УДК 53(075.8)

А. М. Макаров, Л. А. Лунёва,
К. А. Макаров

О СОПРЯЖЕНИИ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Описание взаимодействия электромагнитной плоской гармонической волны с границей раздела двух материальных сред, если хотя бы одна из них является проводящей, помимо известных четырех условий сопряжения касательных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей требует выполнения закона сохранения стороннего поверхностного электрического заряда, что эквивалентно условию скачка нормальных составляющих вектора электрического смещения. Проведен анализ физического содержания "комплексного" вектора электрического смещения, являющегося следствием использования понятия комплексной диэлектрической проницаемости среды.

Отражение и преломление плоской гармонической электромагнитной волны на плоской границе раздела двух однородных изотропных прозрачных сред (диэлектриков) в классической электродинамике изучено досконально. Законы отражения и преломления (в частности, закон Снеллиуса) вошли в элементарный курс физики, формулы Френеля — в университетский курс общей и прикладной физики [1–6]. В случае взаимодействия плоской гармонической электромагнитной волны с границей раздела двух непроводящих однородных и изотропных сред (диэлектрик–диэлектрик) обращаются в нуль объемные плотности сторонних электрических зарядов и объемные плотности токов проводимости, а также поверхностная плотность сторонних электрических зарядов и поверхностная плотность токов проводимости на границе раздела сред. При этом оказывается, что непрерывность нормальных к границе раздела компонент векторов магнитной индукции и электрического смещения является следствием непрерывности векторов напряженностей электрического и магнитного полей [2]. Особенности явления отражения–преломления плоской гармонической электромагнитной волны от границы раздела двух сред, если вторая среда является проводящей (т.е. поглощающей), в рамках линейной классической электродинамики обычно рассматривают с помощью введения комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$. При этом практически общепринятым является утверждение, что формальной замены действительной диэлектрической проницаемости ε на комплексную достаточно для получения исчерпывающей информации о рассматриваемом явлении: “Проводящая среда в математическом отношении отличается от диэлектрика лишь тем, что в уравнении для проводящей среды вместо абсолютной диэлектрической проницаемости ε входит комплексная диэлектрическая проницаемость” [5, с. 272]. Следствием этого является использование условий непрерывности касательных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей (при нулевой поверхностной плотности токов проводимости) на границе раздела двух сред по аналогии со случаем падения электромагнитной волны на границу раздела двух непроводящих сред. Однако, в рассматриваемом случае непрерывность нормальных по отношению к границе раздела составляющих электромагнитного поля должна быть проверена.

Ниже покажем, что в случае падения электромагнитной волны на границу раздела двух однородных изотропных проводящих сред поверхностная плотность сторонних электрических зарядов отлична от нуля. При этом выясним, почему формальный переход от действительной к комплексной диэлектрической проницаемости не приводит к ошибкам при определении коэффициентов отражения и преломления и каково физическое содержание векторного поля $\hat{\vec{D}} = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}\vec{E}$, нормальные компоненты которого непрерывны на границе раздела проводящих сред (монохроматическое приближение), в сравнении с вектором $\hat{\vec{D}} = \hat{\varepsilon}\varepsilon_0\vec{E}$.

Рассмотрим систему уравнений классической электродинамики в линейном приближении для случая однородной изотропной среды:

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\vec{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0; \\ &\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \\ &\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}; \quad \vec{j} = \gamma\vec{E}. \end{aligned} \tag{1}$$

Все физические величины в системе уравнений (1) — действительные, обозначения общепринятые; γ — электрическая проводимость; коэффициенты в материальных уравнениях среды считаются независящими от пространственных координат и времени.

Ищем решение системы уравнений (1) в форме бегущих плоских гармонических волн вида

$$\vec{a} = \vec{a}_0\exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)), \tag{2}$$

где $\vec{a}_0$ — постоянная амплитуда; $\vec{k}$ — волновой вектор; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения; ω — круговая частота волны; t — время. Волновой вектор $\vec{k}$ в выражении (2) является постоянной векторной величиной. Система уравнений (1) переходит в алгебраическую систему для комплексных амплитуд (или мгновенных физических величин):

$$i\vec{k} \cdot \vec{D} = \rho; \tag{3}$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0; \tag{4}$$

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B}; \tag{5}$$

$$i\vec{k} \times \vec{H} = \vec{j} - i\omega\vec{D}. \tag{6}$$

Система уравнений (3)–(6) может быть записана отдельно как для первой, так и для второй среды, причем в первой среде имеет место и падающая, и отраженная волна. Параметры падающей волны обозначены символами без верхних индексов, параметры отраженной волны выделим единичным, а преломленной волны — двойным штрихом. Вектор единичной нормали к плоской границе раздела двух сред $\vec{n}$ направим из первой среды во вторую и отметим соответствующими нижними индексами принадлежность величин к первой или второй среде.

