

Сергей Иванович Светличный родился в 1950 г., окончил МФТИ в 1973 г. Канд. физ.-мат. наук, директор Филиала Института энергетических проблем химической физики РАН. Автор более 70 научных работ в области химической физики, спектроскопии.

S.I. Svetlichnyi (b. 1950) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1973. Ph. D. (Phys.-Math.), Director of the Branch of Institute for Energy Problems of Chemical Physics (the Russian Academy of Sciences). Author of over 70 publications in the field of chemical physics and spectroscopy.

Сергей Егорович Табалин родился в 1961 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1984 г. Научный сотрудник НИИ ПММ МГТУ. Автор более 30 научных работ в области физической оптики и прецизионных измерений.

S.Ye. Tabalin (b. 1961) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1984. Senior researcher of "PMM" research institute of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 30 publications in the field of physical optics and high precision measuring systems.

УДК 532.5.032

С. О. Ю р ч е н к о, И. Н. А л и е в

О РАСЩЕПЛЕНИИ И БИФУРКАЦИЯХ РЕШЕНИЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Исследована структура решений дисперсионного уравнения волн малой амплитуды на заряженной границе раздела между двумя несмешивающимися жидкостями разной плотности в поле сил тяжести, когда верхняя (идеальная, диэлектрическая) жидкость движется относительно нижней (вязкой, хорошо проводящей электрический ток). Показано, что фоновое движение верхней жидкости приводит к устранению точек бифуркации решения дисперсионного уравнения и расщеплению колебательных мод волновых возмущений. Найдено параметрическое представление описанного дисперсионного уравнения в случае покоящейся верхней жидкости. Описана структура решений для различных типов волн.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, бифуркация, неустойчивость.

Исследование устойчивости поверхности раздела стратифицированных по плотности жидкостей представляет собой одно из фундаментальных направлений гидродинамики, интерес к которому обусловлен множеством практических приложений. Исследования устойчивости поверхности раздела между движущимися жидкостями связаны с именами Кельвина и Гельмгольца; неустойчивость границы раздела жидкостей разных плотностей в поле сил тяжести, когда более тяжелая жидкость находится сверху, наблюдалась Рэлеем еще в конце XIX века, однако была описана Тейлором почти 60 лет спустя [1]. Первые работы, связанные с неустойчивостью заряженной поверхности жидкой

капли, принадлежат Рэлею, однако неустойчивость плоской поверхности проводящей жидкости в сильном электрическом поле [2], перпендикулярном невозмущенной поверхности, исследовалась Френкелем и Тонксом в 1935–1936 гг.

Исследование особенностей поведения решений алгебраических уравнений (к таковым в ряде случаев приводимы дисперсионные уравнения) восходит своими корнями к работам Пуанкаре [3], однако в решениях дисперсионных уравнений волн на поверхности жидкости бифуркационные особенности были обнаружены значительно позднее. Даже в линейной постановке исследование волновых движений привело к нетривиальным результатам, таким, как бифуркационное ветвление коэффициента затухания капиллярных волн [4] и относительно длинных волн на поверхности проводящей жидкости в электрическом поле [5].

В настоящей работе проанализировано влияние факторов неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (фоновое движение верхней жидкости), Френкеля–Тонкса (поверхностный заряд на границе раздела) и Рэля–Тейлора (соотношение плотностей верхней и нижней жидкостей) на решение дисперсионного уравнения волн малой амплитуды на границе раздела двух сред.

Расщепление спектра волн на поверхности раздела движущихся сред. Рассмотрим две несмешивающиеся несжимаемые жидкости различной плотности, занимающие верхнее и нижнее полупространства. Нижняя жидкость — вязкая и проводящая электрический ток, верхняя — идеальная и диэлектрик, движется с некоторой фоновой скоростью относительно нижней, а к невозмущенной поверхности раздела приложено внешнее ортогональное к границе электрическое поле. Дисперсионное уравнение, описывающее распространение волн малой амплитуды на описанной поверхности раздела между двумя средами, имеет вид [6]

$$\left(2 - \frac{i\omega}{\nu k^2}\right)^2 + \alpha \left(\frac{i\omega}{\nu k^2} - \frac{iU}{\nu k}\right)^2 + \Omega(k) = 4\sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}}; \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}\sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}} > 0;$$

$$\Omega(k) = \frac{\gamma k^2 - 4\pi\sigma^2 |k| + (1 - \alpha)\rho g}{\rho\nu^2 k^3}, \quad \alpha = \frac{\rho'}{\rho},$$

