УДК 519.23

И. В. Павлов

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ ИЗДЕЛИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ИХ ФРАГМЕНТОВ

Предложена вероятностная модель для расчета и прогноза основных характеристик прочности, таких как вероятность выдержки заданной нагрузки, математическое ожидание прочности и др. Получены приближенные асимптотические выражения для случая высокой прочности, когда вероятность отказа (разрыва) является достаточно малой, а также общие условия, при которых имеет место увеличение (уменьшение) относительной дисперсии (коэффициента вариации) прочности ξ_L при увеличении длины образца L. Доказана теорема, в которой дается общая многопараметрическая модель статистического распределения прочности, для которой имеет место увеличение указанной относительной дисперсии. В рамках этой модели задача сводится к точечному и доверительному оцениванию показателей прочности как функций вектора неизвестных параметров по результатам статистических испытаний. Получены неравенства, дающие оценки тренда математического ожидания прочности $M\xi_L$ при увеличении длины образца L. Аналогичные результаты получены для математического ожидания ресурса последовательной системы из n элементов при увеличении "длины системы" (числа элементов), что, в частности, позволяет улучшить известные неравенства Барлоу и Прошана для таких систем. Построена нижняя доверительная граница для надежности (вероятности выдержать заданную нагрузку) образца длины L.

Ключевые слова: Прочность, надежность, вероятностная модель, статистические испытания, доверительные границы.

Постановка задачи. Пусть имеется некоторый протяженный объект из однородного материала постоянного сечения длины L (проволока, брус, трубопровод и т.п.). Объект подвергается действию нагрузки U, в результате чего может наступить отказ объекта (разрыв проволоки, прорыв трубопровода в той или иной точке и т.п.). Значение нагрузки U, при которой происходит отказ объекта длины L, обозначим ξ_L и назовем прочностью данного объекта.

Прочность ξ_L чаще всего является случайной величиной (меняется от одного образца длиной L к другому). Для аппроксимации распределения ξ_L можно использовать различные законы распределения, например часто применяемое для этих целей распределение Вейбулла–Гнеденко [1–3].

Часто возникающая на практике задача состоит в том, что требуется оценить или спрогнозировать те или иные характеристики прочности образца заданной длины L по результатам статистических испытаний на прочность некоторого числа образцов меньшей длины l и т.п.

Модель 1. В качестве первичной модели для оценки характеристик прочности объектов разной длины L рассмотрим следующую вероятностную модель. Пусть x — текущая координата (длина) данного объекта длины L $(0 \leqslant x \leqslant L)$ и z_x — локальная прочность объекта в точке x. Другими словами, z_x — некоторый, вообще говоря, случайный фактор (например, толщина, плотность материала, число микротрещин и т.п.), определяющий локальную прочность данного образца в точке x. Если образец длины L подвергается действию нагрузки U, то разрыв (отказ) данного образца наступает тогда, когда его локальная прочность z_x меньше U хотя бы в одной точке x из отрезка $[0, L]$, т.е. если минимум случайного процесса z_x на отрезке $[0, L]$

$$\xi_L = \min_{0 \leqslant x \leqslant L} z_x < U.$$

После этого в рамках данной модели задача оценки и прогнозирования характеристик прочности по результатам испытаний на прочность образцов длины l сводится к прогнозированию свойств случайного процесса z_x на временных отрезках длины L, где роль времени играет длина x.

В отличие от ряда задач классической математической статистики процесс z_x сам по себе является не наблюдаемым, а наблюдаются лишь некоторые его отдельные характеристики. Например, если образец длины l подвергается действию фиксированной нагрузки U, то мы наблюдаем лишь факт выполнения или не выполнения неравенства

$$\xi_L = \min_{0 \leqslant x \leqslant l} z_x < U$$

в зависимости от наличия или отсутствия разрыва (отказа) данного образца. Если образец длины l подвергается действию нарастающей нагрузки до его разрыва (отказа), то в этом случае мы наблюдаем значение минимума случайного процесса

$$\min_{0 \leqslant x \leqslant l} z_x = \xi_l,$$

где ξ_l — нагрузка, при которой происходит разрыв (отказ) данного образца.

Недостаток приведенной модели — некоторая изначальная жесткость и ограниченность используемых предположений. В частности, в рамках данной модели свойства прочности сводятся к одному фактору — локальной прочности z_x в точке x, в то время как таких факторов в зависимости от физических свойств и технологии производства данного объекта может быть много и, более того, можно даже и не знать точно всего набора этих физических факторов, определяющих прочность.

Модель 2. Рассмотрим далее более общую многомерную модель, свободную от указанных ограничений, в которой будем предполагать, что локальная прочность объекта в точке x определяется набором нескольких факторов:

$$\vec{z}_x = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x))\,.$$

При этом число m указанных факторов (размерность вектора $\vec{z}_x$), вообще говоря, может быть неизвестным, но предполагается конечным. Вектор локальной прочности $\vec{z}_x$ принимает значение из m-мерного "прямоугольника"

$$Z = \{\vec{z} : 0 \leqslant z_j \leqslant A_j < \infty, \quad j = 1, \dots, m\}\,.$$

Предположим, что при каждом возможном значении нагрузки $U > 0$ множество Z разбито на два непересекающихся подмножества: $Z = G_u + W_u$, где W_u назовем областью отказа при данном U. Относительно семейства областей W_u, $U > 0$, предполагается, что выполняется следующее условие: $W_u \subset W_v$ при $U \leqslant v$. Другими словами, область отказа W_u монотонно расширяется при увеличении нагрузки U. Область G_u назовем областью безопасности или ядром процесса $\vec{z}_x$ при данном значении нагрузки U.

