

В. Е. Мешковский

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСКРЫВАЮЩЕЙСЯ КРУПНОГАБАРИТНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ФЕРМЕННОГО ТИПА

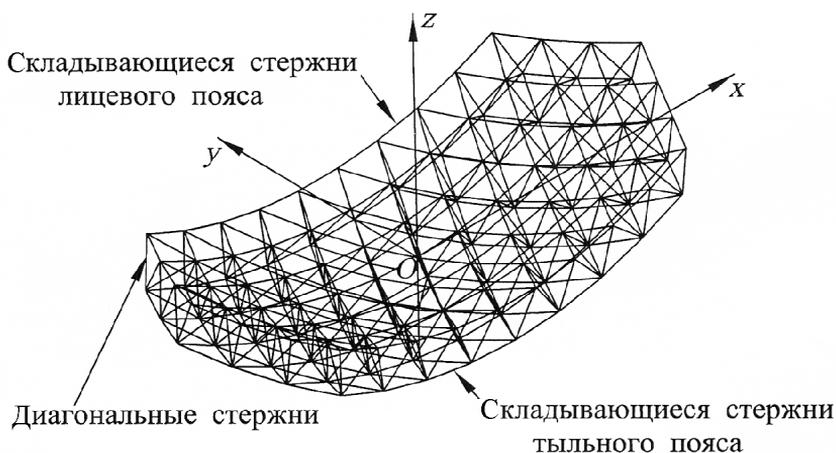
*Рассмотрена геометрическая модель, содержащая информацию о форме и размерах раскрывающейся крупногабаритной космической конструкции ферменного типа, ее элементах и их взаимном расположении. В соответствующую математическую модель входят соотношения, определяющие координаты центров узловых шарниров лицевого и тыльного поясов, положения геометрических осей цилиндрических шарниров складывающихся и диагональных стержней. Предложенная модель может использоваться при проектировании и разработке математических моделей для исследования собственных динамических характеристик конструкций рассматриваемого типа и при исследовании процесса их раскрытия.*

**E-mail: sm11@sm.bmstu.ru**

**Ключевые слова:** крупногабаритные космические конструкции, ферменные конструкции, раскрывающиеся антенны, геометрическая модель.

Разработка крупногабаритных антенн с рефлектором большой апертуры позволяет решить проблему обеспечения потребителей высококачественной космической связью, расширить возможности дистанционного зондирования Земли в интересах науки и национальной безопасности. По способу формирования отражающей поверхности космические антенны подразделяются на вантовые, зонтичные и ферменные. Имеющиеся зарубежные и отечественные данные о перспективности различных конструктивных решений носят противоречивый характер и связаны с интересами фирм и организаций, участвующих в конкурсах различных проектов. Однако опыт разработки антенн показывает, что именно антенны ферменного типа обеспечивают широкое универсальное использование их в различных диапазонах волн с различными облучающими устройствами при сохранении конструктивной схемы основного элемента антенны — рефлектора. Технические решения, заложенные в конструктивную схему рефлектора, позволяют построить антенны разнообразного профиля, формы и размеров для выполнения конкретной радиотехнической задачи.

Каркас рефлектора представляет собой пространственную ферменную конструкцию, образованную двумя поясами, связанными между собой с помощью диагональных стержней (рис. 1). Каждый пояс — это совокупность складывающихся стержней, состоящих из двух шарнирно связанных трубчатых элементов. Диагональные и складывающиеся стержни связаны между собой с помощью узловых шарниров. На лицевом поясе рефлектора закреплено сетеполотно.



**Рис. 1. Каркас рефлектора антенны**

При складывании антенны трубчатые элементы складывающихся стержней поворачиваются относительно осей, расположенных в узловых шарнирах, и занимают положение внутри каркаса между диагональными стержнями. Последние также поворачиваются относительно своих осей в узловых шарнирах и занимают в сложенном состоянии практически параллельное положение. На орбите рефлектор антенны разворачивается за счет энергии, накопленной при укладке рефлектора в пружинах, расположенных в шарнирах складывающихся стержней.

На конструкцию космической антенны накладываются ряд ограничений, в частности ограничения на массовые и габаритные характеристики. Конструкция антенны должна: иметь минимальную массу, ограниченные габариты в сложенном состоянии для возможности ее размещения под обтекателем ракеты-носителя и большую площадь рабочей поверхности в раскрытом положении; быть достаточно жесткой в рабочем состоянии и обеспечивать надежность раскрытия из транспортного состояния в рабочее.

Разработка конструкции антенны, удовлетворяющей указанным требованиям, как и разработка любого технического объекта, основывается на математическом моделировании [1].

На начальном этапе использована упрощенная геометрическая модель, предполагающая пошаговое определение координат точек, соответствующих центрам узловых шарниров лицевого и тыльного поясов (далее центры узловых шарниров), основанная на методике расчета, предложенной ОКБ МЭИ — разработчиком космических антенн ферменного типа.

Расчет начинается с нахождения центров узловых шарниров лицевого пояса, принадлежащих заданной поверхности параболоида вращения, т.е. с определения дискретного множества точек

