

В. Ф. Смирнов, Б. П. Назаренко

**ВОЛНОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ  
ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ**

*Рассмотрены волновые явления в непрерывных однородных и дискретных системах, такие как прохождение бегущих волн, их отражение и образование стоячих волн, определяющих динамическую нагруженность механической системы. Проанализированы особенности этих систем. Приведены волновые характеристики дискретных систем и методы их учета в анализе динамических нагрузок.*

**Ключевые слова:** волновые явления, дискретные системы, динамические нагрузки, механические системы.

В третьей книге “Математические начала натуральной философии” Ньютон формулирует основное правило умозаключения в физике: “не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений”. Объективной реальностью, данной нам в ощущении, есть материя, которая в каждый момент времени обладает двумя определяющими ее свойствами. В воздухе, воде, твердых материалах каждый бесконечно малый элемент, имеющий некоторую плотность и упругость, одновременно испытывает упругие деформации и обладает свойством инерции, что приводит в общем случае не к мгновенному, а постепенному изменению скорости. Таким образом, свойство инерции некоторого упругого элемента материи обеспечивает увеличение или уменьшение упругой деформации и ее локализацию в определенном объеме, сопровождающиеся одномоментным изменением потенциальной и кинетической энергии. Такими же свойствами обладает и механическая система, представляющая собой совокупность характерных участков, состоящих из отдельных инертных масс, связанных упругими элементами. При этом каждый характерный участок системы ведет себя так же, как бесконечно малый элемент непрерывной однородной системы. В нем одновременно изменяется кинетическая энергия инертной массы и потенциальная энергия упругого элемента.

В отличие от конвективного переноса энергии, который осуществляется движущейся материальной частицей, отмеченное выше свойство материального мира определяет некоторое поле, способом существования которого является волна, т.е. изменение состояния среды, распространяющееся с конечной скоростью в этой среде и несущее с собой энергию без переноса вещества. Волны могут различаться по тому, как возмущения ориентированы относительно направления их распространения в среде. Например, в жидкостях и газах упругие силы возникают только при сжатии и не возникают при сдвиге, поэтому

упругие деформации в этих средах могут распространяться только в направлении смещения частиц среды. Такие волны называются продольными. В твердых телах, в которых упругие силы возникают как при продольном, так и при поперечном (сдвиге) смещении частиц, упругие деформации могут распространяться как в виде продольных, так и поперечных волн.

Важным частным случаем повторяющихся волн являются гармонические волны  $u(x, t)$ , которые возникают в том случае, когда излучатель создает возмущения, представляющие собой гармонические колебания  $u = A \sin \omega t$ . Уравнение бегущей волны можно представить в разных формах:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{vT} x \right) = \\ &= A \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = A \sin (\omega t - Kx), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v$  — фазовая скорость распространения волны, определяемая свойствами среды, в которой она распространяется;  $\lambda$  — длина волны,  $K$  — волновое число.

Несмотря на разную природу волн, закономерности, которыми определяется их распространение, имеют между собой много общего. Очевидно, что волны, распространяющиеся без поглощения, подчиняются одному и тому же волновому уравнению, которое может быть получено преобразованием одного из уравнений (1) [1]. Последовательно дифференцируя первое из них, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= -A\omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= -A\omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \left( -\frac{1}{v} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (2)$$

Фазовая скорость  $v$ , определяемая основными свойствами среды, в которой распространяется волна, является постоянной для недиспергирующих сред. Если рассматривать волны в упругих телах, то, естественно, фазовая скорость будет тем больше, чем больше жесткость и тем меньше, чем больше плотность. Следуя теории размерностей, для квадрата фазовой скорости получаем следующие выражения:

$$v^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3)$$

— для продольных волн;

$$v^2 = \frac{G}{\rho} \quad (4)$$

— для сдвиговых, крутильных волн.

Квадрат фазовой скорости дискретных систем будет определяться соотношением их упругой и инерционной характеристик.

Рассмотрим продольные колебания призматического стержня с площадью поперечного сечения  $S$ , модулем упругости  $E$  и плотностью  $\rho$  (рис. 1).

Подставляя выражение для фазовой скорости (3) в волновое уравнение (2) и умножая числитель и знаменатель правой части на  $S$ , получаем следующее выражение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{S}{S}. \quad (5)$$

В этом выражении произведение  $ES$  является жесткостью на растяжение. Вторую производную от  $u$  по  $x$  представим в виде разности деформаций в сечениях  $x$  и  $x + dx$ , отнесенной к приращению  $dx$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{u'_x(x + dx, t) - u'_x(x, t)}{dx}. \quad (6)$$

Используя выражение (6), преобразуем формулу (5) и получаем

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = ES u'_x(x + dx, t) - ES u'_x(x, t). \quad (7)$$

Здесь  $\rho S dx = dm$  — элементарная масса участка  $dx$ .