Аналогично предыдущей упрощенной модели 1 считаем, что отказ (разрыв) образца длины L при нагрузке U наступает, если процесс $\vec{z}_x$ (вектор локальной прочности) попадает в область отказа W_u хотя бы при одном значении x из отрезка $[0, L]$. Соответственно данный образец выдерживает нагрузку U, если процесс $\vec{z}_x$ не выходит из области безопасности: $\vec{z}_x \in G_u$ при всех $0 \leqslant x \leqslant L$. Очевидно, что в рассмотренной выше упрощенной одномерной модели 1 области отказов имеют вид отрезков $W_u = [0, U]$. В более общей многомерной модели 2 вид областей отказа (W_u) и безопасности (G_u) не столь очевиден и, более того, может быть не известен, также как могут быть точно не известны как число, так и вид полного набора всех физических параметров $\vec{z}_x = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x))$, определяющих прочность данного объекта. Указанные неизвестные факторы, естественно, могут быть различными для объектов разных типов. Тем не менее на основе рассматриваемой модели независимо от указанных неизвестных факторов можно получить ряд существенных выводов, в частности предлагаемые далее асимптотические (для случая высокой надежности) выводы и методы экспериментальной оценки прочности по результатам испытаний. Отметим также, что рассматриваемая здесь проблема оценки прочности объектов по результатам испытаний их фрагментов во многом аналогична задаче оценки надежности системы по результатам испытаний ее отдельных элементов (см., например, [1, 4–10, 14]), что позволяет, в частности, использовать некоторые уже известные результаты и подходы для решения указанной проблемы.

Отметим, что в отличие от указанной задачи оценки надежности технических систем, где различные элементы системы чаще всего предполагаются независимыми, в проблеме прочности из физических соображений ясно, что значения процесса $\vec{z}_x$ в разных (по крайней мере, близких) фрагментах данного объекта должны быть зависимыми.

Дискретная модель. В рамках рассматриваемой выше общей многомерной модели 2 сделаем некоторые дополнительные уточняющие предположения относительно процесса $\vec{z}_x$. Далее будем считать, что "временной параметр" x принимает дискретные значение с шагом h, т.е. $x = x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где константа $h > 0$ может быть сколь угодно малой. Аналогично на множестве Z возможных значений процесса $\vec{z}_x$ зададим конечную сетку $Z' \subset Z$ дискретных значений m-мерного вектора $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_m)$:

$$Z' = \{\vec{z} : z_i = n\Delta, n = 0, 1, ..., N_i, i = 1, ..., m\},$$

где $N_i\Delta = A_i$, $i = 1, \ldots, m$, и будем считать, что процесс $\vec{z}_x$ принимает дискретные значения из Z' (константа Δ также может быть выбрана сколь угодно малой).

Предположим, что $\vec{z}_x$ — стационарный марковский процесс, переходную функцию которого обозначим через $\pi(u, v)$ — вероятность перехода за один шаг (длины h) из состояния $u \in Z'$ в состояние $v \in Z'$, т.е. процесс $\vec{z}_x$ образует однородную марковскую цепь с дискретным временем и конечным множеством состояний Z'. Предположим также, что любое состояние $z \in Z'$ достижимо из любого другого состояния $y \in Z'$. Тем самым, отсутствуют поглощающие состояния (или поглощающие подмножества состояний), т.е. с учетом конечности множества состояний Z' марковская цепь $\vec{z}_x$ является эргодической. Это условие эргодичности является довольно естественным с физической точки зрения ограничением на процесс локальной прочности $\vec{z}_x$. Действительно, противное означало бы, например, наличие поглощающих состояний $y \in Z'$, что, в свою очередь, означает, что, начиная с некоторого x^*, процесс $\vec{z}_x$ принимает некоторое фиксированное детерминированное значение y при всех $x \geqslant x^*$. Другими словами, физические параметры объекта, определяющие его прочность (например, толщина), остаются абсолютно неизменными по всей его длине (т.е. прочность объекта не зависит от его длины), что физически маловероятно для реальных объектов.

Отметим, что если в упрощенной одномерной модели 1 прочность образца длины L определяется через локальную прочность z_x непосредственно как

$$\xi_L = \min_{0 \leqslant x \leqslant L} z_x,$$

то в многомерной модели 2 прочность ξ_L определяется следующим образом:

$$\xi_L = \max\{U : \vec{z_x} \in G_U \text{ при всех } \quad 0 \leqslant x \leqslant L\}.$$

При данном фиксированном значении нагрузки U введем величину

$$\upsilon_U = \min\{x : \vec{z}_x \notin G_U\}$$

— “момент” первого выхода процесса $\vec{z}_x$ из области безопасности G_U в область отказа W_U (предполагая, что, по крайней мере, в начальный “момент” времени $x = 0$ отказа еще нет, т.е. $\vec{z}_0 \in G_U$). Здесь и далее удобно использовать для случайного процесса $\vec{z_x}$, $x \geqslant 0$, наряду с терминологией для исходной проблемы прочности (где x — текущая координата длины), также и временну́ю терминологию, понимая под x время. В исходной терминологии прочности величина υ_U — длина, на которой впервые происходит отказ (разрыв) при данной фиксированной нагрузке U.

