уравнение, составленное для линейных членов последних n уравнений, имеет только корни с отрицательными вещественными частями.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} X^{(0)}(x) = X(x, 0, \dots, 0) = gx^m + g^{(m+1)}x^{m+1} + \dots, \\ X_s^{(0)}(x) = X_s(x, 0, \dots, 0) = g_s x^{m_s} + g_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1} + \dots, \quad s = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

где $g, g^{(m+1)}, g_s, g_s^{(m_s+1)}$ — постоянные.

Пусть выполнены условия: $X^{(0)}(x)$ не обращается тождественно в нуль; все величины p_s в уравнениях (10) равны нулю; $m_s \geq m$.

При этих предположениях задача устойчивости нулевого положения равновесия системы (10) решается следующим образом: положение равновесия всегда неустойчиво, если m — число четное. Если m — число нечетное, то при $g > 0$ положение равновесия неустойчиво, а при $g < 0$ оно асимптотически устойчиво.

Исследование критического случая устойчивости одного нулевого корня. Как было показано выше, условием асимптотической устойчивости системы (6) при наличии вязкости является выполнение неравенств $f < 1$ и $p < \tilde{p}$. Если принять $f = 1$, то получаем

$$\begin{cases} f = 1, \\ p < \frac{1}{2}b^2 + \frac{29}{12}. \end{cases} \quad (11)$$

При выполнении условий (11) характеристическое уравнение (8) имеет один нулевой корень и три корня с отрицательными действительными частями. Для исследования устойчивости в этом случае необходимо рассматривать задачу в нелинейной постановке.

Систему (6) приводим к безразмерному виду, полагаем $f = 1$, принимаем обозначения $z_1 = \varphi_1, z_2 = \varphi_2, z_3 = \varphi'_1, z_4 = \varphi'_2$, а также раскладываем нелинейные слагаемые в ряды до третьего порядка.

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} z'_1 = z_3, \\ z'_2 = z_4, \\ z'_3 = (p-2)z_1 + (2-p)z_2 - 3bz_3 + 2bz_4 + Z_3(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ z'_4 = (3-p)z_1 + (p-3)z_2 + 4bz_3 - 3bz_4 + Z_4(z_1, z_2, z_3, z_4), \end{cases} \quad (12)$$

где

$$Z_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = -(z_3^2 + z_4^2)(z_1 - z_2) + \frac{b}{2}(7z_3 - 5z_4)(z_1 - z_2)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(5 - \frac{7}{3}p \right) (z_1 - z_2)^3 - \frac{1}{6}z_1^3,$$

$$Z_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = (2z_3^2 + z_4^2)(z_1 - z_2) + b \left(-5z_3 + \frac{7}{2}z_4 \right) (z_1 - z_2)^2 + \\ + \left(\frac{5}{3}p - 4 \right) z_1(z_1 - z_2)^2 + \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}p \right) z_2(z_1 - z_2)^2 + \frac{1}{12} (z_2^3 + (2z_1 - z_2)^3).$$

Отметим, что если задачу не удастся решить, ограничиваясь слагаемыми третьего порядка, то будет необходимо рассмотреть слагаемые более высокого порядка.

Введем новую переменную $x_1 = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4$. Выбираем a_i так, чтобы для линейных слагаемых выполнялось равенство $\frac{dx_1}{d\tau} = 0$, т.е. $x'_1 = a_1z'_1 + a_2z'_2 + a_3z'_3 + a_4z'_4 = 0$. Подставляя линейные слагаемые из z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 и приравнивая нулю выражения при z_k , получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (p-2)a_3 + (3-p)a_4 = 0, \\ (2-p)a_3 + (p-3)a_4 = 0, \\ a_1 - 3ba_3 + 4ba_4 = 0, \\ a_2 + 2ba_3 - 3ba_4 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Поскольку мы рассматриваем случай, когда характеристическое уравнение имеет один нулевой корень, то определитель системы (13) равен нулю, и, следовательно, система всегда имеет ненулевое решение. Покажем, что всегда существует решение системы (13), при котором $a_1 \neq 0$.