Поскольку правая часть выражения (7) представляет собой разность сил  $N_1 - N$  по обе стороны от участка  $dx$ , получаем дифференциальное уравнение движения участка стержня в виде

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = N_1 - N. \quad (8)$$

По форме, если заменить частную производную полной, уравнение (8) выражает второй закон Ньютона. Однако, усредняя силу, дей-

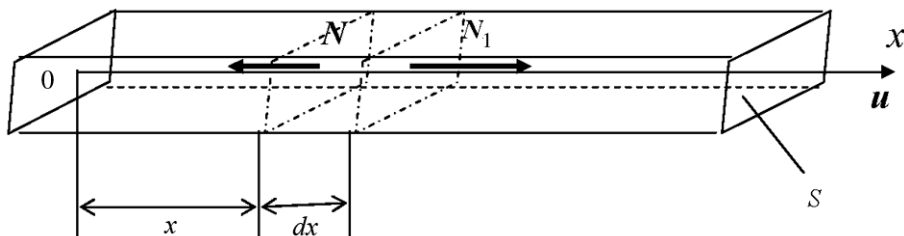


Рис. 1. Схема продольных колебаний стержня

ствующую на элементарный участок стержня, и принимая ускорение одинаковым для всех точек этого участка, приходим к выводу, что полученная усредненная сила и одинаковое ускорение действуют во всех точках участка, а следовательно, и стержня одновременно. Таким образом, распространение взаимодействия должно происходить с бесконечно большой скоростью. Это приводит к положению, что второй закон Ньютона может быть использован при скорости распространения взаимодействия (фазовой скорости) в механической системе либо равной бесконечности (скорости света), либо много больше скоростей отдельных точек системы (преодоление звукового барьера). Причем в отличие от второго закона Ньютона, в котором регламентируется понятие точка — бесконечно малая величина, в волновой теории вместо точки может быть введена либо сфера конечного радиуса, либо плоскость бесконечно малой толщины.

Явление интерференции состоит в таком наложении двух когерентных волн, которое приводит к стационарному усилению колебаний частиц среды в одних местах и ослаблению (или полному погашению) в других местах пространства. Простейший случай интерференции происходит при наложении прямой бегущей и отраженной волн. Эти волны когерентны (одинаковой частоты, с постоянной разностью фаз, с колебаниями вдоль одной прямой) и образуют стоячую волну. Запишем уравнения двух таких волн (см. (1)), имеющих одинаковые амплитуды и распространяющихся в противоположных направлениях:

$$u_1(x, t) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad u_2(x, t) = A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Очевидно, суммарное смещение частиц среды с координатой  $x$  будет равно

$$u = u_1 + u_2 = A \left[ \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right],$$

или после тригонометрических преобразований

$$u = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t. \quad (9)$$

Это и есть уравнение стоячей волны, показывающее, что точки среды колеблются так, что все одновременно проходят положение равновесия ( $\sin \omega t = 0$ ) и все одновременно достигают своих наибольших отклонений от положения равновесия ( $\sin \omega t = \pm 1$ ). В отличие от бегущих волн стоячие волны не переносят энергии.

Если же амплитуды прямой бегущей ( $A_1$ ) и отраженной ( $A_2$ ,  $A_1 > A_2$ ) волн различны, то в среде образуются стоячая (с амплитудой  $2A_2$ ) и бегущая (с амплитудой  $A_1 - A_2$ ) волны в соответствии с

выражением

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= A_1 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \\
 &= (A_1 - A_2) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \\
 &+ A_2 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = (A_1 - A_2) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \\
 &+ 2A_2 \cos\frac{2\pi x}{\lambda} \sin\omega t.
 \end{aligned}$$

Таким образом, если амплитуды прямой и отраженной волны различны, то, следовательно, энергия может переноситься бегущей волной по среде, в которой они распространяются.

Для решения одномерного волнового уравнения (2) при соответствующих начальных и краевых условиях можно использовать метод Даламбера (метод характеристик и построение прямых и обратных волн) либо метод Фурье (метод разделения переменных и разложение решения по собственным функциям) [2]. Сравним эти методы решения на примере.

Рассмотрим колебания струны (рис. 2) с закрепленными концами  $x = 0$  и  $x = l$ . Начальные скорости точек равны нулю, а начальное отклонение имеет форму треугольника с вершиной в точке  $x = l/8$  и высотой  $h$ .

Решение уравнения колебаний струны методом Даламбера имеет вид

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx.$$

Для построения формы струны разобьем первоначальный профиль струны на прямую и обратную волны с максимальным отклонением