где ω , k — комплексная частота и волновое число; ν — кинематическая вязкость нижней жидкости; U — горизонтальная проекция скорости верхней жидкости на большом расстоянии от границы раздела; γ —

коэффициент поверхностного натяжения; σ — поверхностная плотность заряда на границе раздела; ρ' , ρ — плотность верхней и нижней жидкостей; g — ускорение свободного падения.

Уравнение (1) можно переписать в неявном виде:

$$\begin{aligned} \Phi(w, \theta) = 0, \operatorname{Re} w > 0, \quad w = \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}}, \quad \theta = \frac{U}{\nu k}, \\ \Phi(w, \theta) = (1 + w^2)^2 + \alpha(1 - w^2 \pm i\theta)^2 - 4w + \Omega(k). \end{aligned} \quad (2)$$

Знаки \pm в функции $\Phi(w, \theta)$ соответствуют волнам, распространяющимся влево и вправо (для определенности можно считать $U \geq 0$). Для малых значений параметра θ можно выполнить разложение решения:

$$\begin{aligned} w \approx w_0 + \left(\frac{dw}{d\theta}\right)_0 \theta = w_0 - \left(\frac{\partial\Phi(w, \theta)/\partial\theta}{\partial\Phi(w, \theta)/\partial w}\right)_0 \theta = \\ = w_0 \mp \frac{i\alpha\theta}{2(1+\alpha)w_0^3 + (1-\alpha)w_0 - 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

где индексом “0” обозначены соответствующие величины при $\theta = 0$. Видно, что вблизи точки, для которой

$$(1 + \alpha)w_0^3 + (1 - \alpha)w_0 - 1 = 0, \quad (4)$$

коэффициент перед параметром θ обращается в бесконечность.

Вообще говоря, если в самом общем виде дисперсионное соотношение записать как неявную функцию

$$\Phi(\omega, k) = 0,$$

то необходимым условием бифуркации решения является

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial k}\right| \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial k}\right)^{-1} = 0. \quad (5)$$

Применение условия (5) к неявной функции вида (2) при $\theta = 0$ приводит к уравнению (4), которым определяется положение точки бифуркации решения дисперсионного уравнения при $\theta = 0$.

Схема расщепления периодической моды приведена на рис. 1. В силу симметрии уравнения (5) при $\theta = 0$ периодические затухающие волны, распространяющиеся вправо и влево, имеют один и тот же коэффициент затухания, но противоположные по знаку циклические частоты и поэтому допускают слияние периодических ветвей в точке бифуркации с образованием аперiodических волн [4]. При выполнении условия (4) наличие даже малой фоновой скорости приводит к устранению точки бифуркации, решение дисперсионного уравнения становится гладким, а мода, отвечающая периодическим затухающим колебаниям, расщепляется на две в соответствии с соотношением (3).

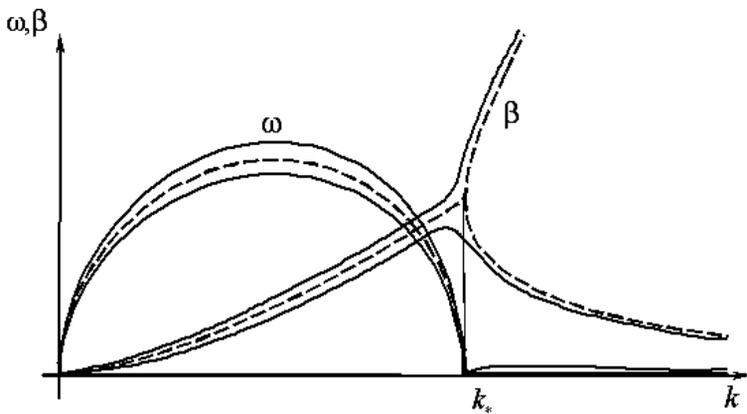


Рис. 1. Схема расщепления колебательной моды и вид решения дисперсионного уравнения вблизи точки бифуркации (штриховая линия соответствует случаю $\theta = 0$)

Образуется своего рода “тонкая структура” периодического затухающего решения дисперсионного уравнения. Математически это связано с тем, что уравнение 4-й степени с действительными коэффициентами может иметь две пары комплексно-сопряженных корней, а аналогичное уравнение с комплексными коэффициентами не приводится к паре квадратных уравнений с действительными коэффициентами.