Непосредственно из определения указанных величин видно, что при фиксированном значении нагрузки U следующие два события эквивалентны:

$$\{\upsilon_U > L\} = \{\xi_L > U\}\,. \tag{1}$$

Тем самым задача оценки функции надежности случайной величины прочности ξ_L

$$P_L\,(U) = P\{\xi_L > U\}, \tag{2}$$

(т.е. вероятности выдержать нагрузку U для образца “длины L”) сводится к задаче нахождения распределения случайного времени υ_U до выхода процесса $\vec{z}_x$ из области безопасности G_U. Для решения этой задачи могут быть использованы известные асимптотические результаты [11] для случая, когда выход из области безопасности (ядра) G_U процесса $\vec{z}_x$ является редким событием, или (в терминах проблемы прочности) для случая высокой прочности, когда вероятность событий (1) и (2) близка к 1.

При фиксированном значении нагрузки U для каждого состояния z из области безопасности G_U введем величину

$$\varepsilon_z = \sum_{y \in W_U} \pi(z, y),$$

которая имеет смысл вероятности попадания (за один шаг) из состояния $z \in G_U$ в область отказа W_U. Величину ε_z назовем вероятностью выхода из области безопасности G_U процесса в область отказа W_U за один шаг из состояния $z \in G_U$.

Рассмотрим ситуацию, когда нагрузка U еще не слишком велика (для образца длины L) и процесс $\vec{z_x}$ в основном находится в области безопасности (для данной нагрузки) G_U и достаточно редко попадает в область отказа W_U, т.е. нарушения или аномальные значения локальной прочности $\vec{z_x}$ встречаются достаточно редко. С формальной точки зрения этой ситуации соответствует случай, когда указанные выше вероятности ε_z выхода из области безопасности G_U в область отказа W_U (за один шаг) малы.

Обозначим через $N_z(L)$ — число попаданий процесса $\vec{z_x}$ в состояние $z \in Z'$ на интервале времени (длины) $[0, L]$. В силу эргодичности процесса $\vec{z_x}$ имеет место сходимость почти наверное при $L \to \infty$ (независимо от начального состояния процесса):

$$\frac{N_z(L)}{L} \quad \xrightarrow{\text{п.н.}} \quad \lambda_z,$$

где величина λ_z имеет смысл среднего числа попаданий процесса в состояние z за единицу времени (длины) L. Величину λ_z естественно назвать интенсивностью попаданий процесса в состояние z.

Нетрудно видеть, что интенсивности λ_z связаны со стационарным распределением вероятностей p_z, $z \in Z'$, процесса $\vec{z_x}$ как $\lambda_z = p_z/h$, где h — шаг разбиения оси L указанной выше сеткой. Выбирая h в качестве единицы длины, формально можно считать, что величины λ_z и p_z численно совпадают, хотя и имеют разную размерность.

При фиксированном значении нагрузки U введем величину

$$\Lambda(U) = \sum_{z \in G_U} \lambda_z \cdot \varepsilon_z, \tag{3}$$

которую назовем интенсивностью выхода процесса $\vec{z_x}$ из области безопасности G_U в область отказа W_U.

Асимптотические оценки для распределения случайной величины v_U и соответственно для прочности ξ_L далее могут быть получены на основе теоремы из работы [11]:

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon_z \to 0$, $z \in G_U$. *Тогда*

$$P\left\{\Lambda(U) \cdot v_U > y\right\} \to e^{-y}$$

для любого $y > 0$.

Из теоремы 1 с учетом (1) следует приближенное асимптотическое выражение для распределения прочности ξ_L, другими словами, для вероятности того, что образец длины L выдержит нагрузку U:

$$P\{\xi_L > U\} = P\{\nu_U > L\} = P\{\Lambda(U)\nu_U > \Lambda(U) \cdot L\} \cong e^{-L\Lambda(U)}. \tag{4}$$

В соответствии с теоремой 1 эта приближенная формула справедлива для случая высокой прочности, когда вероятность (4) достаточно близка к 1. Отметим, что именно эта ситуация чаще всего представляет основной интерес с практической точки зрения, когда требуется подтвердить высокую прочность (т.е. достаточно высокую вероятность (4)) того или иного образца под действием гипотетической нагрузки U. В противном случае, когда речь идет о низкой прочности (когда вероятность (4), грубо говоря, меньше 0,9), особенно высокой точности оценки этой вероятности и не требуется.

При фиксированном уровне нагрузки U выражение (4) с учетом (1) может быть записано в виде

$$P\{\nu_U > L\} \cong e^{-L\Lambda(U)},$$

что дает приближенно экспоненциальное распределение с параметром $\Lambda(U)$ для случайной величины υ_U — момента (длины) разрушения при нагрузке U.

С другой стороны, при фиксированной длине L формула (4) дает приближенное выражение для распределения прочности ξ_L образца длины L. И в этом случае распределение (4) уже не является экспоненциальным и определяется, грубо говоря, видом и скоростью роста функции $\Lambda(U)$, которая в этом случае имеет смысл функции ресурса (с точностью до множителя L) для случайной величины — прочности ξ_L. Из физических соображений и смысла функции $\Lambda(U)$ в выражении (3) ясно, что эта функция должна достаточно быстро возрастать с ростом нагрузки U. Другими словами, распределение (4), скорее всего, должно принадлежать к классу ВФИ-распределений [1, 2] с возрастающей функцией интенсивности отказов $\lambda(U) = L \cdot \Lambda'(U)$. Точный вид функции $\Lambda(U)$ с учетом ее смысла в (3) довольно сложно найти аналитически, и ее можно определить лишь экспериментально на основе результатов испытаний.