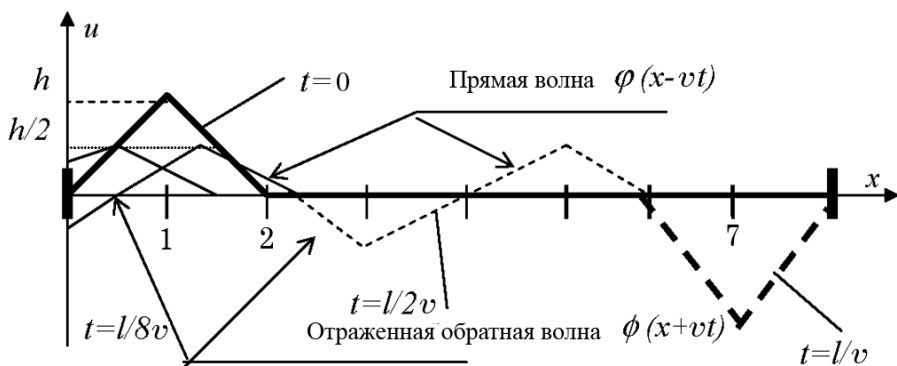


Рис. 2. Формы колебаний струны

каждой волны  $h/2$ . Тогда получим

$$u(x, t) = \varphi(x - vt) + \phi(x + vt).$$

Прямая и отраженная обратная волны движутся по струне со скоростью  $v$  и, складываясь у правого конца через половину периода, образуют зеркально отраженную исходную форму струны. В следующий полупериод струна, пройдя в обратном порядке все рассмотренные состояния, вернется в первоначальное положение (при  $t = 0$ ), после чего процесс будет повторяться с периодом  $T = 2l/v$ . При этом в каждый момент времени отклоняются только сечения, через которые проходят прямая и отраженная волны, а другие сечения остаются неподвижными.

Решая волновое уравнение (2) по методу Фурье при начальных условиях  $u(t = 0) = f(x)$ ,  $u'_t(t = 0) = F(x)$  и краевых условиях  $u(x = 0) = 0$ ,  $u(x = l) = 0$ , в свою очередь, получаем

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi vt}{l} + b_k \sin \frac{k\pi vt}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left( \frac{k\pi vt}{l} + \varphi_k \right), \quad (10)$$

где  $a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$ ;  $b_k = \frac{2}{k\pi v} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$ ;  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\text{tg } \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$ .

Для рассмотренного примера (см. рис. 2) функция  $f(x)$  задается формулами

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8h}{l}x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{8}, \\ \frac{8h}{l} \left( \frac{l}{4} - x \right), & \text{если } \frac{l}{8} \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ 0, & \text{если } \frac{l}{4} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Так как  $F(x) = 0$ , в выражении (10) все коэффициенты  $b_k = 0$ .

Подставляя  $f(x)$  в формулы (10) и интегрируя полученные соотношения, находим решение для рассматриваемого случая колебаний струны по методу Фурье:

$$u(x, t) = \frac{16h}{\pi^2 k^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( 2 \sin \frac{k\pi}{8} - \sin \frac{k\pi}{4} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi vt}{l}. \quad (11)$$

В соответствии с законом дисперсии для струны, закрепленной с обеих сторон, получаем формулу для круговой частоты  $\omega = vK = v\frac{\pi}{N}$ .

Разделив всю струну на 8 характерных участков и приняв фазовую скорость  $v = 1$  участок/с и волновое число  $K = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda = 2N$  для струны, закрепленной с двух сторон), выразим отклонение  $i$ -го сечения для  $k$ -й собственной частоты:

$$u_k = A_k \sin \frac{k\pi i}{8} \cos \frac{k\pi t}{8}. \quad (12)$$

Тогда круговая частота первого тона колебаний  $\omega_1 = \pi/8 = 0,3927 \text{ с}^{-1}$ , а следующие шесть частот будут кратны первому тону и равны  $\omega_2 = 0,7854$ ,  $\omega_3 = 1,1781$ ,  $\omega_4 = 1,5708$ ,  $\omega_5 = 1,9635$ ,  $\omega_6 = 2,3562$ ,  $\omega_7 = 2,7489 \text{ с}^{-1}$ . Амплитуды семи первых мод, или собственных функций, равны  $A_1 = 0,09445$ ,  $A_2 = 0,16787$ ,  $A_3 = 0,29546$ ,  $A_4 = 0,20264$ ,  $A_5 = 0,16567$ ,  $A_6 = 0,19872$ ,  $A_7 = 0,04871$ . Значения отклонений  $u_i$  семи сечений для первых семи гармоник при  $t = 0$  и  $h = 1$ , вычисленные по формуле (12), приведены в табл. 1.

Таблица 1

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$
$u_1$	0,0361	0,1187	0,1898	0,2026	0,1531	0,0769	0,0186
$u_2$	0,0668	0,1679	0,1453	0	-0,1171	-0,1087	-0,0344
$u_3$	0,0872	0,1187	-0,0786	-0,2026	-0,0634	0,0769	0,0450
$u_4$	0,0944	0	-0,2055	0	0,1657	0	-0,0487
$u_5$	0,0872	-0,1187	-0,0786	0,2026	-0,0634	-0,0769	0,0450
$u_6$	0,0668	-0,1679	0,1453	0	-0,1171	0,1087	-0,0344
$u_7$	0,0361	-0,1187	0,1898	-0,2026	0,1531	-0,0769	0,0186

На рис. 3 показаны первая и седьмая моды (собственные функции) для рассмотренной струны. Там же жирными линиями показана форма колебаний семи характерных участков седьмой моды.

Для формы колебаний характерных участков седьмой моды, используя формулу (12), находим коэффициенты распределения амплитуд этой формы по выражению  $\beta_{1-i} = \sin(7\pi/8) / \sin(\pi/8)$ . Получаем значения:  $\beta_{1-1} = 1$ ,  $\beta_{1-2} = -1,8478$ ,  $\beta_{1-3} = 2,4142$ ,  $\beta_{1-4} = -2,6131$ ,  $\beta_{1-5} = 2,4142$ ,  $\beta_{1-6} = -1,8478$ ,  $\beta_{1-7} = 1$ .

