

УДК 532.527

И. К. Марчевский, Г. А. Щеглов

**МОДЕЛЬ СИММЕТРИЧНОГО
ВОРТОНА-ОТРЕЗКА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
СРЕДЫ**

Рассмотрен вихревой метод моделирования пространственных течений идеальной несжимаемой среды. В качестве вихревого элемента используется вортон-отрезок, который описывается координатами центра, направляющим вектором и интенсивностью. Построена математическая модель движения такого вортиона и рассмотрена тестовая задача о “чехарде” вихревых колец. Показано, что предложенная модель вортиона-отрезка позволяет получать более точные результаты по сравнению с другими моделями вортионов.

Для эффективного решения инженерных задач, связанных с исследованием динамики конструкций в дозвуковом потоке жидкости или газа, в ряде случаев используются бессеточные вихревые методы расчета течений с использованием упрощенных моделей среды [1, 2].

Вихревые методы [3, 4] основаны на рассмотрении эволюции поля завихренности, что позволяет сосредоточить вычислительные ресурсы в ограниченной области вихревого следа. Это дает возможность получать приемлемые для инженерных расчетов значения нестационарных нагрузок при меньших по сравнению с сеточными методами затратах машинного времени. Для исследования пространственных течений вихревыми методами используются различные трехмерные вихревые элементы — вортионы: вихревая точка [5], вихревой сгусток (vortex blob) [4], вихревой отрезок [6], сферический вортон [7].

Вортон представляет собой элемент вихревой трубки и характеризуется положением в пространстве и вектором интенсивности. Каждый тип вортионов задает некоторое распределение завихренности в пространстве, а скорость, индуцируемая вортионом, вычисляется по закону Био–Савара с учетом этого распределения. Область течения, занятая завихренностью, моделируется большим числом вортионов [6].

При моделировании эволюции завихренности в пространственном течении векторы интенсивностей вортионов изменяются в соответствии с уравнением движения среды. Аппроксимация непрерывного распределения завихренности конечным числом вихревых элементов

может приводить к накоплению значительной погрешности, которая проявляется в получении неверных результатов либо вычислительной неустойчивости [4]. Можно выделить три основных способа уменьшения погрешности вычислений: увеличение числа вихревых трубок; уменьшение шага расчета по времени; совершенствование модели вихревой трубки. В настоящей работе предложена новая модель вихревой трубки-отрезка.

Вихревой отрезок представляет собой прямолинейный участок бесконечно тонкой вихревой нити. Вихревые трубки характеризуются интенсивностью и положением в пространстве двух характерных точек, которые движутся по траекториям жидких частиц. Обычно в качестве этих точек выбирают концы отрезка [6]. Однако определение скоростей вблизи краев вихревой трубки приводит к большим погрешностям при вычислении скорости изменения вектора интенсивности вихревой трубки.

Этого недостатка лишен сферический вихревой отрезок [4], который задает сферически симметричное распределение завихренности и характеризуется центром, вектором интенсивности и параметрами распределения завихренности. Однако сферический вихревой отрезок не является подобным цилиндрическому элементу вихревой трубки, поэтому для моделирования вихревых структур с достаточной точностью требуется большое число вихревых трубок и специальные приемы моделирования, например метод core spreading [7]. В то же время вихревой отрезок представляется более продуктивным элементом для моделирования вихревых трубок, так как он может естественным образом удлиняться и укорачиваться.

Цель настоящей работы — создание модели вихревой трубки-отрезка, которая предполагает вычисление скорости на максимально возможном удалении от краев, т.е. в центре отрезка.

Модель симметричного вихревой трубки-отрезка. Рассматривается течение идеальной несжимаемой среды, которое описывается уравнением неразрывности и уравнением Эйлера, записанным в форме Гельмгольца для завихренности $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V}$ [8]:

$$\text{div } \vec{V} = 0; \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{V} \times \vec{\Omega}).$$

При этом скорость \vec{V} в точке с радиус-вектором \vec{r} вычисляется по известному распределению завихренности $\vec{\Omega}(\vec{\xi})$:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{(\vec{r} - \vec{\xi}) \times \vec{\Omega}(\vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} dv_{\xi}, \quad (1)$$

где интеграл берется по всей области течения D .