Параметрическое представление дисперсионного уравнения.

В случае, когда $U = 0$, дисперсионное соотношение (1) можно представить в параметрическом виде:

$$\tilde{\omega}^2 = 4u \left(u^3 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}u - \frac{1}{1+\alpha} \right), \quad \tilde{\beta} = \frac{2u-1}{(1+\alpha)u}, \quad (6)$$

$$\Omega = \frac{4(1+\alpha)^2 u^6 + 4(1-\alpha^2)u^4 - 4\alpha u^2 - 1}{(1+\alpha)u^2}, \quad u \geq u_*;$$

$$\tilde{\omega} = 0, \quad \tilde{\beta} = \frac{2u-1}{(1+\alpha)u}; \quad (7)$$

$$\Omega = -\frac{1+4\alpha u^2}{(1+\alpha)u^2} + 4\sqrt{\frac{1-(1-\alpha)u}{(1+\alpha)u}}, \quad \frac{1-(1-\alpha)u}{u} \geq 0,$$

где $\tilde{\omega} = \text{Re}(\omega/\nu k^2)$, $\tilde{\beta} = \text{Im}(\omega/\nu k^2)$ – безразмерные циклическая частота и коэффициент затухания; u_* – действительный корень уравнения

$$u_*^3 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}u_* - \frac{1}{1+\alpha} = 0, \quad (8)$$

которое, как нетрудно видеть, совпадает с (4) и определяет положение точки бифуркации решения.

Электрическое поле входит дестабилизирующим фактором в выражение для Ω , не меняя при этом структуры параметрического представления, а фактор Рэля–Тейлора меняет структуру параметрического разложения: снижаются пороговое значение Ω , при котором происходит бифуркация решения, и предельные значения коэффициента затухания коротких волн. Кривые $\Omega(\tilde{\beta})$ при различных α представлены на рис. 2.

Зависимость параметра Ω от волнового числа k можно представить в безразмерном виде

$$\Omega = \frac{\tilde{k}^2 - F\tilde{k} + (1 - \alpha)}{A\tilde{k}^3}; \quad k = \tilde{k}\sqrt{\rho g/\gamma}, \quad (9)$$

$$F = 4\pi\sigma^2/\sqrt{\gamma\rho g}, \quad A = (\rho g/\gamma)^{3/2}v^2/g.$$

Различные соотношения параметров, входящих в (9), определяют характерный вид зависимости $\Omega(\tilde{k})$ и позволяют выделить капиллярные, гравитационные, электрокапиллярные и электро-капиллярно-гравитационные спектры волн.