Вычислив значения собственных функций  $u_i$  достаточно большого числа гармоник и просуммировав их для данных сечений в интервале времени от 0 до  $T/2$ , найдем прохождение волн по струне и отклонения ее от первоначального положения. Интересно отметить,

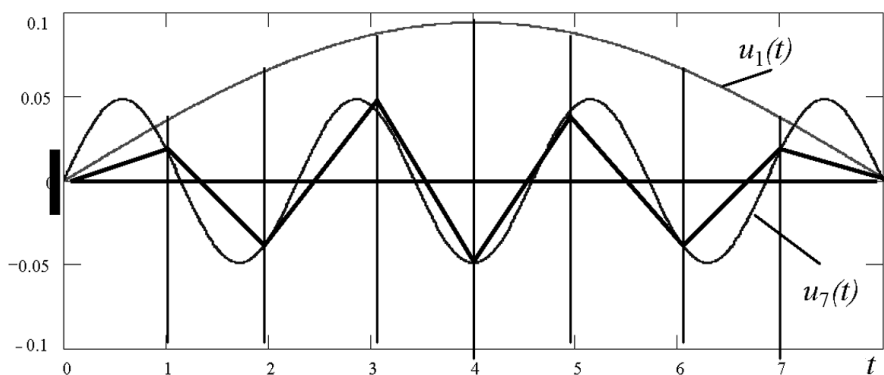


Рис. 3. Первая и седьмая моды непрерывной струны

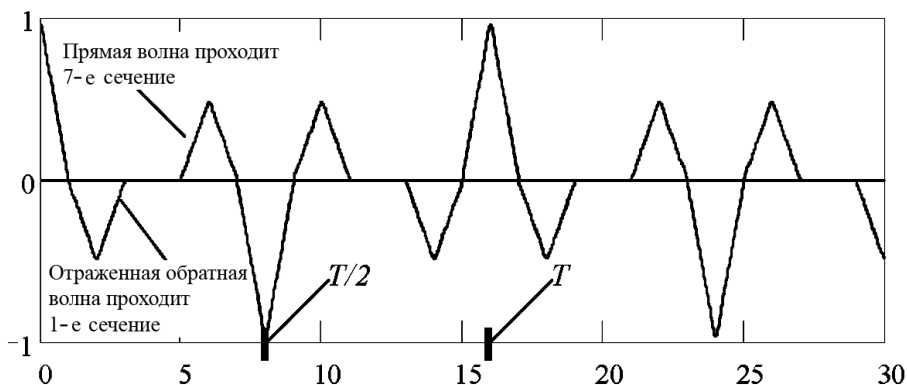
что при заданных начальных условиях в выбранном интервале времени седьмое сечение неподвижно от начала движения до подхода к нему прямой волны, а первое сечение остается неподвижным после прохода отраженной обратной волны.

В следующий полупериод от  $T/2$  до  $T$ , так как все собственные частоты кратны первой, значения  $\cos \frac{k\pi vt}{l}$  одновременно меняют знак на противоположный для всех собственных форм. Из этого следует, что по струне прямая и обратная волны распространяются в противоположных направлениях. При этом в момент времени  $T/2$  прямая и отраженная волны, суммируясь, образуют форму колебаний, подобную первоначальной, но зеркально отраженную как от нулевого положения, так и от середины струны. Этот же, рассмотренный выше волновой процесс, представлен на рис. 4, где изображены графики отклонений сечений 1 и 7 в функции времени, построенные по формуле (12) для сорока гармоник. Как и следовало ожидать, решения методом Даламбера (использование фазовых плоскостей) и методом Фурье (использование собственных функций и интегралов Фурье для нахождения произвольных постоянных) привели к одинаковым результатам.

Рассмотрим механическую систему, не являющуюся в общепринятом смысле однородной, а в определенных условиях аналогичную однородным, для которой форма колебаний близка к гармонической и возможно существование бегущих и стоячих волн. Эта квазиоднородная механическая система может представлять собой некоторое число близких по своим свойствам участков, каждый из которых представляет собой инерционную массу с упругой связью.

В существующих методах расчета колебаний динамических систем, в том числе и квазиоднородных, для перехода от физической к математической модели используется второй закон Ньютона в форме принципа Даламбера либо уравнения Лагранжа второго рода. Однако, как указывалось выше, использование второго закона Ньютона





**Рис. 4.** К прохождению прямой и обратной волнами 1-го и 7-го сечений однородной системы

предполагает для данной математической модели мгновенное распространение механического взаимодействия. К аналогичному результату приводит и использование уравнения Лагранжа, поскольку потенциальная энергия системы является функцией координат взаимодействующих тел. В этом случае математическая модель различных динамических систем (например, крутильной системы) обычно представляется системой дифференциальных уравнений второго порядка, решение которой имеет особенности, определяемые бесконечно большой фазовой скоростью распространения волн:

$$J_k \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \xi_k \frac{d\varphi_k}{dt} + \sum_{j=1}^m c_{kj} (\varphi_k - \varphi_j) = T_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

где  $J_k$  — момент инерции  $k$ -й массы;  $\varphi_k, \varphi_j$  — угловые отклонения двух соседних масс;  $\xi_k$  — эквивалентный коэффициент внешнего, вязкого трения для  $k$ -й массы;  $c_{kj}$  — жесткость участка между массами  $k$  и  $j$ ;  $m$  — число масс, связанных с  $k$ -й массой;  $T_k(t)$  — возмущающее воздействие на  $k$ -ю массу.