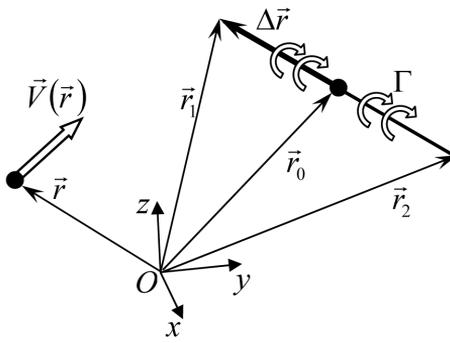


Рис. 1. Ворон-отрезок

Завихренность движется в пространстве по траекториям жидких частиц:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(\vec{r}). \quad (2)$$

Вихревой отрезок (ворон-отрезок) [9] характеризуется радиус-векторами концов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 и интенсивностью Γ (рис. 1).

Скорость, индуцируемая вортоном-отрезком в точке \vec{r} , равна

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} c \vec{a}, \quad (3)$$

где

$$\vec{a} = (\vec{r} - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1);$$

$$c = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right). \quad (4)$$

Обычно правая часть уравнения (2) вычисляется для концов каждого вортона непосредственно по формулам (3)–(4).

Рассмотрим иной подход к моделированию эволюции вортонов. Каждый вортон будем характеризовать положением его центра \vec{r}_0 , вектором $\Delta\vec{r}$ (см. рис. 1) и интенсивностью Γ . Такой вортон является симметричным относительно точки \vec{r}_0 . Предполагается, что в процессе эволюции вихревого элемента точка \vec{r}_0 движется по траектории жидких частиц и всегда остается центром вортона. Ниже выведены уравнения, описывающие изменение $\Delta\vec{r}$ в процессе движения.

Уравнения движения симметричного вортона. Запишем уравнение (2) для концов вортона:

$$\frac{d(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r})}{dt} = \vec{V}(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r});$$

$$\frac{d(\vec{r}_0 - \Delta\vec{r})}{dt} = \vec{V}(\vec{r}_0 - \Delta\vec{r}). \quad (5)$$

Скорость $\vec{V}(\vec{r})$ может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности

точки \vec{r}_0 с точностью до членов второго порядка:

$$\vec{V}(\vec{r}_0 \pm \Delta\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}_0) \pm \text{grad } \vec{V}(\vec{r}_0) \cdot \Delta\vec{r} + O(|\Delta\vec{r}|^2).$$

Вычитая второе уравнение (5) из первого и пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем

$$\frac{d(\Delta\vec{r})}{dt} = \text{grad } \vec{V}(\vec{r}_0) \cdot \Delta\vec{r}. \quad (6)$$

Движение радиус-вектора центра вихря описывается уравнением

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{V}(\vec{r}_0). \quad (7)$$

Таким образом, движение симметричного вихря описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 6-го порядка (6)–(7). Интенсивность вихря Γ остается неизменной [9].

Моделирование пространственного течения. Если распределение завихренности $\vec{\Omega}$ в пространственном течении аппроксимируется множеством из N вихревых отрезков, интеграл в формуле (1) заменяется суммой, слагаемые которой учитывают влияние отдельных вихревых отрезков и вычисляются по формулам (3)–(4). Для симметричных вихревых отрезков требуется решать систему ОДУ, полученную из уравнений (6)–(7):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_{0i}}{dt} &= \sum_{j=1}^N \vec{V}_j(\vec{r}_{0i}); \\ \frac{d(\Delta\vec{r}_i)}{dt} &= \left(\sum_{j=1}^N \hat{B}_j(\vec{r}_{0i}) \right) \cdot \Delta\vec{r}_i, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\vec{r}_{0i} = (x_0, y_0, z_0)^T$ — центр i -го вихря; $\vec{V}_j(\vec{r}_{0i})$ — скорость, индуцированная j -м вихрем в точке \vec{r}_{0i} ; элементы матрицы $\hat{B}_j(\vec{r}_{0i}) = \text{grad } \vec{V}_j(\vec{r}_{0i})$ вычисляются путем дифференцирования выражения (3):

$$\hat{B}_j(\vec{r}_{0i}) = \begin{pmatrix} \partial V_x / \partial x_0 & \partial V_x / \partial y_0 & \partial V_x / \partial z_0 \\ \partial V_y / \partial x_0 & \partial V_y / \partial y_0 & \partial V_y / \partial z_0 \\ \partial V_z / \partial x_0 & \partial V_z / \partial y_0 & \partial V_z / \partial z_0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Ниже приведены необходимые соотношения для вычисления компонент скорости $\vec{V}_j(\vec{r}_{0i})$ и их производных, входящих в матрицу (9):