1. Если $p = 2$, то полагаем $a_3 \neq 0, a_4 = 0$, следовательно, $a_1 = 3ba_3 \neq 0$.

2. Если $p \neq 2$, то полагаем $a_4 \neq 0$, следовательно, $a_3 = \frac{3-p}{2-p}a_4$,

откуда получаем $a_1 = \frac{b(p+1)}{2-p}a_4 \neq 0$, так как $b > 0, p \geq 0$.

Из этих рассуждений также следует, что при любом ненулевом решении верно неравенство $a_3 \neq a_4$.

Поскольку $a_1 \neq 0$, мы можем сделать следующую замену переменных:

$$x_1 = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_3, \quad x_4 = z_4.$$

После замены переменных система (12) принимает вид

$$\begin{cases} x'_1 = a_3 X_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_4 X_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x'_2 = x_4, \\ x'_3 = \frac{p-2}{a_1} x_1 + \left(2-p - \frac{(p-2)a_2}{a_1}\right) x_2 + \left(-3b - \frac{(p-2)a_3}{a_1}\right) x_3 + \\ \quad + \left(2b - \frac{(p-2)a_4}{a_1}\right) x_4 + X_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x'_4 = \frac{3-p}{a_1} x_1 + \left(p-3 - \frac{(3-p)a_2}{a_1}\right) x_2 + \left(4b - \frac{(3-p)a_3}{a_1}\right) x_3 + \\ \quad + \left(-3b - \frac{(3-p)a_4}{a_1}\right) x_4 + X_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{cases} \quad (14)$$

где введены обозначения:

$$X_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = Z_3 \left(\frac{1}{a_1} x_1 - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3 - \frac{a_4}{a_1} x_4, x_2, x_3, x_4 \right),$$

$$X_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = Z_4 \left(\frac{1}{a_1} x_1 - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3 - \frac{a_4}{a_1} x_4, x_2, x_3, x_4 \right).$$

Характеристическое уравнение инвариантно относительно линейных преобразований, поэтому мы по-прежнему имеем дело со случаем одного нулевого корня и трех корней с отрицательными действительными частями.

Наша система (14) не удовлетворяет условиям теоремы, поэтому ее нужно преобразовать к виду, для которого выполняются ограничения, накладываемые теоремой.

Найдем функции $u_2(x_1)$, $u_3(x_1)$, $u_4(x_1)$, такие, чтобы при их подстановке соответственно вместо x_2 , x_3 , x_4 , правые части уравнений (14) обращались бы в нуль, т.е.

$$\begin{cases} u_4 = 0, \\ \frac{p-2}{a_1} x_1 + \left(2-p - \frac{(p-2)a_2}{a_1}\right) u_2 + \left(-3b - \frac{(p-2)a_3}{a_1}\right) u_3 + \\ \quad + \left(2b - \frac{(p-2)a_4}{a_1}\right) u_4 + X_3(x_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \\ \frac{3-p}{a_1} x_1 + \left(p-3 - \frac{(3-p)a_2}{a_1}\right) u_2 + \left(4b - \frac{(3-p)a_3}{a_1}\right) u_3 + \\ \quad + \left(-3b - \frac{(3-p)a_4}{a_1}\right) u_4 + X_4(x_1, u_2, u_3, u_4) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

То, что это всегда можно сделать, показано в работе [9]. Функция u_4 тождественно равна нулю, а u_2 и u_3 будем искать в виде рядов

$$\begin{cases} u_2 = C_2^{(1)} x_1 + C_2^{(2)} x_1^2 + \dots, \\ u_3 = C_3^{(1)} x_1 + C_3^{(2)} x_1^2 + \dots. \end{cases}$$

Согласно теореме [9], нас интересует лишь младший член в разложении функции $X^{(0)}$, поэтому ограничимся лишь линейными слагаемыми:

$$\begin{cases} u_2 = C_2^{(1)} x_1, \\ u_3 = C_3^{(1)} x_1. \end{cases} \quad (16)$$