Систему дифференциальных уравнений (13) можно решить либо непосредственно численным интегрированием, либо другими способами, например, разложением движения системы по формам собственных колебаний, методом главных координат, методом комплексных амплитуд, энергетического баланса. Несмотря на то, что для этих методов расчета исходной является одна и та же система дифференциальных уравнений, подходы к ее решению различны у разных авторов. Если одни допускают существование пространственных форм колебаний [3, 4], получая при решении сдвиги фаз между колебаниями отдельных масс, то другие, использующие метод энергетического баланса, принимают плоскую форму собственных колебаний [5].

Конечно, полученные решения частично отражают реальную картину нагружения механической системы. Например, могут быть получены только достоверные максимальные отклонения в собственных формах колебаний системы от положения равновесия при использовании метода энергетического баланса. Принимая плоскую форму колебаний и рассматривая движение системы как один большой осциллятор, можно потерять бегущие волны в промежутке между максимальными отклонениями, так как реальная фазовая скорость имеет далеко не бесконечное значение.

Рассмотрим простейшую крутильную систему, состоящую из 7 инерционных масс с моментом инерции  $J$  и жесткостью валов  $c$  в отсутствие сил сопротивления (рис. 5).

Дифференциальные уравнения, составленные в соответствии с принципом Даламбера, имеют вид

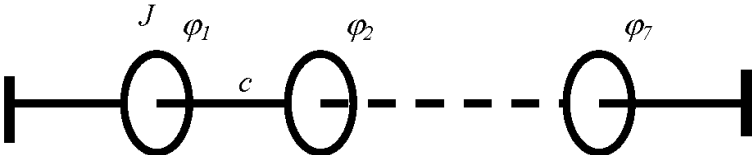
$$\begin{aligned}
 J\ddot{\varphi}_1 + 2c\varphi_1 - c\varphi_2 &= 0; \\
 J\ddot{\varphi}_2 - c\varphi_1 + 2c\varphi_2 - c\varphi_3 &= 0; \\
 \dots\dots\dots & \\
 J\ddot{\varphi}_i + c(\varphi_i - \varphi_{i-1}) - c(\varphi_{i+1} - \varphi_i) &= 0, \\
 \dots\dots\dots & \\
 J\ddot{\varphi}_7 - c\varphi_6 + 2c\varphi_7 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Если же принять, что в квазиоднородной системе, также как и в однородной, распространяются гармонические бегущие волны, то система уравнений (14) при ограниченном числе характерных участков может быть заменена следующим уравнением (множитель при  $c/J$  в правой части — разностный аналог второй производной с аргументом, являющимся номером участка):

$$\frac{d^2\varphi_k}{dt^2} = \frac{c}{J} \left( \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\Delta} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta} \right) / \Delta,
 \tag{15}$$

где  $\Delta$  — доля фазовой постоянной, зависящей от номера участка;  $c/J = v^2$  — квадрат фазовой скорости дискретной квазиоднородной системы [6].

Следовательно, при данных начальных условиях для анализа движения системы можно использовать метод Даламбера — метод бегущих волн. Принимая  $J = 1 \text{ кг/м}^2$  и  $c = 1 \text{ нм/рад}$ , получаем фазовую



**Рис. 5.** Схема квазиоднородной динамической системы

скорость  $v = 1$  участок/с. Тогда при начальном отклонении первой массы на  $\varphi_{10} = 1$  в следующий момент времени по системе начинают движение прямая и обратная волны с амплитудами  $0,5\varphi_{10}$ . В соответствии со свойствами, присущими всем волнам, обратная волна отражается от левого закрепления и некоторым фазовым сдвигом перемещается вместе с прямой волной по системе к правому закреплению. Прямая волна, отражаясь от правого закрепления, складывается с обратной волной, и через половину периода седьмая масса имеет отклонение  $-\varphi_{10}$ . Через следующую половину периода система приходит в первоначальное положение. Таким образом, дискретная квазиоднородная механическая система ведет себя так же, как система сплошного стержня-струны (см. рис. 2). Такое соответствие физической картины рассматриваемого процесса следует из того факта, что в каждый момент времени инерционная масса “не знает”, движется ли она в бесконечной или ограниченной среде. Этот вывод подтверждается также тем, что эта инерционная масса вместе с остальными массами и упругими связями образует упруго-инерционное линейчатое поле, способом существования которого является волновой процесс, и при любом возмущении этого поля в той или иной его части начинается распространение волны, переносящей энергию возмущения. Процесс распространения волны соответствует аксиоме инерции: как материальная точка движется с постоянной скоростью, пока на нее не действуют силы, так и волна распространяется с постоянными характеристиками, пока не изменились свойства среды. Нарушение однородности среды приводит к изменению закона дисперсии, частичному или полному отражению волны.