Выбор распределения прочности $\boldsymbol{\xi}_L$ по результатам испытаний. Тот или иной достаточно достоверный выбор между различными семействами распределений (Вейбулла–Гнеденко, нормальным, логнормальным и т.д.) для случайной величины — прочности ξ_L на основе экспериментальных данных во многих случаях затруднителен, так как требует большого объема наблюдений (см., например, [1, 12–15]). Поэтому при выборе закона распределения для прочности необходимо опираться на те свойства распределения ξ_L, которые могут быть установлены на основе результатов испытаний достаточно достоверно, в частности на свойства математического ожидания прочности $M\xi_L$ и ее дисперсии $D\xi_L$, которые можно получить с использованием соответствующих эмпирических характеристик — выборочного среднего и выборочной дисперсии для ξ_L, найденных на основе испытаний образцов различной длины L.

Например, если средняя прочность образца длины L, т.е. математическое ожидание

$$\mu_L = M\xi_L \tag{5}$$

убывает с ростом L медленнее, чем $1/L$ (или, наоборот, быстрее), то этот факт должен адекватным образом учитываться в модели при выборе статистического распределения прочности. Аналогично, если коэффициент вариации прочности

$$K_L = \sqrt{D\xi_L}/M\xi_L \tag{6}$$

возрастает (или, наоборот, убывает) при увеличении длины L испытываемого образца, то этот факт также должен адекватным образом учитываться при выборе модели.

Установим, каким условиям должно удовлетворять распределение прочности (4), другими словами, функция надежности случайной величины ξ_L

$$P_L(U) \cong e^{-L\Lambda(U)}, \tag{7}$$

чтобы выполнялись указанные выше свойства для основных средних характеристик — математического ожидания прочности (5) и коэффициента вариации (6).

Отметим, что эта проблема близка по смыслу к аналогичной для системы с последовательной структурой из m однотипных элементов. При этом роль прочности ξ_L образца длины L играет случайное время работы (наработка) до отказа системы из $m = L/l$ элементов (где l — единица длины в проблеме прочности), аналогом нагрузки U является время; $P_l(U)$ — функция надежности одного элемента; $P_L(U)$ — функция надежности системы из m элементов; μ_l — среднее время безотказной работы одного элемента; μ_L — среднее время безотказной работы системы из m элементов; K_L — коэффициент вариации времени безотказной работы системы из m элементов. В этом случае задача формулируется так: каким должно быть распределение времени безотказной работы одного элемента, чтобы математическое ожидание и коэффициент вариации времени безотказной работы системы удовлетворяли указанным свойствам при увеличении числа элементов системы m.

Выберем некоторую единицу длины l, полагая $l = 1$, и обозначим
$$P_1(U) = e^{-\Lambda(U)}. \tag{8}$$
Следующие далее теоремы 2 и 3 показывают, при каких условиях на распределение (8) прочности выполняются те или иные указанные выше свойства распределения $P_L(U)$ при увеличении длины образца L. Введем основные характеристики распределения $P_L(U)$:
$$\mu_L = M\xi_L = \int\limits_0^\infty P_L(U)dU;$$
$$\mu_L^{(2)} = M\xi_L^2 = 2\int\limits_0^\infty UP_L(U)dU;$$
$$\sigma_L^2 = \mu_L^{(2)} - \mu_L^2;$$
$$K_L = \frac{\sigma_L}{\mu_L},$$
— соответственно первый и второй моменты, дисперсия и коэффициент вариации случайной величины ξ_L — прочности образца длины L. Функция $\Lambda(U)$ имеет смысл функции ресурса для распределения прочности образца единичной длины (8). Обозначим
$$\lambda(U) = \Lambda'(U)$$
"функцию интенсивности отказов" [1, 2] для распределения (8). Далее будем предполагать, что $\lambda(U)$ непрерывна по $U > 0$.

Теорема 2. *Пусть функция*
$$\frac{\lambda(aU)}{\lambda(U)} \tag{9}$$
монотонно возрастает по $U > 0$ при любом фиксированном $a > 1$. Тогда коэффициент вариации K_L монотонно возрастает по $L \geqslant 1$. При этом если функция (9) строго возрастающая по $U > 0$, то коэффициент вариации K_L также строго возрастает по $L \geqslant 1$.

Если, кроме того, функция $\lambda(U)$ непрерывна по $U \geqslant 0$ и $\lambda(0) > 0$, то
$$\mu_L \geqslant \frac{V}{L}\mu_V \tag{10}$$
при $L > V \geqslant 1$ и, в частности,
$$\mu_L \geqslant \frac{\mu_1}{L}. \tag{11}$$
При этом, если функция (9) строго возрастающая по $U > 0$, неравенства (10) и (11) также строгие.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть имеются две различные функции надежности*

$$P_1(t) = e^{-\Lambda_1(t)}, \quad P_2(t) = e^{-\Lambda_2(t)}$$

с одинаковым средним

$$\int_0^\infty P_1(t)dt = \int_0^\infty P_2(t)dt \tag{12}$$

и такие, что их функции ресурса $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ *удовлетворяют условию*: *отношение*

$$\frac{\Lambda_2'(t)}{\Lambda_1'(t)} \tag{13}$$

монотонно строго возрастает по $t > 0$. *Тогда для любой монотонно строго возрастающей положительной функции* $g(t)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty g(t)P_1(t)dt > \int_0^\infty g(t)P_2(t)dt.$$