$$\begin{aligned} \vec{s}_0 &= \vec{r}_{0j} - \vec{r}_{0i}; & \vec{s}_1 &= \vec{s}_0 + \Delta\vec{r}_j; & \vec{s}_2 &= \vec{s}_0 - \Delta\vec{r}_j; \\ s_1 &= |\vec{s}_1|; & s_2 &= |\vec{s}_2|; & \Delta r_j^2 &= |\Delta\vec{r}_j|^2; \end{aligned}$$

$$\vec{\eta}_1 = \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|}; \quad \vec{\eta}_2 = \frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|}; \quad \vec{a} = 2(\vec{s}_0 \times \Delta\vec{r}_j); \quad h = |\vec{a}|^2;$$

$$c = \frac{2((\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2) \cdot \Delta\vec{r}_j)}{h}; \quad K = (s_1 + s_2) \Delta r_j^2 - (s_1 - s_2) (\Delta\vec{r}_j \cdot \vec{s}_0);$$

$$\frac{\partial h}{\partial (\vec{r}_{0i})_n} = -8((\vec{s}_0)_n \Delta r_j^2 - (\Delta\vec{r}_j)_n \cdot (\Delta\vec{r}_j \cdot \vec{s}_0));$$

$$\frac{\partial c}{\partial (\vec{r}_0)_n} = \frac{2}{h^2 s_1 s_2} \left(h (s_1 - s_2) (\Delta\vec{r}_j)_n - \frac{\partial h}{\partial (\vec{r}_{0i})_n} K \right) +$$

$$+ \frac{2}{h s_1^2 s_2^2} \left((\Delta\vec{r}_j \cdot \vec{s}_1) s_2^2 \vec{\eta}_1 - (\Delta\vec{r}_j \cdot \vec{s}_2) s_1^2 \vec{\eta}_2 \right).$$

Тогда

$$\vec{V}_j(\vec{r}_{0i}) = \frac{\Gamma_j}{4\pi} c \vec{a};$$

$$\hat{B}_j(\vec{r}_{0i})_{mn} = \frac{\partial (\vec{V})_m}{\partial (\vec{r}_0)_n} = \frac{\Gamma_j}{4\pi} \left(\frac{\partial c}{\partial (\vec{r}_{0i})_n} \cdot (\vec{a})_m - 2c \sum_k \varepsilon_{mnk} (\Delta\vec{r}_j)_k \right). \quad (10)$$

Здесь каждый из индексов m, n, k принимает значения x, y, z ; ε_{mnk} — символ Леви-Чивиты.

Расстояние от точки \vec{r}_{0i} до оси j -го вортон (прямой, проходящей через вортон-отрезок) вычисляется по формуле

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{a}|}{|\Delta\vec{r}_j|}.$$

Чтобы исключить неограниченный рост скоростей $\vec{V}_j(\vec{r}_{0i})$ и их производных при приближении к осям вртонов, вводится радиус дискретности ε по аналогии с вихрем Рэнкина [8]. Считается, что внутри цилиндра радиуса ε вблизи каждого вортон, т.е. при $d_{ij} < \varepsilon$, индуцированные им скорости и их производные убывают по линейному закону до нуля на оси вортон.

В этом случае выражения (10) модифицируются:

$$\vec{V}_j^*(\vec{r}_{0i}) = \alpha \vec{V}_j(\vec{r}_{0i}^*); \quad \hat{B}_j^*(\vec{r}_{0i})_{mn} = \alpha \hat{B}_j(\vec{r}_{0i}^*)_{mn}, \quad (11)$$

где

$$\vec{r}_{0i}^* = \vec{r}_{0i} + \vec{\delta}(\alpha^{-1} - 1); \quad \alpha = \frac{d_{ij}}{\varepsilon}; \quad \vec{\delta} = \Delta\vec{r}_j \frac{\vec{s}_0 \cdot \Delta\vec{r}_j}{\Delta r_j^2} - \vec{s}_0.$$

Таким образом, выражения (10) и (11) полностью определяют правые части системы (8), которую условно запишем в виде

$$\dot{\vec{q}} = \vec{f}(\vec{q}). \quad (12)$$

Начальными условиями для системы (12) являются положения вртонов в момент времени $t = 0$, т.е. $\vec{q}(0) = \vec{q}_0$.