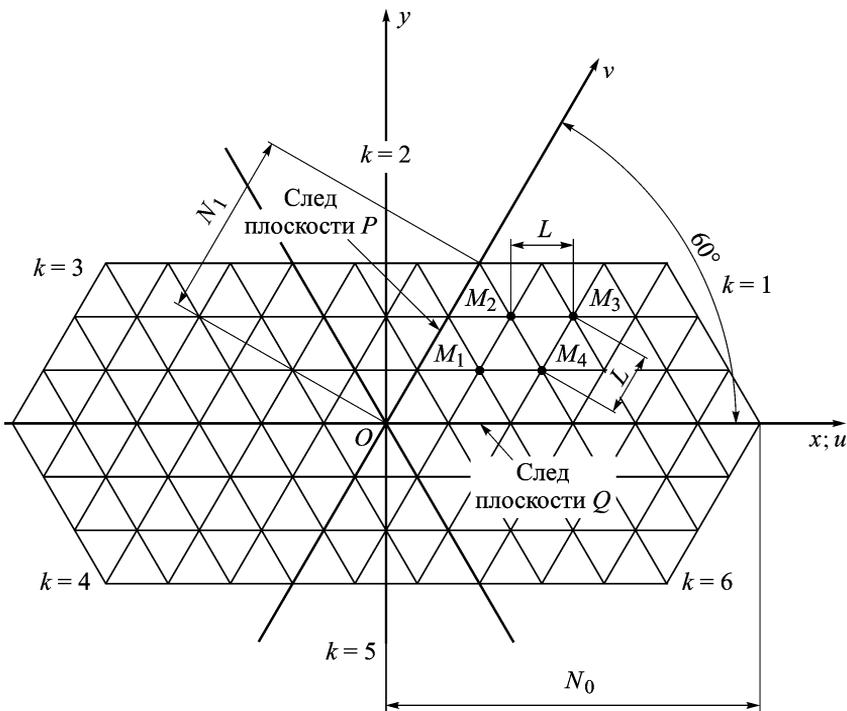


Рис. 2. Отображение лицевого пояса рефлектора на плоскость  $Ouv$

$\mathcal{F} = \{M \in \mathbb{R} \mid M_p, p \in \mathbb{N} \wedge [1, N_{\text{уз.л}}]\}$ , где  $\mathbb{R}, \mathbb{N}$  – множества действительных и натуральных чисел, а  $N_{\text{уз.л}} = 2N_0(2N_1 + 1) - N_1(N_1 - 1) + 1$  – число узловых шарниров лицевого пояса.

Если в плоскости  $Ouv$  (рис.2) определить множество  $\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid (u \geq -N_0 \wedge u \leq N_0 \wedge v \geq N_1 \wedge v \leq N_1 \wedge v \leq -u + N_0 \wedge v \geq -u - N_0)\}$ , где  $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел, то  $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\mathcal{D})$ , где  $\mathcal{S} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Представим  $\mathcal{F}$  в виде  $\mathcal{F} = \left(\bigcup_{i=1}^{i=6} \mathcal{F}_i^{(s)}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{j=6} \mathcal{F}_j^{(r)}\right)$ , ( $i, j \in \mathbb{N} \wedge [1, 6]$ ),

где  $\mathcal{F}_i^{(s)} = \mathcal{S}(\mathcal{D}_i^{(s)})$ ,  $\mathcal{F}_j^{(r)} = \mathcal{S}(\mathcal{D}_j^{(r)})$ ,

$$\mathcal{D}_i^{(s)} = \mathcal{D} \cap \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid \chi_{k+2}^{(1)}u + \chi_{k+1}^{(1)}v > 0 \wedge \chi_k^{(1)}u + \chi_{k-1}^{(1)}v > 0\}$$

– множество внутренних точек  $i$ -го сектора с углом  $60^\circ$ ,

$$\mathcal{D}_j^{(r)} = \mathcal{D} \cap \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid |\chi_{j-1}^{(1)}|u + |\chi_{j+1}^{(1)}|v = 0 \wedge \chi_{j+1}^{(1)}u + (\chi_{j+1}^{(1)} - \chi_j^{(2)})v > 0\}$$

– множество точек, принадлежащих  $j$ -му лучу, представляющему собой границу двух смежных секторов,

$$\chi_n^{(1)} = \text{sign}(\sin(n\pi/3)), \quad \chi_n^{(2)} = \text{sign}(\cos(n\pi/3)).$$

Определим множество  $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k^{(s)} \cup \mathcal{F}_k^{(r)} \cup \mathcal{F}_{k_0}^{(r)}$ , где  $k \in \mathbb{N} \wedge [1, 6]$ ,  $k_0 = k - 1$ , если  $k \geq 2$ , и  $k_0 = 6$ , если  $k = 1$ , которое будем назы-

вать множеством точек  $k$ -го сектора лицевого пояса. Форма и размер лицевого пояса характеризуется числом пролетов длиной  $L$  каркаса рефлектора:  $N_0$  — вдоль оси  $Ou$  и  $N_1$  — вдоль оси  $Ov$ .

На первом шаге расчета определяем координаты центров узловых шарниров на основной кривой, являющейся образующей для поверхности вращения и расположенной в координатной плоскости  $Oxz$  (плоскость  $Q$ ) глобальной системы координат  $Oxyz$  с началом в вершине поверхности вращения (точка  $O$ ) лицевого пояса (см. рис. 1). Длины всех складывающихся стержней, расположенных вдоль этой кривой, равны  $L$ , а координаты  $y$  всех рассматриваемых на этом шаге центров равны нулю. Для центра в начале координат  $x = y = z = 0$ . Далее последовательно находим координаты центров  $x_n^{(Q)}$ ,  $z_n^{(Q)}$ ,  $n \in \mathbb{N} \wedge [1, N_0]$ , из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (x_n^{(Q)} - x_{n-1}^{(Q)})^2 + (z_n^{(Q)} - z_{n-1}^{(Q)})^2 - L^2 &= 0, \\ \Phi(x_n^{(Q)}) - z_n^{(Q)} &= 0, \end{aligned}$$

где  $x_0^{(Q)} = z_0^{(Q)} = 0$ ;  $\Phi(x)$  — функция кривой, являющейся образующей поверхности вращения.

Первое уравнение определяет расстояние между центрами  $(x_n^{(Q)}, z_n^{(Q)})$  и  $(x_{n+1}^{(Q)}, z_{n+1}^{(Q)})$ , равное  $L$ , второе — расположение центра на основной кривой.

В частных случаях функция  $\Phi(x)$  имеет следующий вид:  $\Phi(x) = Sx^2$  для параболоида вращения, где  $S = \frac{1}{4f}$  ( $f$  — фокусное расстояние), и  $\Phi(x) = 0$  для пластины.

На втором шаге, используя оператор  $\mathcal{R}_{\psi=\pi/3}$ , определяем координаты центров узловых шарниров, лежащих на кривой в плоскости  $P$ , проходящей через ось симметрии поверхности вращения и расположенной под углом  $60^\circ$  к плоскости  $Q$ , в которой лежит основная кривая (см. рис. 2):

$$x_n^{(P)} = x_n^{(Q)} \cos \psi, \quad y_n^{(P)} = x_n^{(Q)} \sin \psi, \quad z_n^{(P)} = z_n^{(Q)}.$$

Под оператором  $\mathcal{R}_\psi$  будем понимать отображение  $\mathcal{Y} = \mathcal{R}_\psi(\mathcal{X})$  с помощью линейного ортогонального оператора с матрицей преобразования

$$\{\mathcal{R}_\psi\} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствующей вращению относительно оси симметрии (ось  $Oz$ ) поверхности лицевого пояса на угол  $\psi$ .