Доказательство леммы 1. В силу условия (12) функции $P_1(t)$, $P_2(t)$, а следовательно, и функции ресурса $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ должны пересекаться, по крайней мере, в одной точке $t^* > 0$ (кроме точки $t = 0$, где всегда $\Lambda_1(0) = \Lambda_2(0) = 0$). Из условия монотонного строгого возрастания функции (13) следует, что функция $\Lambda_2(t)$ пересекает функцию $\Lambda_1(t)$ один раз (кроме точки $t = 0$) снизу вверх в некоторой точке $t^* > 0$. Тем самым функция $P_2(t)$ также пересекает $P_1(t)$ один раз (кроме точки $t = 0$) сверху вниз в точке $t^* > 0$. Отсюда с учетом (12) следуют неравенства:

$$\int_0^\infty g(t)\left[P_1(t) - P_2(t)\right]dt = \int_0^\infty \left[g(t) - g(t^*)\right]\left[P_1(t) - P_2(t)\right]dt =$$

$$= \int_0^{t*} \left[g(t) - g(t^*)\right]\left[P_1(t) - P_2(t)\right]dt +$$

$$+ \int_{t*}^\infty \left[g(t) - g(t^*)\right]\left[P_1(t) - P_2(t)\right]dt > 0. \tag{14}$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку в двух последних интегралах подынтегральные выражения всюду (кроме точки t^*) строго положительны. Из неравенства (14) следует доказательство леммы 1.

Отметим, что если $P_1(t)$ — экспоненциальное распределение, а $P_2(t)$ — распределение с возрастающей функцией интенсивности отказов $\lambda_2(t) = \Lambda_2'(t)$, другими словами, функция $\Lambda_1(t)$ — линейная, а функция $\Lambda_2(t)$ — выпуклая, то в этом частном случае лемма 1 совпадает с аналогичным неравенством, полученным Барлоу и Прошаном [3, с. 54].

Обратимся к доказательству теоремы 2. Пусть ξ_V и ξ_L — две случайные величины, имеющие функции надежности

$$P_V(U) = e^{-V\Lambda(U)}, \quad P_L(U) = e^{-L\Lambda(U)} \tag{15}$$

и математические ожидания

$$\mu_V = \int_0^\infty P_V(U)dU, \quad \mu_L = \int_0^\infty P_L(U)dU.$$

Введем нормированные случайные величины

$$\tilde{\xi}_V = \frac{\mu_1}{\mu_V}\xi_V, \quad \tilde{\xi}_L = \frac{\mu_1}{\mu_L}\xi_L. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что математические ожидания этих случайных величин одинаковы:

$$M\tilde{\xi}_V = M\tilde{\xi}_L = M\xi_1 = \mu_1.$$

В то же время их коэффициенты вариации при указанной нормировке (16) остаются фиксированными:

$$K(\tilde{\xi}_V) = K(\xi_V) = K_V,$$
$$K(\tilde{\xi}_L) = K(\xi_L) = K_L.$$

Функции надежности указанных нормированных случайных величин имеют вид

$$\tilde{P}_V(U) = P\left\{\tilde{\xi}_V > U\right\} = P\left\{\frac{\mu_1}{\mu_V}\cdot\xi_V > U\right\} = P_V\left(\frac{\mu_V}{\mu_1}U\right),$$
$$\tilde{P}_L(U) = P\left\{\tilde{\xi}_L > U\right\} = P\left\{\frac{\mu_1}{\mu_L}\cdot\xi_L > U\right\} = P_L\left(\frac{\mu_L}{\mu_1}U\right).$$

Соответствующие функции ресурса для этих случайных величин с учетом (15) имеют вид

$$\tilde{\Lambda}_V(U) = -\ln\tilde{P}_V(U) = V\Lambda\left(\frac{\mu_V}{\mu_1}U\right),$$
$$\tilde{\Lambda}_L(U) = -\ln\tilde{P}_L(U) = L\Lambda\left(\frac{\mu_L}{\mu_1}U\right).$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\tilde{\Lambda}'_V(U)}{\tilde{\Lambda}'_L(U)} = \frac{V\mu_V\Lambda'\left(\dfrac{\mu_V}{\mu_1}U\right)}{L\mu_L\Lambda'\left(\dfrac{\mu_L}{\mu_1}U\right)} =$$

$$= \frac{V\mu_V}{L\mu_L}\cdot\frac{\lambda\dfrac{\mu_V}{\mu_1}U}{\lambda\left(\dfrac{\mu_L}{\mu_1}U\right)} = \frac{V\mu_V}{L\mu_L}\cdot\frac{\lambda\dfrac{\mu_V}{\mu_L}y}{\lambda\,(y)}, \quad (17)$$

где $y = \dfrac{\mu_L}{\mu_1}U$. Величина $a = \dfrac{\mu_V}{\mu_L} > 1$, откуда следует, что в условиях теоремы отношение (17) монотонно строго возрастает по $U > 0$. Далее, полагая в лемме 1 $g(t) = t$, $P_1(t) = \tilde{P}_L(t)$, $P_2(t) = \tilde{P}_V(t)$, получаем

$$K_L > K_V \quad \text{при} \quad L > V \geqslant 1,$$

что доказывает первое утверждение теоремы относительно коэффициента вариации. Отметим далее, что поскольку нормированные случайные величины $\tilde{\xi}_V$ и $\tilde{\xi}_L$ имеют одинаковые средние значения, то соответствующие функции ресурса $\tilde{\Lambda}_V(U)$ и $\tilde{\Lambda}_L(U)$ должны пересекаться, по крайней мере, в одной точке $U^* > 0$. Если функция $\lambda(U)$ непрерывна по $U \geqslant 0$ и значение $\lambda(0) > 0$, то с учетом монотонного возрастания функции (17) отсюда следует, что

$$\frac{\tilde{\Lambda}'_V(0)}{\tilde{\Lambda}'_L(0)} = \frac{V\mu_V}{L\mu_L} < 1,$$

что доказывает второе утверждение теоремы.