На плоской неподвижной границе раздела двух проводящих сред должны выполняться следующие условия сопряжения для результирующего электромагнитного поля. Условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности электрического поля имеет вид

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}_1) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}_2); \tag{7}$$

условие непрерывности нормальных компонент векторов магнитной индукции —

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2; \tag{8}$$

условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности магнитного поля, если на поверхности раздела сред отсутствуют поверхностные токи проводимости (последнее должно быть установлено в процессе решения задачи), может быть записано как

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}_1) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}_2); \tag{9}$$

условие для скачка нормальных компонент векторов $\vec{D}$ с учетом возможности наличия на границе раздела поверхностной плотности сторонних электрических зарядов —

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_2 - \vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \sigma \tag{10}$$

и условие сохранения электрического заряда на поверхности раздела —

$$\vec{n} \cdot \vec{j}_2 - \vec{n} \cdot \vec{j}_1 = i\omega\sigma. \tag{11}$$

Последнее из условий записано с учетом гармонического изменения во времени поверхностной плотности сторонних электрических зарядов и в предположении, что отсутствует их поверхностное растекание. Эта посылка будет оправдана, если будет выполнено, в частности, условие отсутствия поверхностных токов проводимости на границе раздела двух сред.

Решение в форме плоских гармонических бегущих волн обуславливает одинаковую круговую частоту всех волн и геометрические условия сопряжения

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{k}) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{k}') = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{k}''). \tag{12}$$

Начало декартовой системы координат $\{x, y, z\}$ совместим с границей раздела, положительное направление оси z совпадает с направлением нормали к границе раздела, нижнее полупространство $(z < 0)$ заполнено средой 1, верхнее $(z > 0)$ — средой 2. Развернутая форма соотношений (12) имеет вид

$$k_x = k'_x; \quad k_y = k'_y; \quad k_x = k''_x; \quad k_y = k''_y. \tag{13}$$

Кроме того, нормальные компоненты волнового вектора падающей волны и волны, отраженной от поверхности раздела двух сред, связаны соотношением

$$k_z = -k'_z. \tag{14}$$

Соотношение (14) справедливо, поскольку модули рассматриваемых векторов одинаковы в силу распространения волн в одной и той же среде (дисперсионные уравнения тождественны друг другу), а касательные компоненты одинаковы в силу условий (13).

Условия (7) и (9) в рассматриваемой системе координат приводят к уравнениям

$$E_x + E'_x = E''_x; \quad E_y + E'_y = E''_y; \tag{15}$$

$$H_x + H'_x = H''_x; \quad H_y + H'_y = H''_y. \tag{16}$$

В дальнейших рассуждениях соотношения (15) и (16) будем рассматривать в качестве основополагающих, привлекая по мере необходимости уравнения (3)–(6) для каждой из рассматриваемых волн с учетом среды их распространения.

Непрерывность нормальных составляющих векторов магнитной индукции. Из уравнения (5) следует

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}. \tag{17}$$

Нормальная к границе раздела компонента вектора магнитной индукции может быть записана в форме

$$B_z = \frac{k_x E_y - k_y E_x}{\omega}. \tag{18}$$

Условие непрерывности нормальных компонент вектора магнитной индукции (8) принимает вид

$$k_x E_y - k_y E_x + k'_x E'_y - k'_y E'_x = k''_x E''_y - k''_y E''_x. \tag{19}$$

Легко видеть, что при выполнении условий сопряжения касательных компонент волновых векторов (13) и условия непрерывности касательных компонент вектора напряженности электрического поля (15) уравнение (19) удовлетворяется тождественно. Таким образом, уравнение (8) в рамках рассматриваемой задачи может рассматриваться как следствие условий непрерывности касательных компонент вектора напряженности электрического поля на границе раздела сред.