На третьем шаге определяем координаты центров, лежащих внутри первого сектора ( $k = 1$ ). Рассматриваем ячейку  $M_1M_2M_3M_4$  (см. рис. 2). При известных координатах центров  $M_2(i-1, j)$  и  $M_4(i, j-1)$  находим координаты центра  $M_3(i, j)$  в глобальной системе координат  $Oxyz$  из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} Ax_{i,j} + By_{i,j} + Cz_{i,j} + D &= 0, \\ \Phi(x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2) - z_{i,j} &= 0, \\ (x_{i,j} - x_M)^2 + (y_{i,j} - y_M)^2 + (z_{i,j} - z_M)^2 - h^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_M = 0,5(x_{i,j-1} + x_{i-1,j})$ ;  $y_M = 0,5(y_{i,j-1} + y_{i-1,j})$ ;  $z_M = 0,5(z_{i,j-1} + z_{i-1,j})$ ;  $A = x_{i,j-1} - x_{i-1,j}$ ;  $B = y_{i,j-1} - y_{i-1,j}$ ;  $C = z_{i,j-1} - z_{i-1,j}$ ;  $D = -(Ax_M + By_M + Cz_M)$ ;  $h^2 = L^2 - 0,25(A^2 + B^2 + C^2)$ .

В системе (1) первое уравнение представляет собой уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка  $M_2M_4$  перпендикулярно ему, т.е. нормальный вектор  $N$  этой плоскости имеет координаты  $A, B, C$ . Второе уравнение системы (1) определяет принадлежность точки  $M_3$  поверхности вращения  $\Phi(x^2 + y^2)$ , а третье — расстояние от точки  $M_3$  до точки  $M$  (здесь и далее полужирным шрифтом обозначаются векторные величины).

Таким образом, рассматриваемая система (1) получена на основе одного из основных условий (равенство расстояний от точек  $M_2$  и  $M_4$  до точки  $M_3$  (см. рис. 2)), заложенных в построение рефлектора и необходимых для приведения каркаса рефлектора в транспортное плотноупакованное состояние и обеспечения его раскрытия на орбите.

На заключительном шаге с использованием операторов  $\mathcal{R}_{\psi=k\pi/3}$ ,  $k \in [2, 6]$ , находим координаты центров узловых шарниров, расположенных в остальных пяти секторах, т.е. множества  $\mathcal{F}_k = \mathcal{R}_{\psi=k\pi/3}(\mathcal{F}_1)$ .

После того как определены координаты центров узловых шарниров лицевого пояса, ведется расчет координат центров узловых шарниров тыльного пояса (множество  $\mathcal{B}$ ).

Так как длины  $L_1$  всех диагональных стержней равны друг другу, то координаты центров тыльного пояса находятся из условия их равноудаленности от соответствующих трех центров лицевого пояса (рис. 3). В этом случае центр  $Q$  лежит на прямой  $O_1Q$ , перпендикулярной плоскости треугольника  $M_1M_2M_3$  и проходящей через центр  $O_1$  описанной окружности. Исходя из условий построения лицевого пояса длины отрезков  $\overline{M_1M_3}$  и  $\overline{M_2M_3}$  равны  $L$ .

Единичный вектор нормали к плоскости треугольника  $M_1M_2M_3$  определяется так:

$$\mathbf{n}_0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}, \quad (2)$$

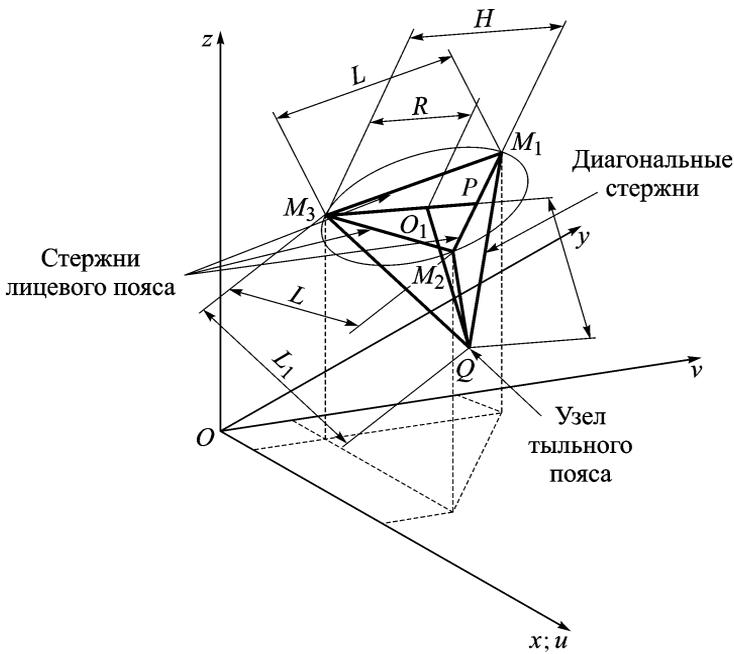


Рис. 3. Элементарная ячейка (тетраэдр) рефлектора

где  $\cos \alpha = \pm \frac{A}{N}$ ;  $\cos \beta = \pm \frac{B}{N}$ ;  $\cos \gamma = \pm \frac{C}{N}$ ;  $N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ;  
 $A = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)$ ;  $B = (x_3 - x_1)(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)$ ;  
 $C = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты осей системы координат  $Oxyz$ ;  $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2, 3$ , — координаты точек  $M_1, M_2, M_3$ .

Знак в выражении (2) для направляющих косинусов выбирается из условия расположения центров узловых шарниров тыльного пояса с внешней стороны образующей поверхности, т.е. должно выполняться условие

$$(\mathbf{n}_0, \mathbf{k}) < 0,$$

где  $(\dots, \dots)$  означает скалярное произведение векторов.

В этом случае координаты узла  $Q$  тыльного пояса определяются по зависимостям (см. рис. 3)

$$x_Q = x_{O_1} + H_1 \cos \alpha, \quad y_Q = y_{O_1} + H_1 \cos \beta, \quad z_Q = z_{O_1} + H_1 \cos \gamma,$$

где  $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$  — координаты точки  $O_1$ ;  $H_1 = \sqrt{L_1^2 - R^2}$ ;  $R = 0,5L^2/H$ ;  
 $H = \sqrt{(x_3 - x_p)^2 + (y_3 - y_p)^2 + (z_3 - z_p)^2}$ ;  $x_p = 0,5(x_1 + x_2)$ ;  $y_p = 0,5(y_1 + y_2)$ ;  $z_p = 0,5(z_1 + z_2)$ .