Доказательство следующей теоремы аналогично предыдущей с точностью до замены соответствующих знаков на обратные.

Теорема 3. *Пусть функция*

$$\frac{\lambda(aU)}{\lambda(U)} \quad (18)$$

монотонно убывает по $U > 0$ *при любом фиксированном* $a > 1$. *Тогда коэффициент вариации* K_L *монотонно убывает по* $L \geqslant 1$. *При этом если функция* (18) *строго убывающая по* $U > 0$, *то коэффициент вариации* K_L *также строго убывает по* $L \geqslant 1$.

Если, кроме того, функция $\lambda(U)$ *непрерывна по* $U \geqslant 0$ *и* $\lambda(0) > 0$, *то*

$$\mu_L \leqslant \frac{V}{L}\mu_V \quad (19)$$

при $L > V \geqslant 1$ *и, в частности,*

$$\mu_L \leqslant \frac{\mu_1}{L}. \quad (20)$$

При этом, если функция (18) *строго возрастающая по* $U > 0$ *неравенства* (19) *и* (20) *также строгие.*

Функцию вида (9), где константа $a > 1$, далее будем называть ведущей функцией. Рассмотрим некоторые частные случаи и следствия из теорем 2, 3. Нетрудно видеть, что стандартное распределение Вейбулла–Гнеденко $P(t) = e^{-\lambda U^{\alpha}}$ имеет ведущую функцию $\dfrac{\lambda(aU)}{\lambda(U)} \equiv a^{\alpha-1}$. Таким образом, для него коэффициент вариации K_L остается постоянным при увеличении L (в чем нетрудно убедиться непосредственно из выражения для коэффициента вариации этого распределения). Второе условие теорем 2, 3 для этого распределения не выполняется (кроме случая $\alpha = 1$, соответствующего экспоненциальному распределению), так как при $\alpha > 1$ $\lambda(0) = 0$, а при $\alpha < 1$ функция $\lambda(U)$ не удовлетворяет условию непрерывности в точке $U = 0$.

Теорема 4. *Пусть функция интенсивности отказов* $\lambda(U)$ — *многочлен степени* n *с положительными коэффициентами*:

$$\lambda(U) = C_0 + C_1 U + C_2 U^2 + \ldots + C_n U^n, \tag{21}$$

где все коэффициенты $C_i \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *и, по крайней мере, два из них отличны от нуля. Тогда при* $a > 1$ *ее ведущая функция* $\dfrac{\lambda(aU)}{\lambda(U)}$ *монотонно строго возрастает по* $U > 0$.

Доказательство. Для доказательства сформулируем леммы 2 и 3.

Лемма 2. *Пусть имеются две функции* $\lambda_1(U)$, $\lambda_2(U)$ *с монотонно возрастающими ведущими функциями* $\dfrac{\lambda_1(aU)}{\lambda_1(U)}$, $\dfrac{\lambda_2(aU)}{\lambda_2(U)}$ (*при* $a > 1$) *и, по крайней мере, одна из этих ведущих функций строго возрастающая. Тогда функция* $\lambda(U) = \lambda_1(U)\lambda_2(U)$ *также имеет монотонно строго возрастающую ведущую функцию* $\dfrac{\lambda(aU)}{\lambda(U)}$.

Доказательство этой леммы очевидно.

Лемма 3. *Пусть функция* $\lambda(U)$ *имеет монотонно строго возрастающую ведущую функцию* $\dfrac{\lambda(aU)}{\lambda(U)}$ (*при* $a > 1$) *и, кроме того, функция* $\lambda(U)$ *выпукла вниз и имеет непрерывную первую производную* $\lambda'(U)$ *на* $[0, \infty)$. *Тогда для любой константы* $C \geqslant 0$ *функция*

$$\tilde{\lambda}(U) = C + \lambda(U)$$

также имеет монотонно строго возрастающую ведущую функцию $\dfrac{\tilde{\lambda}(aU)}{\tilde{\lambda}(U)}$ (*при* $a > 1$).

Доказательство. Вычисляя производную ведущей функции $\dfrac{\lambda(aU)}{\lambda(U)}$

из первого условия, получаем неравенство

$$a\lambda'(aU)\lambda(U) - \lambda'(U)\lambda(aU) > 0. \tag{22}$$

Вычисляя затем производную для ведущей функции $\dfrac{\tilde{\lambda}(aU)}{\tilde{\lambda}(U)}$, получаем

$$\left[\frac{\tilde{\lambda}(aU)}{\tilde{\lambda}(U)}\right]' = \left[\frac{C+\lambda(aU)}{C+\lambda(U)}\right]' = \frac{g_1(U)+g_2(u)}{[C+\lambda(U)]^2},$$

где

$$g_1(U) = a\lambda'(aU)\lambda(U) - \lambda'(U)\lambda(aU); \quad g_2(U) = C\left[a\lambda'(aU) - \lambda'(U)\right].$$

Первое слагаемое в числителе $g_1(U) > 0$ в силу неравенства (22). Второе слагаемое $g_2(U) > 0$ в силу выпуклости $\lambda(U)$ и, тем самым, монотонного возрастания первой производной $\lambda'(U)$, что доказывает лемму 3.