Если окажется, что этого недостаточно, то придется учитывать слагаемые более высокого порядка. Подставляем (16) в (15) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} (p-2)(a_1 + a_2)C_2^{(1)} + (3ba_1 + (p-2)a_3)C_3^{(1)} = p-2, \\ (p-3)(a_1 + a_2)C_2^{(1)} + (4ba_1 + (p-3)a_3)C_3^{(1)} = p-3. \end{cases} \quad (17)$$

Определитель системы (17) равен $(a_1 + a_2)ba_1(p+1)$. Складывая два последних уравнения системы (13), получаем $a_1 + a_2 = b(a_3 - a_4)$. Ранее было показано, что при любом ненулевом решении системы (13) $a_1 \neq 0$ и $a_3 \neq a_4$. Таким образом определитель системы (17) всегда отличен от нуля и, следовательно, она имеет ненулевое решение

$$C_2^{(1)} = \frac{1}{a_1 + a_2}, \quad C_3^{(1)} = 0.$$

Сделаем замену переменных:

$$x_2 = \xi_2 + C_2^{(1)} x_1, \quad x_3 = \xi_3, \quad x_4 = \xi_4.$$

Система (14) принимает вид:

$$\begin{cases} x_1' = a_3 X_3 \left(x_1, \xi_2 + C_2^{(1)} x_1, \xi_3, \xi_4 \right) + a_4 X_4 \left(x_1, \xi_2 + C_2^{(1)} x_1, \xi_3, \xi_4 \right), \\ \xi_2' = \xi_4 - \\ - C_2^{(1)} \left(a_3 X_3 \left(x_1, \xi_2 + C_2^{(1)} x_1, \xi_3, \xi_4 \right) + a_4 X_4 \left(x_1, \xi_2 + C_2^{(1)} x_1, \xi_3, \xi_4 \right) \right), \\ \xi_3' = \left(2-p - \frac{(p-2)a_2}{a_1} \right) \xi_2 + \left(-3b - \frac{(p-2)a_3}{a_1} \right) \xi_3 + \left(2b - \frac{(p-2)a_4}{a_1} \right) \xi_4 + \\ + X_3 \left(x_1, \xi_2 + C_2^{(1)} x_1, \xi_3, \xi_4 \right) - X_3 \left(x_1, C_2^{(1)} x_1, 0, 0 \right), \\ \xi_4' = \left(p-3 - \frac{(3-p)a_2}{a_1} \right) \xi_2 + \left(4b - \frac{(3-p)a_3}{a_1} \right) \xi_3 + \left(-3b - \frac{(3-p)a_4}{a_1} \right) \xi_4 + \\ + X_4 \left(x_1, \xi_2 + C_2^{(1)} x_1, \xi_3, \xi_4 \right) - X_4 \left(x_1, C_2^{(1)} x_1, 0, 0 \right). \end{cases} \quad (18)$$

Новые переменные обращаются одновременно в нуль тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль старые переменные, поэтому задача устойчивости по отношению к одним переменным эквивалентна задаче устойчивости по отношению к другим переменным.

Система (18) удовлетворяет условиям теоремы, поэтому надо найти младший член разложения функции $a_3 X_3(x_1, C_2^{(1)} x_1, 0, 0) + a_4 X_4(x_1, C_2^{(1)} x_1, 0, 0)$. После вычислений получаем:

$$a_3 X_3(x_1, C_2^{(1)} x_1, 0, 0) + a_4 X_4(x_1, C_2^{(1)} x_1, 0, 0) = -\frac{1}{6(a_3 - a_4)^2 b^3} x_1^3.$$

Коэффициент при x_1^3 отрицательный, следовательно, нулевое положение равновесия системы (12) при условии $p < \frac{1}{2}b^2 + \frac{29}{12}$ асимптотически устойчивое.

Численное моделирование. Проверим полученные результаты с помощью численного моделирования. Зададим следующие числовые значения параметров системы: коэффициент жесткости пружины $A = 5,12 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, коэффициент демпфирования $B = 0,4 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$, длина каждого стержня $l = 0,25$ м; сосредоточенные массы $m = 1$ кг.