Скачок нормальных составляющих вектора $\vec{D}$. Из уравнения (6) следует соотношение

$$\vec{D} = \frac{\vec{k} \times \vec{H} - i \cdot \vec{j}}{\omega}. \tag{20}$$

Нормальная к границе раздела компонента вектора $\vec{D}$ может быть записана в форме

$$D_z = \frac{k_x H_y - k_y H_x - i \cdot j_z}{\omega}. \tag{21}$$

С учетом зависимости (21) потребуем выполнения условия (10):

$$\frac{k''_x H''_y - k''_y H''_x - i j''_z}{\omega} - \left(\frac{k_x H_y - k_y H_x - i j_z}{\omega} + \frac{k'_x H'_y - k'_y H'_x - i j'_z}{\omega} \right) = \sigma. \tag{22}$$

В полученом выражении для зависимости величины поверхностной плотности сторонних электрических зарядов σ используем условия (13) сопряжения касательных компонент волновых векторов и условие (16) непрерывности касательных компонент векторов напряженности магнитного поля:

$$j''_z - (j_z + j'_z) = i\omega\sigma. \tag{23}$$

Соотношение (23) совпадает с уравнением (11) сохранения электрического заряда на границе раздела сред в предположении, что на ней отсутствуют поверхностные токи проводимости или их природа такова, что не имеет места поверхностное растекание электрического заряда. Предположение об отсутствии поверхностных токов проводимости согласуется с ранее принятым предположением о непрерывности касательных компонент векторов напряженности магнитного поля.

Таким образом, условие скачка нормальных компонент вектора $\vec{D}$ и условие сохранения электрического заряда на поверхности раздела двух материальных сред в рамках рассматриваемой проблемы не являются независимыми друг от друга. Этого можно было ожидать: система (1) уравнений классической электродинамики неявно содержит в себе уравнение сохранения электрического заряда. Переход к интегральной форме системы (1) и использование ее для формулировки условий сопряжения на границе раздела материальных сред только выявляет органическую взаимосвязь составляющих электромагнитного поля.

Скачок нормальных компонент вектора $\vec{D}$ на границе раздела материальных сред органически связан с законом сохранения электрического заряда на этой поверхности. Этот скачок исчезает в нескольких случаях: если обе материальные среды являются непроводящими ($j'' = j' = j = 0$); если обращаются в нуль нормальные компоненты вектора объемной плотности электрического тока проводимости ($j''_z = j'_z = j_z = 0$), что имеет место при определенной поляризации падающей плоской электромагнитной волны.

Комплексная диэлектрическая проницаемость среды и комплексный вектор $\hat{\vec{D}}$. Рассмотрим правую часть уравнения (6). Введем комплексный вектор $\hat{\vec{D}}$ соотношением

$$-i\omega\vec{D} + \vec{j} = -i\omega\hat{\vec{D}}. \tag{24}$$

Поскольку в левую часть соотношения (24) вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ входит линейно, естественно предположить, что это свойство имеет место и для правой части:

$$\hat{\vec{D}} = \hat{\varepsilon}\varepsilon_0\vec{E}, \tag{25}$$

где $\hat{\varepsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость материальной среды, которая выражается формулой

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega}. \tag{26}$$

Удобство введения комплексного вектора $\hat{\vec{D}}$ определяется не только упрощением уравнения (6):

$$i\vec{k} \times \vec{H} = -i\omega\hat{\vec{D}}, \tag{27}$$

но и тем, что нормальные компоненты комплексного вектора $\hat{\vec{D}}$ зависят только от касательных компонент вектора напряженности магнитного поля:

$$\hat{D}_z = \frac{k_xH_y - k_yH_x}{\omega}. \tag{28}$$

Рассматривая скачок нормальных компонент комплексного вектора $\hat{\vec{D}}$ на границе раздела материальных сред, запишем

$$\hat{D}''_z - (\hat{D}_z + \hat{D}'_z) = \frac{k''_x H''_y - k''_y H''_x}{\omega} - \\ - \left(\frac{k_x H_y - k_y H_x}{\omega} + \frac{k'_x H'_y - k'_y H'_x}{\omega} \right), \quad (29)$$

Видно, что при выполнении условий (13) сопряжения касательных компонент волновых векторов и условий (16) непрерывности касательных компонент векторов напряженности магнитного поля правая часть соотношения (29) обращается в нуль. Нормальные компоненты "комплексного" вектора $\hat{\vec{D}}$ не испытывают скачка на границе раздела двух материальных сред вследствие условия непрерывности касательных составляющих вектора напряженности магнитного поля.