Обратимся к доказательству теоремы 4. Легко показать, что многочлен вида (21) степени $n = 1$

$$\lambda(U) = C_0 + C_1 U$$

удовлетворяет теореме, т.е. имеет монотонно строго возрастающую функцию (при $C_0 > 0$ и $C_1 > 0$). Далее теорема может быть легко доказана по индукции на основании лемм 2 и 3. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором n. Тогда при $n+1$ выражение (21) может быть представлено в виде

$$\lambda(U) = C_0 + C_1U + C_2U^2 + \ldots + C_{n+1}U^{n+1},$$

после чего теорема 4 следует из лемм 2 и 3.

Теорема 5. *Пусть функция интенсивности отказов $\lambda(U)$ — многочлен с положительными коэффициентами вида*

$$\lambda(U) = C_mU^m + U(C_1 + C_2U + \cdots + C_{n+1}U^n), \tag{23}$$

где все коэффициенты $C_i \geqslant 0$, $i = m, \ldots, n$; первый коэффициент $C_m > 0$ и хотя бы один из коэффициентов $C_{m+1}, \ldots, C_n$ отличен от нуля. Тогда при возрастании длины L математическое ожидание прочности μ_L удовлетворяет неравенству:

$$\mu_L > \left(\frac{V}{L}\right)^{\frac{1}{m+1}} \mu_V, \tag{24}$$

где $L > V \geqslant 1$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 4 функция интенсивности отказов вида (23) имеет монотонно строго возрастающую ведущую функцию (9) и, таким образом, удовлетворяет первому условию теоремы 2. Далее так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что при $L > V \geqslant 1$ отношение (17) должно монотонно строго возрастать по $U > 0$, а функции $\tilde{\Lambda}_V(U)$ и $\tilde{\Lambda}_L(U)$ должны пересекаться, по крайней мере, в одной точке $U^* > 0$. Тогда

$$\lim_{U\to 0}\left(\frac{V\mu_V}{L\mu_L}\right)\frac{\lambda\left(\frac{\mu_V}{\mu_1}U\right)}{\lambda\left(\frac{\mu_L}{\mu_1}U\right)} < 1,$$

откуда следует (24).

Оценка (24), в частности, позволяет улучшить известную оценку Барлоу и Прошана [2] для среднего времени безотказной работы последовательной системы из ВФИ-элементов (с возрастающей функцией интенсивности отказов). Пусть имеется последовательная система из n независимых однотипных элементов с функцией интенсивности отказов вида (23) (где U имеет смысл времени). Поскольку функция (23) монотонно возрастает, то в соответствии с оценкой Барлоу и Прошана [2, с. 56] среднее время безотказной работы системы μ_n из n элементов удовлетворяет неравенству

$$\mu_n > \frac{\mu_1}{n},$$

где μ_1 — время безотказной работы одного элемента. В то же время неравенство (24) дает в этом случае

$$\mu_n > \frac{\mu_1}{n^{\frac{1}{m+1}}}.$$

Отметим, что не любое ВФИ-распределение (с возрастающей функцией интенсивности отказов) удовлетворяет условию возрастания ведущей функции (9). В частности, примером такого ВФИ-распределения является распределение Эрланга с плотностью вида

$$f(U) = CU^{n-1}e^{-\lambda U},$$

где C — нормирующая константа; λ — параметр. Для этого распределения функция интенсивности отказов имеет вид

$$\lambda(U) = \frac{\lambda^n U^{n-1}}{C_0 + C_1(\lambda U) + \ldots + C_{n-1}(\lambda U)^{n-1}},$$

где $C_0, \ldots, C_{n-1}$ — положительные коэффициенты (см., например, [15]). Эта функция монотонно возрастает по U, но ее ведущая функция

$$\frac{\lambda(aU)}{\lambda(U)} = \frac{C_0 + C_1(\lambda U) + \ldots + C_{n-1}(\lambda U)^{n-1}}{C_0 + C_1(a\lambda U) + \ldots + C_{n-1}(a\lambda U)^{n-1}}a^{n-1}$$

убывает по U при $a > 1$ (что следует, например, из теоремы 4).

Таким образом, если опытные данные показывают рост относительной дисперсии (коэффициента вариации) прочности ξ_L при увеличении параметра длины L, то для построения адекватной модели естественно выбирать статистическое распределение прочности $P_L(U)$ с функцией интенсивности отказов вида (21) или (23). При этом неизвестные параметры — коэффициенты $C_0, C_1, \ldots, C_n$ далее могут оцениваться по результатам испытаний на прочность на основе известных методов математической статистики, например методом максимального правдоподобия.

Более сложной задачей является доверительное оценивание или прогноз (с заданной достоверностью γ) основных показателей прочности по результатам испытаний на прочность образцов различной длины L. Данная проблема требует отдельного рассмотрения для различных схем испытаний на прочность – с наличием или без цензурирования и т.п. В качестве начального приближения ниже дается простое приближенное решение этой задачи, основанное на приведенной выше асимптотической теореме 1 и на физическом смысле величины $\Lambda(U)$ в (3).

Вычисление нижней доверительной границы для вероятности выдержать заданную нагрузку по результатам испытаний на прочность. Предположим, что N однотипных образцов одинаковой длины l испытываются на прочность при данной фиксированной нагрузке U^*, в результате чего наблюдается $d(U^*)$ отказов (разрывов). Требуется построить нижнюю доверительную границу (с заданным коэффициентом доверия γ) для функции надежности $P_L(U^*)$ или, другими словами, для вероятности того, что образец длины $L \geqslant l$ выдержит данную нагрузку U^*.