В качестве метода интегрирования задачи Коши выбран метод Рунге–Кутты второго порядка:

$$\vec{q}_i^* = \vec{q}_i + \vec{f}(\vec{q}_i) \frac{\Delta t}{2}; \quad \vec{q}_{i+1} = \vec{q}_i + \vec{f}(\vec{q}_i^*) \Delta t.$$

Тестирование симметричного вортонна. Вопросы аппроксимации поля завихренности вортоннами и индуцированного ими поля скоростей рассмотрены в работах [6, 10]. В данной работе проведено численное исследование эволюции завихренности. Для тестирования предлагаемой расчетной схемы выбран известный качественный эффект “чехарды” двух вихревых колец. Известно [11], что в идеальной жидкости такое движение будет периодическим. Нарушение периодичности в результате численного моделирования позволит судить об адекватности применяемой модели вихревого элемента.

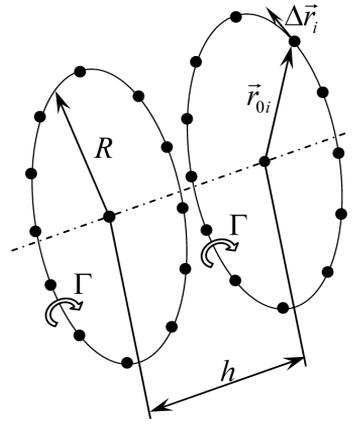


Рис. 2. Вихревые кольца

Рассматриваются два тонких вихревых кольца радиусом $R_1 = R_2 = R = 1$ (рис. 2). В начальный момент времени центры колец лежат на одной оси, а расстояние между плоскостями колец $h = 1,2$. Циркуляции колец одинаковы и равны $\Gamma = 1$.

Дискретизация вихревых колец была выполнена, как показано на рис. 2: каждое вихревое кольцо моделировалось при помощи $N = 60$ симметричных вортоннов-отрезков, расставленных равномерно по окружности кольца. Радиус дискретности вортоннов был выбран равным $\varepsilon = 0,1$, шаг интегрирования по времени $\Delta t = 0,01$.

В результате моделирования получены зависимости радиусов колец (рис. 3, а) и расстояния между кольцами (рис. 3, б) от времени. На рис. 4 приведены зависимости радиусов обоих колец от расстояния между ними.

Движение колец, как следует из графиков, является периодическим, что согласуется с теоретическими результатами исследования “чехарды” вихревых колец в идеальной жидкости [11]. При движении кольца не выходят из плоскости, сохраняют свою форму и через равные промежутки времени восстанавливают взаимное расположение в пространстве. На рис. 5 показаны отдельные фазы половины периода этого процесса.

Для сравнения проведено аналогичное исследование с использованием сферических вортоннов методом core spreading [7]. В этом случае каждое вихревое кольцо моделировалось при помощи $N = 360$ сферических вортоннов. Для обеспечения устойчивости вычислительного

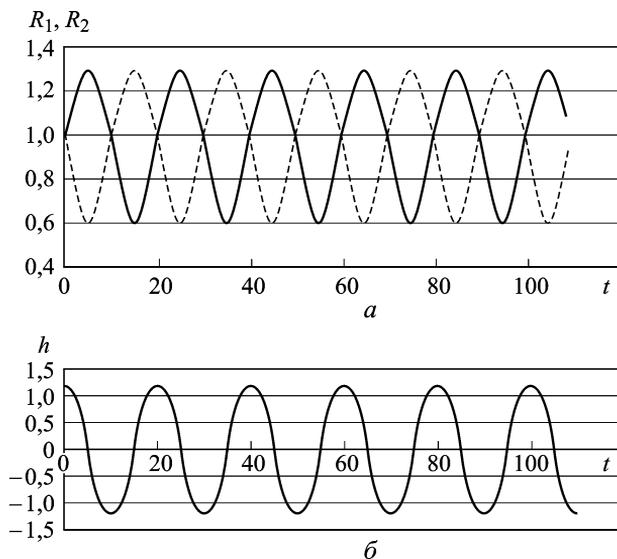


Рис. 3. Зависимость от времени радиусов колец (а) и расстояния между кольцами (б) при использовании симметричных вихревых-отрезков