Этот волновой процесс в дискретной однородной системе можно легко реализовать на установке, приведенной во всех учебниках физики и состоящей из одинаковых масс (шаров), соединенных достаточно мягкими пружинами и подвешенных на длинных нитях. В этой модели упругим свойствам стержня соответствует упругость пружин, а инертным — масса шаров. Таким образом, шары с пружинами являются дискретной моделью однородного сплошного тела, что позволяет воспроизводить ряд явлений, характерных для сплошного упругого тела, в частности распространение продольных и поперечных волн. На рис. 6 показан процесс прохождения волны по механической системе; на каждом кадре прямоугольником со стрелкой отмечены сжатые участки пружины. При этом можно отметить, что при движении волны по большей части системы (от второй до восьмой массы) первая и последняя массы остаются неподвижными: первая — после того как ее покинула отраженная обратная волна, а последняя — до тех пор, пока к ней не подошла прямая волна. На рис. 7 показаны кадры прохождения

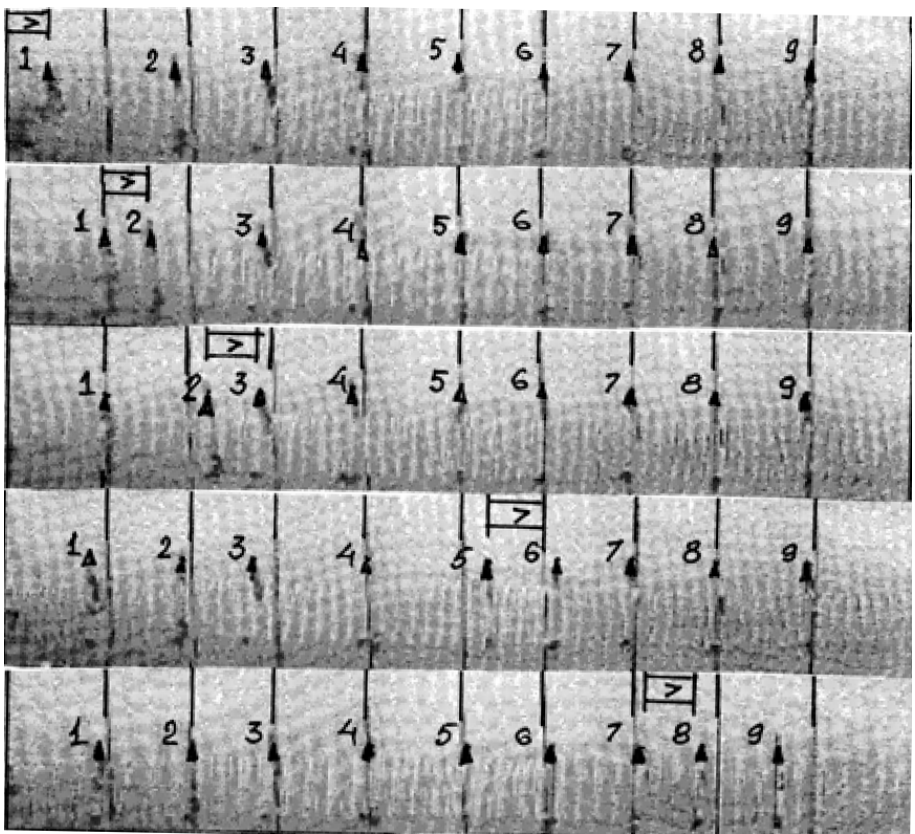


Рис. 6. Схема прохождения волны по механической системе

по системе отраженных прямой и обратной волн, когда волны отразились от закрепления и движутся в противоположных направлениях. И в этом случае очевидно, что первая и последняя массы остаются неподвижными.

Подобно методу Фурье разложения решения по собственным функциям и использованию интегралов Фурье для определения произвольных постоянных для однородной системы, можно использовать способы анализа, основанные на втором законе Ньютона, для дискретной квазиоднородной механической системы. В этом случае решение можно разделить на три этапа: определение собственных частот, коэффициентов формы колебаний, решение алгебраических уравнений для нахождения произвольных постоянных.

Получим закон дисперсии для квазиоднородной системы с  $n$  массами. Смещение инерционной массы описываем выражением, аналогичным выражению для стоячей волны (9), но с учетом того, что система имеет закрепленные концы:

$$\varphi_i = A_k \sin \frac{ik\pi}{n+1} \sin \omega_k t, \quad (16)$$

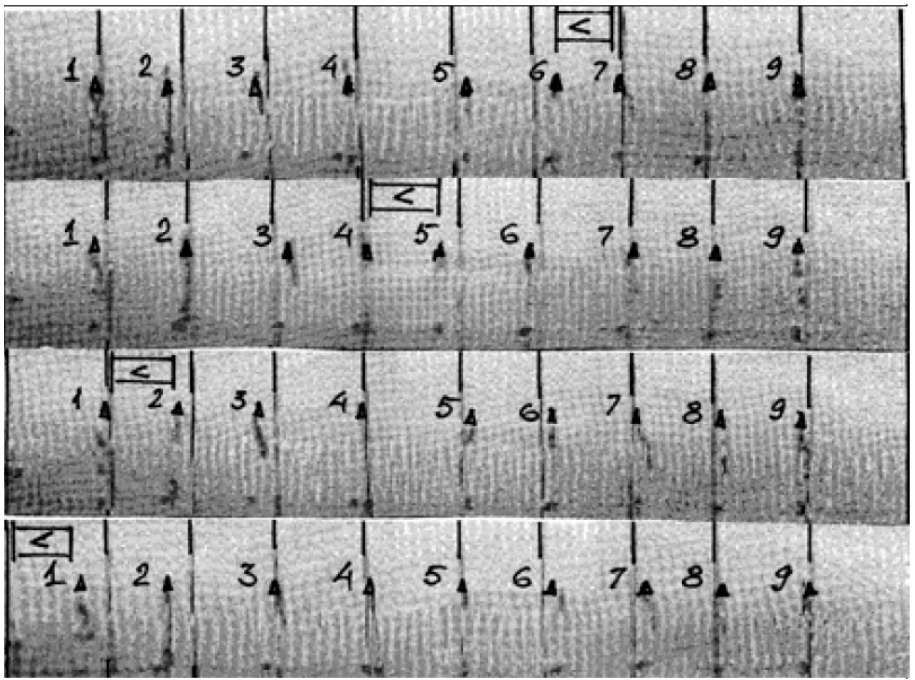


Рис. 7. Схема прохождения по системе волны после отражения

где  $i$  — номер массы;  $k$  — номер нормального колебания;  $A_k \sin \frac{ik\pi}{n+1}$  — амплитуда смещения  $i$ -й массы  $k$ -го нормального колебания.

Подставив выражение (16) в уравнения движения (14), найдем, что уравнения (14) обращаются в тождество, если

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{c}{J}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Таким образом, рассматриваемой дискретной системе, обладающей  $n$  степенями свободы свойственны  $n$  нормальных колебаний, круговые частоты которых определяются выражением (17), т.е. не являются кратными наименьшей круговой частоте  $\omega_1$  первого нормального колебания в отличие от нормальных частот однородной системы сплошного стержня. Однако лежащие в области низких частот (для которых  $k \ll n$ ) нормальные колебания дискретной и сплошной систем совпадают по частоте и имеют одинаковые распределения амплитуд. По мере увеличения  $k$  частоты дискретной и сплошной систем постепенно расходятся: у дискретной системы спектр обрывается на частоте  $\omega_k \approx 2\sqrt{c/J}$  (при  $k = n \gg 1$ ), частоты же гармоник спектра сплошной системы неограниченно возрастают при  $k \rightarrow \infty$ .

Для представленной на рис. 5 квазиоднородной динамической крутильной системы, описанной дифференциальными уравнениями (14), оказалось, что собственные частоты, полученные решением этой си-

стемы методом остатка, а также по формуле (17), имеют одинаковые значения  $\omega_1 = 0,3902$ ,  $\omega_2 = 0,7654$ ,  $\omega_3 = 1,1111$ ,  $\omega_4 = 1,4142$ ,  $\omega_5 = 1,6629$ ,  $\omega_6 = 1,8478$ ,  $\omega_7 = 1,9616$ . Этим же методом остатка определены коэффициенты распределения амплитуд форм колебаний. Коэффициенты формы колебаний для 7-й собственной частоты совпадают со значениями отклонений 7-й моды, рассчитанными для семи сечений (см. рис. 3). Такое же сравнение коэффициентов формы колебаний остальных собственных частот показало полное совпадение непрерывной однородной и квазиоднородной систем.

Величины отклонений масс  $\varphi_i$  для соответствующих собственных частот при  $t = 0$  и при нулевых начальных условиях, кроме  $\varphi_1 = 1$ , полученные по формам собственных колебаний решением системы алгебраических уравнений, приведены в табл. 2.

Таблица 2

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$
$\varphi_1$	0,0366	0,125	0,2134	0,25	0,2134	0,125	0,0366
$\varphi_2$	0,0676	0,1768	0,1633	0	-0,1633	-0,1768	-0,0676
$\varphi_3$	0,0884	0,125	-0,0884	-0,25	-0,0884	0,125	0,0884
$\varphi_4$	0,0957	0	-0,231	0	0,231	0	-0,0957
$\varphi_5$	0,0884	-0,125	-0,0884	0,25	-0,0884	-0,125	0,0884
$\varphi_6$	0,0676	-0,1768	0,1633	0	-0,1633	0,1768	-0,0676
$\varphi_7$	0,0366	-0,125	0,2134	-0,25	0,2134	-0,125	0,0366

Установленные амплитуды главных колебаний позволяют построить графики зависимости от времени отклонений 1, 3, 5 и 7-й масс (рис. 8) рассмотренной механической системы.