В данном случае треугольник  $M_1M_2M_3$  — равнобедренный, что определяет соответствующие выражения для высоты  $H$  и радиуса  $R$  описанной окружности.

Координаты точки  $O_1$  находятся по зависимостям

$$x_{O_1} = \frac{x_3 + \lambda x_p}{1 + \lambda}, \quad y_{O_1} = \frac{y_3 + \lambda y_p}{1 + \lambda}, \quad z_{O_1} = \frac{z_3 + \lambda z_p}{1 + \lambda},$$

где  $\lambda = R/(H - R)$ .

В разработанном численном алгоритме, основанном на приведенной выше упрощенной геометрической модели, для определения координат центров узловых шарниров лицевого пояса, лежащих на основной кривой, используется алгоритм поиска нулей заданной функции одного переменного, базирующийся на методе секущих, а для определения координат центров узловых шарниров лицевого пояса, лежащих внутри какого-либо сектора поверхности вращения произвольного вида, используется метод Ньютона для численного нахождения решения системы трех нелинейных алгебраических уравнений (1).

Для упорядочения последовательности точек, соответствующих центрам узловых шарниров лицевого и тыльного поясов, кроме прямоугольной декартовой системы координат целесообразно использовать целочисленную косоугольную систему с расположением координатных осей под углом  $60^\circ$  (см. рис. 2) и целочисленную полярную систему координат. Указанные системы позволяют построить алгоритмы определения координат произвольной точки лицевого и тыльного поясов.

В полярной целочисленной системе координат каждому центру ставится в соответствие пара чисел  $(m, n)$ , где  $m \in \mathbb{N}$  определяет значение полярного угла, а  $n \in \mathbb{N}$  — полярного радиуса. В качестве примера на рис. 4 показан закон изменения  $m$  и  $n$  для  $N_0 = 6$ ,  $N_1 = 3$ . Так, для  $n = 1$  число  $m$  принимает значения 1, 2, ... 6. Аналогично для  $n = 2$  и 3. Для  $n = 6$  число  $m$  может принимать значения от 1 до 36. Однако пары чисел  $(m, n)$ , соответствующие областям *off*, не принадлежат множеству  $\mathcal{D}$ . Поэтому для  $n = 6$  значения  $m$  составляют от 1 до 4, от 16 до 22, от 34 до 36. Аналогично и для  $n = 4$  и 5. Здесь необходимо отметить следующее. Если в плане лицевой пояс представляет собой правильный шестиугольник, т.е.  $N_1 = N_0$ , то область *off* представляет собой пустое множество, т.е. в этом случае все пары чисел  $(m, n)$  (см. рис. 4) принадлежат множеству  $\mathcal{D}$ .

Введенные системы координат позволяют определить номер того или иного центра в указанном выше множестве. Сначала для заданных значений находим полярный угол

$$\varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{3}v}{2u + v} + C,$$

где  $C = 0$ , если  $2u + v > 0 \wedge v > 0$ ;  $C = \pi$ , если  $2u + v < 0$ ;  $C = 2\pi$ ,

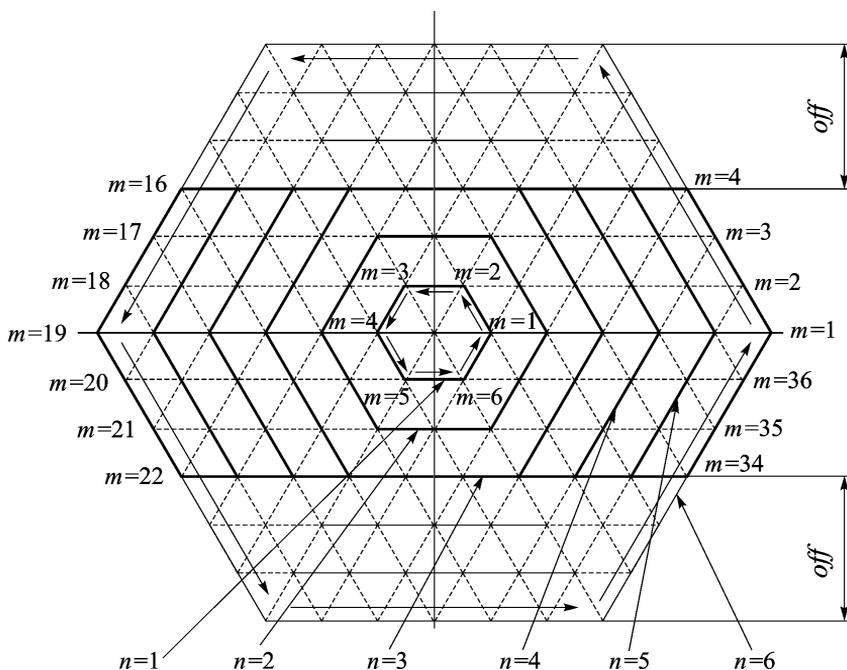


Рис. 4. Полярная целочисленная система координат

если  $2u + v > 0 \wedge v < 0$ ;  $C = \pi/2$ , если  $2u + v = 0 \wedge v > 0$ ;  $C = \frac{3}{2}\pi$ ,  
 если  $2u + v = 0 \wedge v < 0$ .

Далее определяем номер сектора

$$k = E\left(\frac{3}{\pi}\varphi_0\right) + 1,$$

где  $E(\dots)$  — целая часть числа, и соответствующие полярные координаты:

$$n = \begin{cases} |u| + |v| & \text{при } k = 1, 4, \\ |v| & \text{при } k = 2, 5, \\ |u| & \text{при } k = 3, 6; \end{cases}$$

$$m = E\left(\frac{3n}{\pi}\varphi_0\right) + 1.$$

Для найденных значений  $n$  и  $m$  находим номер центра:

$$n_{\text{ц}} = \begin{cases} 3n(n-1) + m, & n \leq N_1, \\ 3N_1(N_1+1) + 2(2N_1+1)(n-N_1-1) + n_0, & n > N_1, \end{cases} \quad (3)$$

где  $n_0 = m$ , если  $k = 1$ ;  $n_0 = m - (3n - 2N_1 - 1)$ , если  $k = 3, 4$ ;  
 $n_0 = m - 2(3n - 2N_1 - 1)$ , если  $k = 6$ .