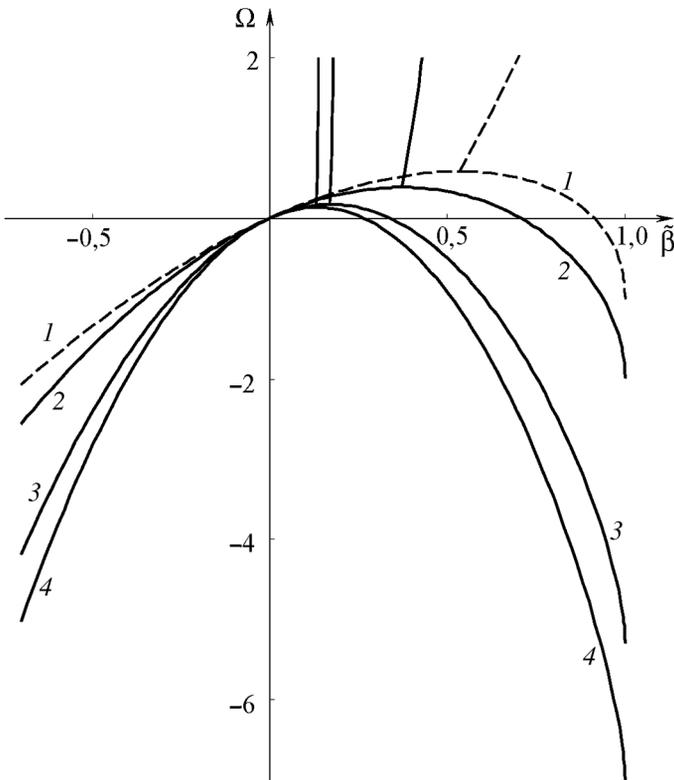


Рис. 2. Зависимость $\Omega(\tilde{\beta})$:

1 – $\alpha = 0$; 2 – 1; 3 – 4,3; 4 – 6

Бифуркационный анализ для различных спектров волн. Зависимости бифуркационных значений параметров Ω_* , β_* , u_* от α , рассчитанные согласно (6)–(7), приведены на рис. 3. При $\alpha = 1$ $\beta_* = 1 - 2^{-2/3} \approx 0,37$, $\Omega_* = (3 - 2^{4/3})/2^{1/3} \approx 0,3811$, в то время как при $\alpha = 0$ имеем $\Omega_* \approx 0,5814$, $\beta_* \approx 0,5344$. Из соотношений (9) следует критическое значение параметра поля, при котором наступает неустойчивость Френкеля–Тонкса, $F_c = 2\sqrt{1 - \alpha}$; точка перегиба функции $\Omega(\tilde{k})$ появляется при $F = F_c\sqrt{3}/2$. Вид зависимостей $\Omega(\tilde{k})$ для различных спектров волн приведен на рис. 4. Зависимости $\Omega(\beta)$ и $\Omega(k)$, изображенные на рис. 2 и 4, позволяют качественно описать характер зависимости $\beta(k)$.

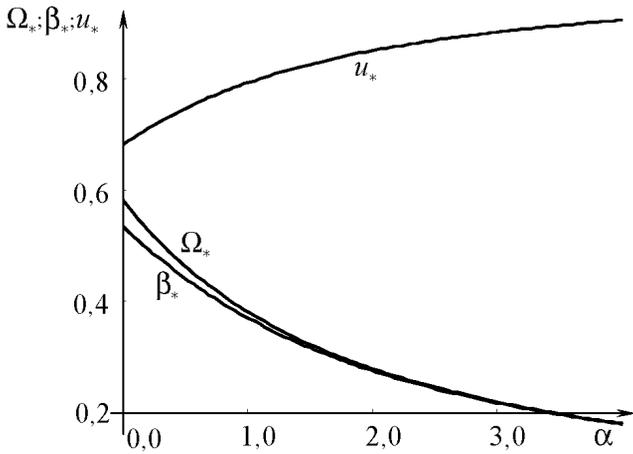


Рис. 3. Зависимости параметров Ω_* , β_* , u_* от α

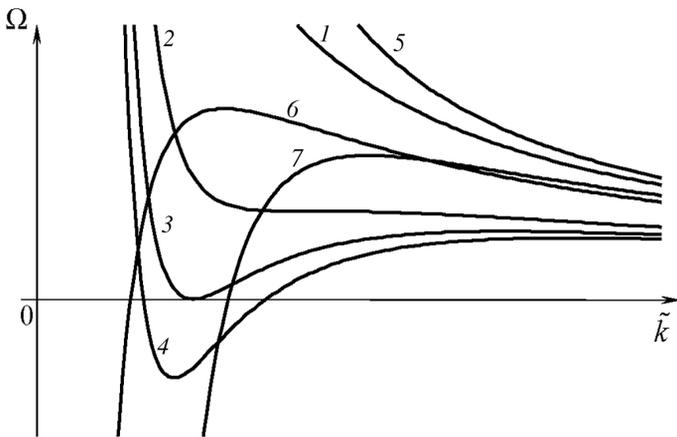


Рис. 4. Зависимости $\Omega(\tilde{k})$:

1 – $\alpha < 1$, $F = 0$; 2 – $\alpha < 1$, $F = F_c\sqrt{3}/2$; 3 – $\alpha < 1$, $F = F_c$; 4 – $\alpha < 1$, $F > F_c$;
5 – $\alpha = 1$, $F = 0$; 6 – $\alpha = 1$, $F \neq 0$; 7 – $\alpha > 1$

В целом структура решения для $\alpha < 1$ аналогична случаю $\alpha = 0$ [4, 5] с предельным коэффициентом затухания длинных волн $\tilde{\beta} = 2/(1 + \alpha)$. В точке бифуркации Ω_* пара колебательных мод переходит в две апериодические моды, при $\Omega = 0$ одна апериодическая мода становится неустойчивой. В силу особенностей функции $\Omega(k)$ при $\alpha < 1$ точка бифуркации Ω_* может быть достигнута 3 раза, в связи с чем помимо бифуркации, связанной с апериодическим затуханием капиллярных волн [4], возможна петлеобразная структура коэффициента затухания [5]. При $\alpha = 1$ спектр волн вырождается и решающую роль начинает играть даже малый заряд на границе раздела. При $F = 0$ для длинных волн $\Omega(k) \rightarrow +\infty$, функция $\Omega(k)$ монотонно стремится к нулю с увеличением k , один раз проходя значение Ω_* , в котором две периодические моды становятся апериодически затухающими [4].

При $F \neq 0$ для длинных волн $\Omega(k) \rightarrow -\infty$, характерно появление максимума, после которого $\Omega(k)$ монотонно убывает до нуля с увеличением k . Достижение значения Ω_* возможно 2 раза: длинноволновые возмущения становятся неустойчивыми, а в коротковолновом диапазоне происходит слияние двух колебательных мод с образованием двух апериодических мод. Однако при недостаточном поверхностном натяжении значение Ω_* возможно, не будет достигнуто ни разу, тогда бифуркации решения не происходит вовсе.

Случай $\alpha > 1$ не отличается принципиальным образом от случая $\alpha = 1$, $F \neq 0$: электрическое поле выступает дестабилизирующим фактором и приводит к возникновению неустойчивости на более коротких длинах волн, чем в случае капиллярно-гравитационной неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Заключение. Проведенный анализ показал, что факторы Кельвина–Гельмгольца и Рэлея–Тэйлора оказывают значительное влияние на структуру решения дисперсионного уравнения волн малой амплитуды на границе раздела двух сред. Фоновое движение верхней жидкости приводит к устранению точек бифуркации решений дисперсионного уравнения, а также к расщеплению колебательных мод. Найденное параметрическое представление (6)–(7) дисперсионного уравнения (1) в случае покоящейся верхней жидкости позволяет провести полный качественный анализ особенностей решений для различных спектров волн.

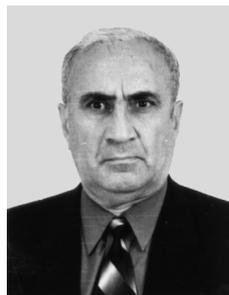
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2003. – 656 с.

3. P o i n c a r e H. Sur l'équilibre d'une masse fluid animee d'un mouvement de rotation // Acta math. – 1885. – No. 7. – P. 259–380.
4. А н т о н ю к П. Н. Дисперсионное уравнение для плоской капиллярно-гравитационной волны на свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – № 6. – С. 1324–1328.
5. А л и е в И. Н., Ф и л и п п о в А. В. О волнах, распространяющихся на плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. – 1989. – № 4. – С. 94–98.
6. А л и е в И. Н., Ю р ч е н к о С. О., Н а з а р о в а Е. В. Особенности комбинированной неустойчивости заряженной границы раздела движущихся сред // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80. – № 5. – С. 64–69.

Статья поступила в редакцию 29.05.2009

Исмаил Новрузович Алиев родился в 1945 г., окончил в 1969 г. Московский инженерно-физический институт (МИФИ). Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в различных областях физики.



I.N. Aliev (b. 1945) graduated from the Moscow Engineering and Physics Institute in 1969. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 60 publications in the various fields of physics.

Станислав Олегович Юрченко родился в 1985 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2009 г. Аспирант кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в различных областях физики.



S.O. Yurchenko (b. 1985) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2009. Post-graduate of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in various fields of physics.