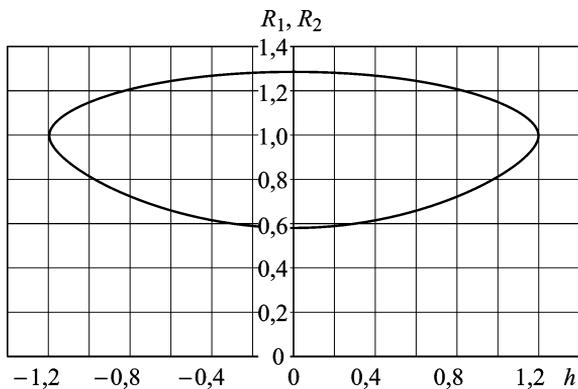


Рис. 4. Зависимость радиусов колец от расстояния между ними при использовании симметричных вихревых-отрезков

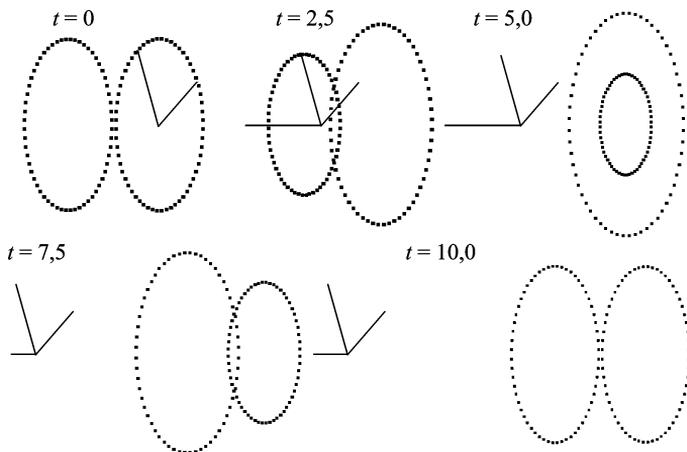


Рис. 5. Фазы процесса “чехарды” вихревых колец

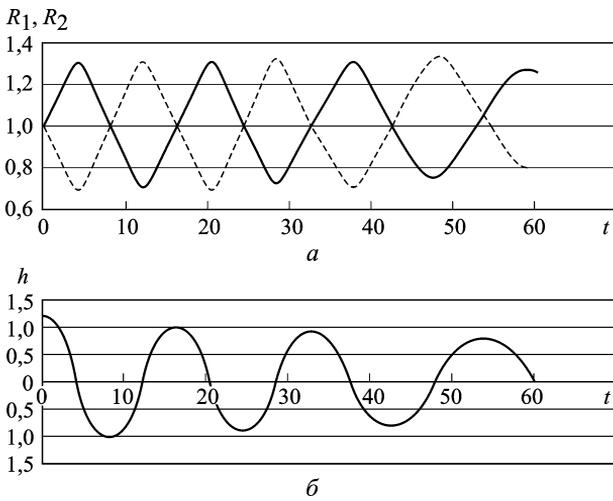


Рис. 6. Зависимость от времени радиусов колец (а) и расстояния между кольцами (б) при использовании сферических вихревонов

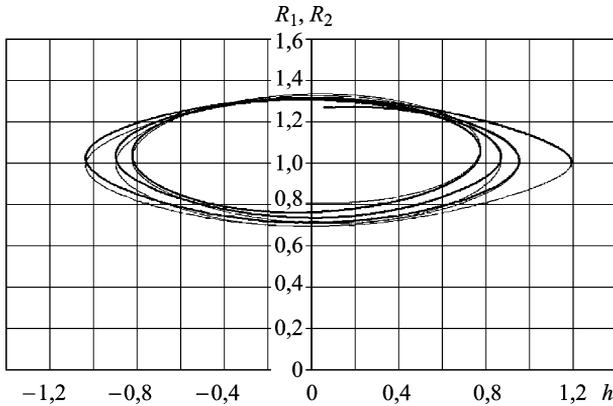


Рис. 7. Зависимость радиусов колец от расстояния между ними при использовании сферических вихревонов:
 ———— — R_1 ; ———— — R_2

процесса шаг интегрирования по времени потребовалось уменьшить до $\Delta t = 0,001$. Тем не менее в этом случае при более тщательной дискретизации колец и на порядок меньшем шаге по времени полученные результаты далеки от теоретических. Из графиков, изображенных на рис. 6–7, видно, что движение колец не является периодическим, хотя качественный эффект “чехарды” имеет место.