Для  $k = 2, 5$  номер  $n_{\text{ц}}$  определяется по первой зависимости в выражениях (3), так как для этих секторов  $n \leq N_1$ . Приведенные зависимости учитывают, что значения целочисленных полярных координат

могут изменяться в следующих интервалах:

$$n \in [1, N_0], m \in [1, 6n] \text{ при } n \leq N_1,$$

$m \in [1, N_1 + 1]$ , если  $k = 1 \wedge n > N_1$ ;  $m \in [3n - N_1 + 1, 3n + N_1 + 1]$ , если  $k = 3, 4 \wedge n > N_1$ ;  $m \in [6n - N_1 + 1, 6n]$ , если  $k = 6 \wedge n > N_1$ .

Данные интервалы изменения полярных координат соответствуют лицевому поясу, контур которого в системе координат  $Ouv$  подобен контуру, изображенному на рис. 2.

Алгоритм вычисления прямоугольных декартовых координат  $x, y, z$  точки  $M$  некоторого узла лицового пояса, лежащей в секторе  $k$  и имеющей косоугольные координаты  $u$  и  $v$ , состоит из следующих шагов.

Шаг 1 — определяются полярные координаты  $r, \varphi$  (нецелочисленные):

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} + C_1,$$

где  $\xi = u + v \cos \alpha$ ;  $\eta = v \sin \alpha$ ,  $\alpha = \pi/3$ ,  $C_1 = 0$ , если  $\xi > 0 \wedge \eta > 0$ ;  $\pi$ , если  $\xi < 0$ ;  $2\pi$ , если  $\xi > 0 \wedge \eta < 0$ ;  $\pi/2$ , если  $\xi = 0 \wedge \eta > 0$ ;  $\frac{3}{2}\pi$ , если  $\xi = 0 \wedge \eta < 0$ .

Шаг 2 — определяются косоугольные координаты точки  $M_{(1)}$ , лежащей в первом секторе и являющейся прообразом точки  $M$ , т.е.  $M = \mathcal{R}_{\psi=k\pi/3}(M_{(1)})$ :

$$v_{(1)} = E_0 \left( \frac{\eta_{(1)}}{\sin \alpha} \right), \quad u_{(1)} = E_0(\xi_{(1)} - v_{(1)} \cos \alpha),$$

где  $\xi_{(1)} = r \cos \varphi_{(1)}$ ;  $\eta_{(1)} = r \sin \varphi_{(1)}$ ;  $\varphi_{(1)} = \varphi - (k - 1)\alpha$ ,  $E_0(\dots)$  — функция округления числа.

Шаг 3 — определяются декартовы координаты  $x, y, z$  точки  $M$ :

$$x = r_{(1)} \cos \varphi_{(k)}, \quad y = r_{(1)} \sin \varphi_{(k)}, \quad z = z_{(1)},$$

где  $r_{(1)} = \sqrt{x_{(1)}^2 + y_{(1)}^2}$ ;  $\varphi_{(k)} = \operatorname{arctg} \frac{y_{(1)}}{x_{(1)}} + (k - 1)\alpha$ ;  $x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}$  — прямоугольные декартовы координаты точки  $M_{(1)}$ .

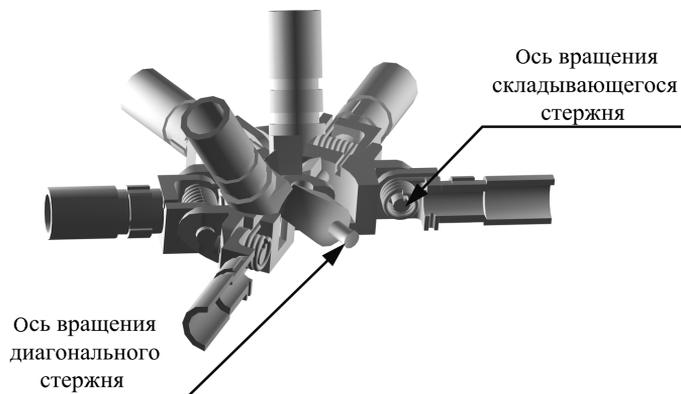
Таким образом, рассмотренная упрощенная геометрическая модель рефлектора антенны позволяет определить координаты центров всех узловых шарниров. Результаты расчета могут быть использованы при проектировании антенн подобного класса и разработке конструкции стапеля для сборки рефлектора. Кроме того, эта геометрическая модель может быть использована и для теоретических исследований, в частности для оценки частот и форм собственных колебаний антенны на основе метода конечных элементов. Однако, как показали проведенные исследования, вычисленные на основе такой геометрической

модели значения частот собственных колебаний антенны значительно отличаются от значений, полученных экспериментально. Это объясняется тем, что в рассмотренной геометрической модели складывающиеся и диагональные стержни в узловых шарнирах и трубчатые элементы складывающихся стержней предполагаются связанными между собой жестко. В действительности узловые шарниры представляют собой конструкцию, содержащую цилиндрические шарниры для шести складывающихся и трех диагональных стержней. Эти шарниры имеют односторонние упоры, ограничивающие поворот соответствующих стержней. Шарнирное соединение двух трубчатых элементов складывающегося стержня также выполнено в виде конструктивного узла, включающего в себя два цилиндрических шарнира с односторонними упорами. Кроме того, все цилиндрические шарниры складывающихся стержней снабжены пружинами. Для учета этих конструктивных особенностей рефлектора необходимо, чтобы геометрическая модель позволяла определять положение осей указанных выше цилиндрических шарниров.

Способы определения положения осей цилиндрических шарниров для узловых шарниров лицевого и тыльного поясов несколько отличаются друг от друга. Это связано с тем, что поверхность, на которой располагаются центры узловых шарниров лицевого пояса, задана и для рефлектора антенны, в частности, представляет собой поверхность параболоида вращения. А поверхность тыльного пояса задается дискретным множеством точек, в которых расположены центры соответствующих узловых шарниров.