В условиях теоремы 1 (т.е. в асимптотике для случая высокой прочности, когда функция надежности $P_L(U)$ близка к 1), учитывая также смысл величины $\Lambda(U)$ в (3), получаем, что указанная схема испытаний эквивалентна наблюдению N приближенно независимых пуассоновских потоков отказов на интервале времени $[0, l]$ с интенсивностью

$$\lambda = \Lambda(U^*). \tag{25}$$

При этом предполагается, что значение процесса локальной прочности $\vec{z}_x$ в различных испытываемых образцах и соответственно отказы различных образцов могут считаться приближенно независимыми в указанной выше асимптотике, когда выход процесса $\vec{z}_x$ из области безопасности G_U в область отказа W_U является редким событием. Условие применимости указанной асимптотики в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{\lambda} \gg l,$$

другими словами, средний интервал между отказами много больше длины l испытываемых образцов, или

$$d(U^*) \ll N,$$

т.е. наблюдаемое число отказов много меньше числа испытываемых образцов. В этих допущениях рассматриваемая схема испытаний эквивалентна плану испытаний типа [N B T] (в обозначениях [1]), т.е. наблюдаются N приближенно независимых пуассоновских потоков отказов с неизвестной интенсивностью λ, которая и подлежит определению по результатам испытаний $d(U^*)$. Исходя из этого, получаем верхнюю γ-доверительную границу для величины (25) (см., например, [1, гл. 3]):

$$\bar{\lambda}_\gamma = \frac{\bar{\Lambda}_\gamma[d(U^*)]}{Nl} = \frac{\chi^2_\gamma[2d(U^*)+2]}{2Nl}, \tag{26}$$

где $\bar{\Lambda}_\gamma(d)$ — стандартная верхняя γ-доверительная граница пуассоновского закона распределения; $\chi^2_\gamma(m)$ — квантиль уровня γ для χ^2-распределения с m степенями свободы [1, § 3.4; 15, гл. 3]. Величина Nl при этом имеет смысл суммарной наработки, наблюдаемой при испытаниях. В соответствии с (26) нижняя γ-доверительная граница для величины $P_L(U^*)$ — вероятности того, что образец длины L выдержит нагрузку U^*, имеет вид

$$P = \exp\left\{-\frac{\chi^2_\gamma\,[2d(u^*)+2]\,L}{2Nl}\right\}.$$

В заключении отметим, что важным направлением дальнейших исследований является как построение более общих вероятностных моделей прочности, так и эффективных методов точечного и доверительного оценивания основных показателей прочности по экспериментальным данным. В частности, представляет значительный интерес построение эффективных методов точечного и доверительного оценивания и прогноза основных характеристик на основе рассмотренной выше общей многопараметрической модели вида (21).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-08-50133а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г н е д е н к о Б. В., Б е л я е в Ю. К., С о л о в ь е в А. Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Б а р л о у Р., П р о ш а н Ф. Математическая теория надежности. – М.: Радио и связь, 1969. – 488 с.
3. W e i b u l l W. A statistical distribution function of wide applicability // J. Appl. Mech. – 1951. – No. 3. – P. 293–297.

4. Б е л я е в Ю. К. Доверительные интервалы для функций от многих неизвестных параметров // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 196. – № 4. – С. 755–758.
5. П а в л о в И. В. Статистические методы оценки надежности сложных систем. – М.: Радио и связь, 1982. – 168 с.
6. П а в л о в И. В. Последовательные доверительные интервалы и множества // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270. – № 2. – С. 282–285.
7. П а в л о в И. В. Последовательная процедура принятия решений при статистических испытаниях сложных систем // Кибернетика и вычислительная техника (под ред. В.А. Мельникова). – 1987. – Вып. 3. – С. 111–121.
8. П а в л о в И. В. Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1988. – № 3. – С. 109–116.
9. P a v l o v I. V., T e s k i n O. I., U k o l o v S. N. A comparison of some exact and approximate methods for calculating confidence bounds for system reliability based on component test data // Proc. of the first intern. conf., MMR'97, Bucharest, Romania – Sept., 1997. – P. 231–236.
10. P a v l o v I. V., T e s k i n O. I., G o r y a i n o v V. B., U k o l o v S. N. Confidence bounds for system reliability based on binomial components test data // Proc. of the second intern. conf., MMR'2000, Bordeaux, France. – Jul., 2000. – P. 852–855.
11. П а в л о в И. В., У ш а к о в И. А. Асимптотическое распределение времени до выхода ядра полумарковского процесса // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – № 5. – С. 97–101.
12. П а в л о в И. В. Последовательная процедура принятия решений для случая сложных гипотез // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – № 2. – С. 293–304.
13. П а в л о в И. В. Нижняя граница средней длины обучающей выборки для последовательных процедур распознавания образов // Тр. Матем. ин-та РАН им. В.А. Стеклова. – 1993. – Т. 202. – С. 234–245.
14. G n e d e n k o B. V., P a v l o v I. V., U s h a k o v I. A. Statistical reliability engineering. – N.Y.: John Wiley, 1999. – 514 p.
15. Г о р я и н о в В. Б., П а в л о в И. В., Т е с к и н О. И., Ц в е т к о в а Г. М. Математическая статистика (сер. Математика в техническом университете; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко, Т. 17). – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2002. – 424 с.

Статья поступила в редакцию 28.01.2009

Игорь Валерианович Павлов родился в 1945 г. окончил в 1968 г. Московский физико-технический институт. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 80 научных работ в области теории вероятностей, математической статистики и теории надежности.

I.V. Pavlov (b. 1945) graduated from the Moscow Physics and Technology Institute in 1968. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 80 publications in the field of theory of probabilities, mathematical statistics and reliability theory.