Известно, что для определения векторного поля в безграничном пространстве необходимо и достаточно задать его источники — дивергенцию и ротор [7]. Для векторного поля в форме плоской гармонической бегущей волны (2) источниками поля являются правые части соотношений

$$i\vec{k} \cdot \vec{a} = \varphi, \quad i\vec{k} \times \vec{a} = \vec{f}. \quad (30)$$

Здесь φ и $\vec{f}$ — известные функции, структура которых необходимо согласована с выражением (2). Вычислим векторное произведение вектора $i\vec{k}$ на второе из соотношений (30):

$$i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{a}) = i\vec{k} \times \vec{f}. \quad (31)$$

Раскрывая двойное векторное произведение и используя первое из соотношений (30), получаем

$$\vec{a} = \frac{i\vec{k} \times \vec{f} - i\vec{k}\varphi}{\vec{k} \cdot \vec{k}}. \quad (32)$$

В соответствии с определением (27) имеем

$$i\vec{k} \cdot \hat{\vec{D}} = 0; \quad i\vec{k} \times \hat{\vec{D}} = -\frac{i\vec{k}(i\vec{k} \cdot \vec{H})}{i\omega} - \frac{\vec{H} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k})}{i\omega}. \quad (33)$$

Если учесть уравнение (4) и линейность материальных уравнений среды, то окажется, что источник векторного поля $\hat{\vec{D}}$ действительно пропорционален вектору напряженности магнитного поля:

$$i\vec{k} \times \hat{\vec{D}} = -\frac{\vec{H}(\vec{k} \cdot \vec{k})}{i\omega}. \quad (34)$$

Аналогичные построения для вектора $\vec{D}$ с учетом того, что материальная среда является однородной, линейной и изотропной, с учетом закона сохранения электрического заряда, приводят к зависимостям

$$i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0; \quad i\vec{k} \times \vec{D} = -\frac{i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{H} - \vec{j})}{i\omega}. \quad (35)$$

Видно, что источники векторных полей $\hat{\vec{D}}$ и $\vec{D}$ различаются между собой, что влечет за собой и различие в физическом содержании и математической форме интегральных соотношений на границе раздела материальных сред.

Выводы. Использование комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ для проводящей среды в граничных условиях задачи о падении плоской гармонической электромагнитной волны на границу раздела двух однородных изотропных сред позволяет получить формулы Френеля. Вместе с тем свойство непрерывности нормальных компонент к границе раздела сред присуще комплексным векторам $\hat{\vec{D}} = \hat{\varepsilon}\varepsilon_0\vec{E}$. Это свойство является следствием непрерывности касательных компонент напряженностей электромагнитного поля (т.е. отсутствия поверхностных токов проводимости). Нормальные компоненты вектора $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ на границе раздела испытывают скачок, равный поверхностной плотности сторонних электрических зарядов σ, при этом на поверхности раздела выполняется закон сохранения электрического заряда. Отмеченное выше условие непрерывности нормальных компонент комплексных векторов $\hat{\vec{D}}$ содержит в себе и скачок нормальных составляющих вектора $\vec{D}$, и закон сохранения электрического заряда. Существование поверхностной плотности σ сторонних электрических зарядов на границе раздела сред может оказаться важным в определенных физических ситуациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т о п т ы г и н И. Н. Современная электродинамика. Ч. 2. Теория электромагнитных явлений в веществе: Учеб. пособие. – Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. – 2005. – 848 с.
2. С и в у х и н Д. В. Оптика: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд.– М.: Наука, Физматлит, 1985. – 752 с.
3. А х м а н о в С. А., Н и к и т и н С. Ю. Физическая оптика: Учебник. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1998. – 656 с.
4. Н и к о л ь с к и й В. В., Н и к о л ь с к а я Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Физматлит, 1989. – 544 с.
5. М а т в е е в А. Н. Электродинамика. Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1980. – 383 с.
6. К у г у ш е в А. М., Г о л у б е в а Н. С., М и т р о х и н В. Н. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн. Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2001. – 368 с.
7. К о ч и н Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 426 с.

Статья поступила в редакцию 15.01.2008