Конструктивно каждый узловой шарнир представляет собой плоский жесткий корпус, в котором расположены оси цилиндрических шарниров складывающихся и диагональных стержней (рис. 5). На лицевом поясе плоскости корпусов узловых шарниров совпадают с касательными плоскостями к поверхности вращения в точках, являющихся центрами узловых шарниров. В связи с этим для определения положения корпуса узлового шарнира следует задать только один угол, определяющий угловое положение корпуса относительно нормали к поверхности вращения в точке, совпадающей с центром узлового шарнира.

В общем случае для задания положения геометрической оси цилиндрического шарнира как прямой в пространстве необходимо найти координаты некоторой точки, принадлежащей оси, и направляющий вектор (или три угла, задающих направление оси). Однако положение осей цилиндрических шарниров в корпусе узлового шарнира задано конструктивно. Поэтому для его определения нужно знать угловое положение корпуса соответствующего узлового шарнира.



**Рис. 5. Конструкция узлового шарнира**

После того как будут определены рассматриваемые углы для всех узловых шарниров лицевого пояса, расчет геометрических параметров осей цилиндрических шарниров проводится по следующему алгоритму.

Вводятся четыре системы координат:

- глобальная система  $Oxyz$  с базисом  $\{e\} = (i \ j \ k)$  (см. рис. 1);
- система  $Ox_p y_p z_p$  (рис. 6) с базисом  $\{e_p\} = (i_p \ j_p \ k_p)$ , координатная плоскость  $Ox_p z_p$  которой проходит через ось  $Oz$  и центр узлового шарнира  $M_p$ ;

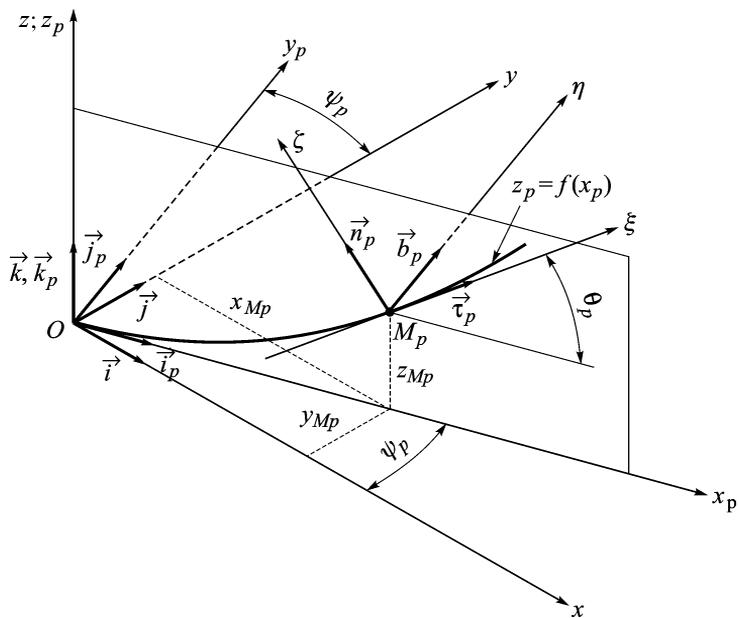
- система  $M_p \xi \eta \zeta$  с базисом  $\{g_p\} = (\tau_p \ b_p \ n_p)$ , центр которой (точка  $M_p$ ) совпадает с центром узлового шарнира, координатная плоскость  $M_p \xi \eta$  совпадает с плоскостью корпуса узлового шарнира, а ось  $M_p \zeta$  направлена по касательной к кривой  $z_p = f(x_p)$ , являющейся линией пересечения координатной плоскости  $Ox_p z_p$  с образующей поверхностью (см. рис. 6);

- система  $M_p \xi_q \eta_q \zeta_q$  (рис. 7) с базисом  $\{g_{pq}\} = (\tau_{pq} \ b_{pq} \ n_{pq})$ , координатная плоскость  $M_p \xi_q \eta_q$  которой совпадает с плоскостью корпуса узлового шарнира, а ось  $M_p \xi_q$  проходит через середину (точка  $A_{pq}$ ) геометрической оси.

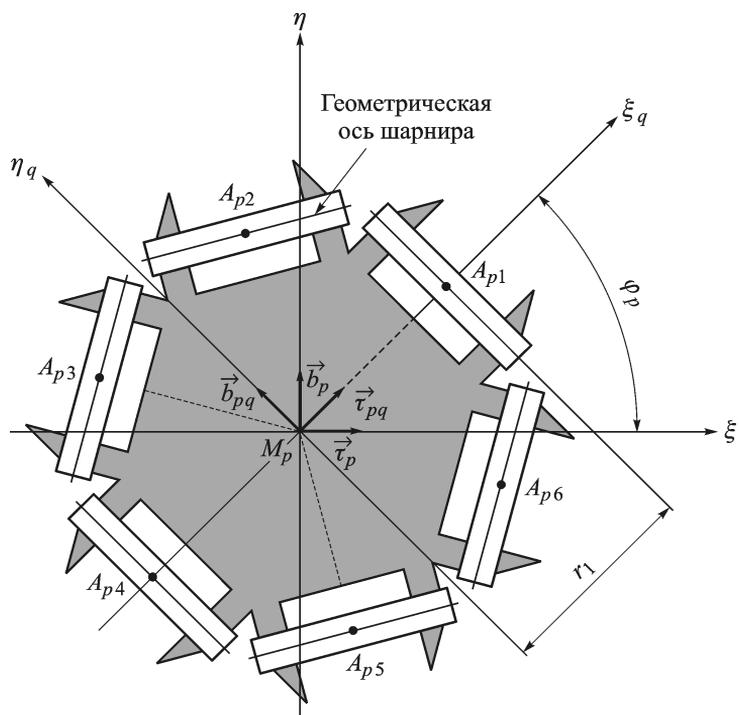
В данном случае  $p \in \mathbb{N} \setminus [1, N_{\text{уз.л}}]$ , а  $q \in \mathbb{N} \setminus [1, 6]$ . Далее связь между указанными базисами определяется с помощью матриц направляющих косинусов  $\{\alpha_p^{(0)}\}$ ,  $\{\alpha_p^{(1)}\}$ ,  $\{\alpha_{pq}^{(2)}\}$ :

$$\{e_p\}^T = \{\alpha_p^{(0)}\} \{e\}^T, \quad \{g_p\}^T = \{\alpha_p^{(1)}\} \{e_p\}^T, \quad \{g_{pq}\}^T = \{\alpha_{pq}^{(2)}\} \{g_p\}^T.$$