Причиной непериодического движения колец, по-видимому, является деградация завихренности — перераспределение завихренности в процессе ее эволюции: на каждом шаге расчета деформирующиеся вихревоны заменяются эквивалентными сферами [7].

Отметим, что вихревые кольца, составленные из сферических вихревонов, достаточно быстро выходят из плоскости и теряют форму, что отмечено в работе [4]. На рис. 8 показаны положения колец в моменты

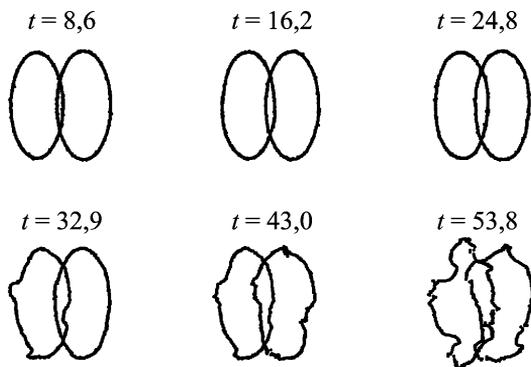


Рис. 8. Разрушение вихревых колец при их моделировании сферическими вортионами

времени, когда их взаиморасположение наиболее близко к первоначальному.

Выводы. Предложен вихревой элемент — симметричный вортон-отрезок и получены уравнения его движения. Сравнение со сферическим вортионом показало, что новый вихревой элемент позволяет более эффективно моделировать эволюцию завихренности в пространстве. Предполагается, что симметричный вортон-отрезок можно будет использовать для моделирования пространственного обтекания тел при сравнительно небольших вычислительных затратах.

Авторы благодарят Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН за предоставленную возможность использования высокопроизводительных кластеров МВС-6000IM, МВС-100К.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аэрогидроупругость конструкций / А.Г. Горшков, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев и др. — М.: Физматлит, 2000. — 590 с.
2. Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы / Под ред. С.М. Белоцерковского. — М.: ЦАГИ, 2000. — 265 с.
3. К о р н е в Н. В. Метод вихревых частиц и его приложение к задачам гидроаэродинамики корабля / Дисс... д-ра техн. наук. — СПб, 1998. — 184 с.
4. W i n k e l m a n s G. S., L e o n a r d A. Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows // Journal of Comp. Physics, — 1993. — Vol. 109. — P. 247–273.
5. Н о в и к о в Е. А. Обобщенная динамика трехмерных вихревых особенностей (вортионов) // Журнал эксп. и теор. физики. — 1983. — Т. 84, вып. 3. — С. 975–981.
6. К и р я к и н В. Ю., С е т у х а А. В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерных уравнений Эйлера в лагранжевых координатах // Дифф. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 9. — С. 1263–1276.
7. O j i m a A., K a m e m o t o K. Numerical simulation of unsteady flow around three dimensional bluff bodies by an advanced vortex method // JSME International Journal, Series B. — 2000. — Vol. 43, no. 2. — P. 127–135.
8. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.

9. Н е л и н е й н а я теория крыла и ее приложения / Т.О. Аубакиров, С.М. Белоцерковский, А.И. Желанников и др. – Алматы: Гылым, 1997. – 448 с.
10. В e a l e J. T., M a j d a A. Vortex methods: Convergence in three dimensions // Mathematics of Computation. – 1982. – Vol. 39, no. 159. P. 1–27.
11. Г у р ж и й А. А., К о н с т а н т и н о в М. Ю., М е л е ш к о В. В. Взаимодействие коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. – 1988. – № 2. – С. 78–84.

Статья поступила в редакцию 28.01.2008

Илья Константинович Марчевский родился в 1983 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г., ассистент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 18 научных и учебно-методических работ в области исследования движения и устойчивости конструкций в потоке среды, вычислительной гидродинамики и элементарной математики.



I.K. Marchevskii (b. 1983) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2007. Assistant of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of study of motion and stability of constructions in flow of medium, computational hydrodynamics and elementary mathematics.

Георгий Александрович Щеглов родился в 1972 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1996 г.. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области динамики и прочности конструкций аэрокосмических систем, вычислительных методов в гидроупругости.



G.A. Shcheglov (b. 1972) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1996. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of dynamics and strength of spacecrafts, computational methods in hydroelasticity.