Сравнение графиков на рис. 4 и 8 показывает, что некоторые волновые особенности в дискретной системе проявляются только в течение первого полупериода движения со значительными искажениями (несоответствие значений амплитуд колебаний масс) по отношению к однородной непрерывной системе. Дальнейшее движение квазиоднородной системы в корне отличается от движения однородной системы и от движения масс в экспериментальной установке. Как указывалось ранее, это объясняется тем, что собственные частоты (и тем самым фазы колебаний) квазиоднородной системы не кратны первой собственной частоте, косинусы в уравнениях не меняют одновременно знак на обратный по прошествии полупериода и отражения волны не происходит. Соответствие реального движения дискретной однородной

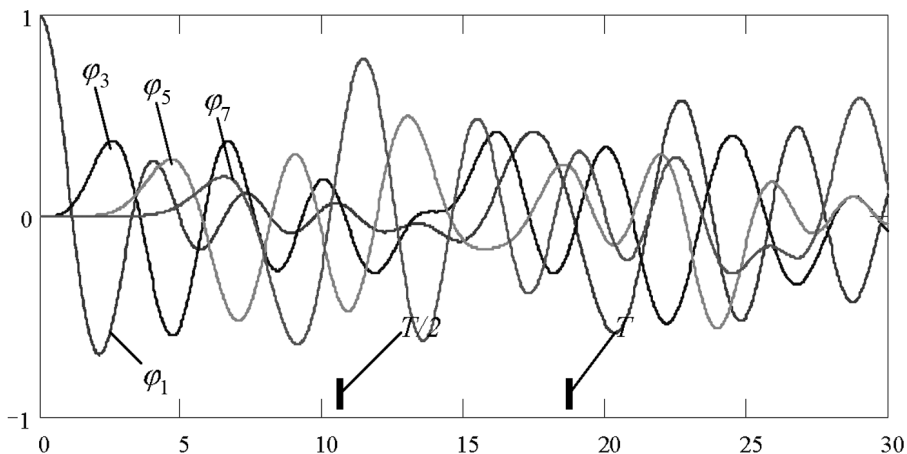


Рис. 8. Графики отклонений масс дискретной системы

системы движению, полученному интегрированием дифференциальных уравнений, может быть только в случае, когда начальные условия (координаты и скорости) пропорциональны коэффициентам распределения амплитуд формы колебаний. Это объясняется тем, что в такой механической системе образуется стоячая волна, в которой не происходит переноса энергии и, следовательно, отсутствуют связанные с этим волновые явления.

**Выводы.** 1. Для низших собственных частот сами частоты и отклонения масс квазиоднородной системы совпадают с частотами и отклонениями соответствующих сечений непрерывной однородной системы. С увеличением номера частоты различия становятся более заметными. Частоты однородной системы кратны первой частоте, а в квазиоднородной системе они подчиняются закону дисперсии. Отклонения сечений однородной системы составляют ряд Фурье, а в квазиоднородной системе должны удовлетворять системе алгебраических уравнений.

2. Форма колебаний дискретной квазиоднородной системы составляет неотъемлемую часть моды однородной непрерывной системы и может быть определена по формуле

$$\beta_{1-i}^k = \frac{\sin(k\pi i/N)}{\sin(k\pi/N)},$$

где  $k$  — номер собственной частоты;  $i$  — номер сечения;  $N$  — число участков.

3. В течение первого полупериода колебаний движение квазиоднородной системы при данном начальном условии несколько напоминает движение непрерывной однородной системы. В каждом следующем полупериоде характер движения этих двух систем существенно различается из-за различия в частотах и амплитудах масс и сечений.

4. Результаты расчета квазиоднородных систем интегрированием дифференциальных уравнений с начальными условиями может соответствовать действительности, если данные начальные значения как перемещения, так и скорости будут пропорциональны коэффициентам формы колебаний, поскольку в этом случае в системе реализуется стоячая волна и перенос энергии отсутствует. В противном случае в системе происходит перенос энергии и расчет необходимо проводить с волновых позиций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И. В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1988. – 496 с.
2. Араманич И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 286 с.
3. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
4. Штейнвольф Л. И., Крабан В. И. О расчетах вынужденных крутильных колебаний на ЭЦВМ // Динамика и прочность машин. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1969. № 10. – С. 21–26.
5. Маслов Г. С. Расчеты колебаний валов. – М.: Машиностроение, 1968. – 272 с.
6. Смирнов В. Ф., Зябликов В. М. Фазовые скорости в дискретных крутильных системах // Изв. вузов. Машиностроение. – 1984. – № 8. – С. 32–36.
7. Крауфорд Ф. Волны. – М.: Наука, 1976. – 528 с.

Статья поступила в редакцию 25.06.2009

Валерий Федорович Смирнов родился в 1940 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1964 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области динамики механических систем.

V.F. Smirnov (b. 1940) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1964. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 60 publications and inventions in the field of dynamics of mechanical systems.

Борис Петрович Назаренко родился в 1943 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 г. Канд. техн. наук, руководитель научно-учебного комплекса “Фундаментальные науки” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ и изобретений в области математического моделирования динамики транспортных систем, теоретической механики и технических приложений информатики.

B.P. Nazarenko (b. 1943) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. Ph. D. (Eng.), head of “Fundamental Sciences” scientific and educational complex of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 70 publications and inventions in the field of mathematical simulation of dynamics of transport systems, theoretical mechanics and engineering applications of information technology.