Для углов  $\psi_p, \theta_p, \beta_{pq} = \varphi_p + \frac{\pi}{3}(q-1)$  на рис. 6, 7 матрицы  $\{\alpha_p^{(0)}\}$ ,  $\{\alpha_p^{(1)}\}$ ,  $\{\alpha_{pq}^{(2)}\}$  имеют следующий вид:



**Рис. 6.** Прямоугольные декартовы системы координат, используемые для определения геометрических параметров осей цилиндрических шарниров



**Рис. 7.** Положение осей цилиндрических шарниров складывающихся стержней в узловом шарнире

$$\{\alpha_p^{(0)}\} = \begin{pmatrix} \cos \psi_p & \sin \psi_p & 0 \\ -\sin \psi_p & \cos \psi_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{\alpha_p^{(1)}\} = \begin{pmatrix} \cos \theta_p & 0 & \sin \theta_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_p & 0 & \cos \theta_p \end{pmatrix},$$

$$\{\alpha_{pq}^{(2)}\} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{pq} & \sin \beta_{pq} & 0 \\ -\sin \beta_{pq} & \cos \beta_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\operatorname{tg} \psi_p = y_p/x_p$ .

Поскольку вектор  $\boldsymbol{\tau}_p$  в точке  $M_p$  направлен по касательной к кривой  $z_p = f(x_p)$ , то  $\theta_p = \operatorname{arctg} \frac{df}{dx_p}$ .

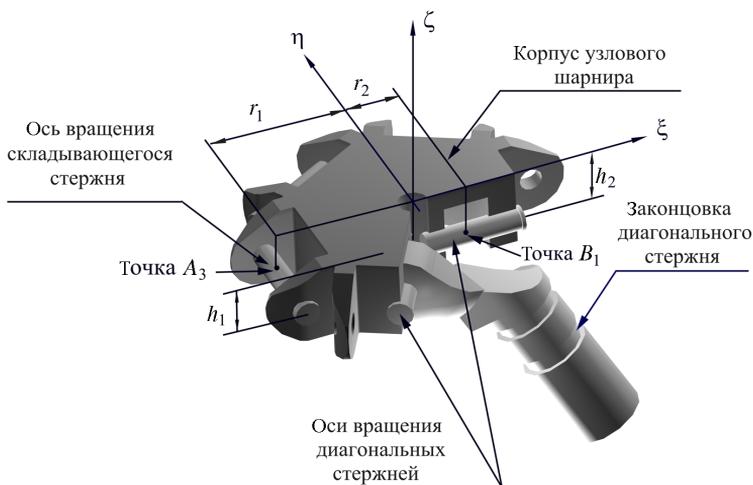
Зная угол  $\varphi_p$ , можно определить радиус-векторы точек  $A_{pq}$

$$\mathbf{r}_{A_{pq}} = r_1 \boldsymbol{\tau}_{pq} - h_1 \mathbf{n}_{pq} \quad (4)$$

и направляющие векторы  $\mathbf{b}_{pq}$  осей цилиндрических шарниров, проходящих через точки  $A_{pq}$  (см. рис. 7). В формуле (4)  $r_1$  и  $h_1$  соответствуют координатам точки  $A_{pq}$  в системе координат  $M_p \xi_q \eta_q \zeta_q$  (рис. 8).

После определения положения осей вращения складывающихся стержней (определено положение систем осей  $M_p \xi_q \eta_q \zeta_q$ ) могут быть найдены аналогичные геометрические параметры для осей цилиндрических шарниров трех диагональных стержней, сходящихся в данном узловом шарнире (см. рис. 8).

Из конструкции узловых шарниров следует, что если направление координатной оси  $M_p \xi_q$  для  $q = 1$  определено, то направляющие век-



**Рис. 8. Положение осей цилиндрических шарниров диагональных стержней в узловом шарнире**

торы осей вращения диагональных стержней

$$\mathbf{s}_i = \cos \gamma_i \boldsymbol{\tau}_{p1} + \sin \gamma_i \mathbf{b}_{p1}, \quad i \in \mathbb{N} \wedge [1, 3],$$

где  $\gamma_1 = -\frac{2\pi}{3}$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = \frac{2\pi}{3}$ .

Координаты точек, соответствующих серединам осей вращения диагональных стержней, определяются векторами (см. рис. 8)

$$\mathbf{r}_{B_i} = r_2 \mathbf{s}_i - h_2 \mathbf{n}_{p1}. \quad (5)$$

В формуле (5)  $r_2$  и  $h_2$  соответствуют координатам точки  $B_i$  в системе координат  $M_p \xi_{p1} \eta_{p1} \zeta_{p1}$  (см. рис. 8). Положение геометрических осей диагональных стержней показано на рис. 7 штриховыми линиями.

Рассчитаем геометрические параметры осей цилиндрических шарниров, расположенных на тыльном поясе.

Поверхность тыльного пояса задается дискретным множеством точек  $\mathcal{B} = \{Q \in \mathbb{R} \mid Q_r, r \in \mathbb{N} \wedge [1, N_{\text{уз.т}}]\}$ , где  $N_{\text{уз.т}} = N_1(4N_0 - N_1)$  — число узловых шарниров тыльного пояса. Множество  $\mathcal{B}$  является отображением множества  $\mathcal{F}$ , т.е.  $\mathcal{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$ , и оно основано на равенстве расстояний точки  $Q_r \in \mathcal{B}$  тыльного пояса от соответствующих трех точек лицевого пояса с координатами  $M_{p1}(u, v)$ ,  $M_{p2}(u, v - 1)$ ,  $M_{p3}(u + 1, v) \in \mathcal{F}$ . Эти четыре точки являются вершинами тетраэдра. В рассмотренном выше алгоритме определения координат центров узловых шарниров тыльного пояса предполагалось, что предварительно необходимо полностью определить множество  $\mathcal{F}$ .