При таком выборе параметров коэффициент $b = 0,5$, между реальным и безразмерным временем имеет место соотношение $t \approx 0,11\tau$. Реальные и безразмерные силы соотносятся следующим образом: $P = 20,48p$, $F = 20,48f$.

После приведения к безразмерному виду решим систему дифференциальных уравнений (6). Начальные условия примем следующие: $\varphi_1(0) = 0,01$, $\varphi_2(0) = 0,01$, $\varphi_1'(0) = 0,01$, $\varphi_2'(0) = 0,01$.

Пусть безразмерная сила $f = 0,5$. В этом случае значение критической силы $\tilde{p} = 1,75$. Рассмотрим значение следящей силы $p = 1 < \tilde{p}$. Оно меньше критического значения, поэтому должна иметь место асимптотическая устойчивость, что и наблюдается на рис. 6 а.

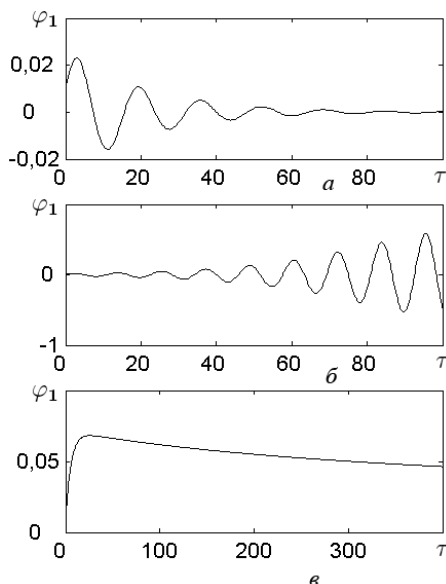


Рис. 6. Графики зависимости φ_1 от τ :
 а – $f = 0,5$, $p = 1$; б – $p = 2$; в – $f = 1$,
 $p = 1$

Рассмотрим значение следящей силы $p = 2 > \tilde{p}$. Оно больше критического значения, поэтому должна иметь место неустойчивость, что и наблюдается на рис. 6, б.

Пусть $f = 1$ и $p = 1 < \tilde{p} = 2,542$. В этом случае имеет место критический случай одного нулевого корня. Как было показано выше, должна наблюдаться асимптотическая устойчивость (рис. 6, в).

Таким образом, численное моделирование полностью подтвердило результаты, полученные с помощью аналитических вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ingenieur-Archiv. – 1952. – Bd. 20. – № 1. S. 49–56.
2. Herrmann G., Jong I. C. On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // Trans ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1965. – Vol. 32. – № 3. – P. 592–597.
3. Сейранян А. П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Докл. РАН. – 1996. – Т. 348. – № 3. – С. 323–326.
4. Hagedorn P. On the destabilisation effect of nonlinear damping in nonconservative systems with follower forces // Int. J. Nonlinear Mech. – 1970. – Vol. 5. – № 2. – P. 341–358.
5. Агафонов С. А. Об устойчивости и автоколебаниях двойного маятника с упругими элементами, находящегося под действием следящей силы // Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 185–190.
6. Сейранян А. П. Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики. – 1990. – Т. 13. – Вып. 2. С. 89–124.
7. Kirillov O. N. A theory of the destabilization paradox in nonconservative systems // Acta Mechanica. – 2004. – Vol. 174. – P. 145–166.
8. Semler C., Alighanbari H., Paidoussis M. P. A physical explanation of the destabilizing effect of damping // Trans ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1998. – Vol. 65. – № 9. – P. 642–648.
9. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 432 с.

Статья поступила в редакцию 8.11.2006



Виталий Евгеньевич Палаш родился в 1984 г., окончил МГТУ им. Н. Э. Баумана в 2007 г. Аспирант кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н. Э. Баумана. Специализируется в области устойчивости движения механических систем.

V.Ye. Palosh (b. 1984) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2007. Post-graduate of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of stability of motion of mechanical systems.