Однако множество  $\mathcal{B}$  можно определить и другим способом. Как указывалось выше, точки лицевого пояса находят пошаговым расчетом: сначала определяют точки первого сектора  $\mathcal{F}_1$ , а затем с помощью оператора  $\mathcal{R}_\psi$  — точки остальных пяти секторов:  $\mathcal{F}_k = \mathcal{R}_{\psi=k\pi/3}(\mathcal{F}_1)$ , где  $k \in [2, 6]$ . После того как определены точки лицевого пояса в первом секторе  $\mathcal{F}_1$ , используя отображение  $\mathcal{T}$ , определяют соответствующие точки тыльного пояса  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{F}_1)$ , а затем посредством оператора  $\mathcal{R}_\psi$  находят и остальные точки как лицевого, так и тыльного поясов. Из этого алгоритма следует, что точки тыльного пояса, как и точки лицевого пояса, расположены на поверхности вращения, не имеющей какого-либо аналитического представления в отличие от поверхности, на которой расположены центры узловых шарниров лицевого пояса (для антенны — это параболоид вращения).

Плоскости корпусов узловых шарниров тыльного пояса, как и узловых шарниров лицевого пояса, расположены в плоскостях, касательных к поверхности вращения. Для определения положения указанных плоскостей необходимо знать значения первых производных в точках, соответствующих центрам узловых шарниров тыльного пояса и

принадлежащих кривой, являющейся образующей для поверхности вращения, которая задается рядом дискретных точек. С поверхностью связывается некоторая цилиндрическая система координат. Затем все точки поверхности тыльного пояса отображаются на полуплоскость, проходящую через ось аппликата (ось вращения поверхности)  $Oz$  и полярную ось  $Or$ . В полученном множестве проводится упорядочение точек с целью исключения повторяющихся, т.е. точек, имеющих одинаковые аппликаты и полярные радиусы, и расположения их в порядке возрастания полярных радиусов. В результате получаем дискретное множество точек  $\mathcal{M} = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r_{k+1} \geq r_k > 0, k \in \mathbb{N} \wedge [1, K_{\mathcal{M}}]\}$ , определяющих положение центров узловых шарниров тыльного пояса для положительных значений полярного радиуса. Множество  $\mathcal{M}$  позволяет численно определить значения первых производных с использованием В-сплайнов [2].

Чтобы уменьшить погрешности определения значений первых производных на концах отрезка аппроксимации, размер этого отрезка выбираем следующим образом. В цилиндрической системе координат полагаем  $r > 0$ . Однако далее, рассматривая систему координат  $Ozr$ , будем считать, что  $r$  может принимать и отрицательные значения. Тогда можно зеркально отобразить множества  $\mathcal{M}$  относительно оси  $Oz$ , т.е. в этом случае дискретный ряд точек будет задан на отрезке  $[-r_{K_{\mathcal{M}}}, +r_{K_{\mathcal{M}}}]$ . Это позволяет более точно определить значения производных в точках, расположенных около начала координат. Далее для повышения точности определения значений первых производных в точках, соответствующих центрам узловых шарниров, расположенных на периферии конструкции рефлектора, вычисление множеств точек  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{B}$ , соответствующих центрам узловых шарниров лицевого и тыльного поясов, проводится для увеличенного значения  $N_0$ . Результаты вычисления показали, что достаточно увеличить это значение на единицу.

Таким образом, зная значения производных во всех точках образующей поверхности вращения, можно определить положения узловых шарниров тыльного пояса с точностью до угла поворота относительно оси, перпендикулярной корпусу узлового шарнира. То же самое относится и к положению узловых шарниров лицевого пояса.

Для определения указанных углов можно поступить следующим образом. Положение осей цилиндрических шарниров в корпусах узловых шарнирах фиксировано, т.е. они располагаются под углом  $60^\circ$  по отношению друг к другу (см. рис. 7). Для обеспечения раскрытия рефлектора оси цилиндрических шарниров двух смежных узловых шарниров, т.е. шарниров, связанных одним складывающимся стержнем, должны быть параллельны. Однако из-за фиксированных значений углов в каждом отдельном узловом шарнире это требование

не выполняется. Тем не менее благодаря податливости складывающихся стержней непараллельность осей цилиндрических шарниров не препятствует полному раскрытию рефлектора. Итак, в развернутом состоянии узловые шарниры могут быть несколько повернуты относительно друг друга. Чтобы определить положение узловых шарниров, будем считать, что сумма квадратов расстояний между точками  $A_{pq}$  и  $A_{rs}$  двух смежных узловых шарниров с центрами  $M_p$  и  $M_r$  для каждого пояса имеет минимальное значение:

$$\Phi[\varphi] = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \sum_{N_{\text{скл.ст}}} | \mathbf{r}_{A_{pq}}(\varphi_p) - \mathbf{r}_{A_{rs}}(\varphi_r) |^2, \quad (6)$$

где  $\varphi = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n\}$ ;  $p, r, \in \mathbb{N} \wedge [1, n]$ ;  $q, s \in \mathbb{N} \wedge [1, 6]$ ;  $N_{\text{скл.ст}}$  — число складывающихся стержней рассматриваемого пояса.

В зависимости (6) для лицевого пояса  $n = N_{\text{уз.л}}$ ,  $N_{\text{скл.ст}} = N_{\text{скл.ст.л}} = 2N_0(6N_1 + 1) - N_1(3N_1 - 1)$ , а для тыльного пояса  $n = N_{\text{уз.т}}$ ,  $N_{\text{скл.ст}} = N_{\text{скл.ст.т}} = N_{\text{скл.ст.л}} - 3(2N_0 + N_1)$ .

Эти условия позволяют определить углы поворота относительно нормали для всех узловых шарниров лицевого и тыльного поясов. Тем самым будет определено положение всех осей цилиндрических шарниров.

Итак, построенная геометрическая модель рефлектора антенны может быть использована для разработки уточненной математической модели рефлектора с учетом экспериментальных данных, а также для исследования раскрытия рефлектора антенны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З а р у б и н В. С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI, заключительный).
2. С т е ч к и н С. Б., С у б б о т и н Ю. Н. Сплаины в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

Статья поступила в редакцию 13.02.2009

Виталий Евгеньевич Мешковский родился в 1946 г., в 1971 г. окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана. Старший преподаватель кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители”, по совместительству зав. отделом СМ1-1 НИИСМ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 37 научных публикаций в области проектирования и динамики раскрывающихся крупногабаритных космических конструкций.

V.Ye. Meshkovskii (b. 1946) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Senior teacher of “Spacecrafts and Rocket Boosters” of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 37 publications in the field of design and dynamics of unwrapping large-sized space constructions.