УДК 539.3

ОБОБЩЕННАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ. ЧАСТЬ 2. МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Ю.И. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Выведены уравнения трехмерной теории устойчивости в случае малых деформаций из общих уравнений обобщенной трехмерной теории устойчивости нелинейно-упругих тел с конечными деформациями. Показано, что для различных моделей нелинейно-упругих сред соотношения теории устойчивости при малых деформациях будут одинаковыми, если принято дополнительное допущение о малости тензора деформаций по сравнению с тензором поворотов. Сформулирована вариационная постановка трехмерной задачи теории устойчивости. Представлены соотношения трехмерной теории устойчивости в компонентах, в том числе в ортогональном базисе.

Ключевые слова: трехмерная теория устойчивости, вариационная формулировка.

GENERALIZED THREE-DIMENSIONAL THEORY OF ELASTIC BODY STABILITY. PART 2. SMALL DEFORMATIONS

Yu.I. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Equations of the three-dimensional stability theory for the case of small deformations are deduced from general equations of the generalized theory of stability of nonlinearly elastic bodies with finite deformations. It is shown that relationships of the stability theory for small deformations will be identical for different models of nonlinearly elastic media if an additional assumption on smallness of the strain tensor as compared to the rotation tensor is made. The variational statement of a three-dimensional problem of the stability theory is formulated. The relationships of the three-dimensional stability theory in components are presented including those in the orthogonal basis.

Keywords: three-dimensional stability theory, variational formulation.

В последнее время в связи с развитием мощных вычислительных систем, в том числе суперкомпьютерных вычислительных комплексов, возник интерес к трехмерным задачам теории устойчивости, которые ранее практически не исследовались, за исключением ограниченного числа работ [1–3]. В настоящее время задачи теории устойчивости конструкций рассматривают, в основном, в рамках двумерных оболочечных теорий [4–8]. Несмотря на сравнительную простоту, данный подход затрудняет проведение расчетов устойчивости таких важных типов конструкций, как составные оболочки, оболочки с наличием трехмерных элементов (отверстий, подкреплений, соединительных элементов, расслоений), оболочки при неравномерном нагреве и др. Эмпирический подход, который обычно используется при выводе уравнений теории устойчивости для конкретных типов конструкций, не всегда гарантирует необходимую корректность самих уравнений. В этом смысле вывод уравнений теории устойчивости, даже для тонкостенных оболочечных конструкций, предпочтительнее проводить не эмпирическим путем, а на основе анализа трехмерных уравнений теории устойчивости.

В работе [9] была предложена обобщенная трехмерная теория устойчивости нелинейно-упругих конструкций при конечных деформациях. Цель настоящей статьи — вывод уравнений трехмерной теории устойчивости для случая малых деформаций из обобщенных уравнений теории устойчивости при конечных деформациях.

Малая деформация тела в варьированной конфигурации. Рассмотрим линейно-упругие среды с малыми деформациями. Согласно определению малых деформаций [10, 11], градиент деформации $\mathbf{F}$, описывающий движение тела из отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$ в актуальную конфигурацию K, мало отличается от метрического тензора $\mathbf{E}$. Метрические матрицы g_{ij} и $\overset{0}{g}_{ij}$ в конфигурациях $\overset{0}{K}$ и K так же, как и набла-операторы при малых деформациях, мало различаются между собой и их различием можно пренебречь:

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{E};\ \ g_{ij} \approx \overset{0}{g}_{ij};\ \ \ \nabla \approx \overset{0}{\nabla}. \tag{1}$$

В работе [9] была введена еще одна актуальная конфигурация $\widehat{K}$, которая была названа варьированной отсчетной. Эта конфигурация описывает переход тела из устойчивого состояния K в неустойчивое. Движение из конфигурации K в конфигурацию $\widehat{K}$ характеризуется градиентом деформации $\mathbf{F}_\xi$ [9]. Будем полагать, что это движение также происходит в рамках малых деформаций. В таком случае допущение о малости деформаций следует уточнить. Предположим, что мала только симметричная часть $\boldsymbol{\varepsilon}$ градиента $\mathbf{F}_\xi = \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \approx \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{T}}$, а кососимметричная его часть $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w})$ может быть произвольной:

$$\mathbf{F}_\xi = \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}), \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\| \ll 1. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{w}$ — вектор перемещений точек тела из конфигурации K в конфигурацию $\widehat{K}$. Допущение (2) о малости деформаций в варьированной конфигурации означает, что относительные удлинения ε_α материальных отрезков, ориентированных вдоль собственных направлений $\mathbf{q}_\alpha$ тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$, предполагаются малыми: $|\varepsilon_\alpha| \ll 1$, а угол поворота базиса $\mathbf{q}_\alpha$, характеризуемый вектором $\boldsymbol{\omega}$, может быть произвольным.

Как было показано в работах [10, 11], при малых деформациях все энергетические тензоры деформаций $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ для движения из конфигурации $\overset{0}{K}$ в устойчивую конфигурацию совпадают с тензором малых деформаций, который обозначим следующим образом:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u}^0 + \nabla \otimes \mathbf{u}^{0\text{т}}),$$

где $\mathbf{u}^0 = \mathbf{x} - \overset{0}{\mathbf{x}}$ — вектор перемещений материальной точки из конфигурации $\overset{0}{K}$ в конфигурацию K; индекс “0” соответствует величинам в устойчивой актуальной конфигурации K, которую будем называть основным состоянием.

Понятие “конвективная производная” было введено в работах [9, 12]. Конвективные производные $\underset{\xi}{\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}}$ и $\underset{\xi}{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}}$ от правых тензоров деформации Коши – Грина и Альманзи $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}$ (тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ при $n = \mathrm{I}$ и V) согласно формулам (20) и (21), приведенным в работе [9], при малых деформациях совпадают с тензором малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$ тела из устойчивой конфигурации K в неустойчивую конфигурацию $\widehat{K}$:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}_{\xi} = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}_{\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{w} + \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}}). \tag{3}$$

При малых деформациях совпадают все энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, тензоры напряжений Коши и Пиолы – Кирхгофа, которые обозначим как

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \mathbf{T} = \mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma}^0. \tag{4}$$

Упругий потенциал $\psi(I_\gamma^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}))$ для линейно-упругих сред с малыми деформациями является квадратичной функцией инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = I_\gamma^{(s)}(\boldsymbol{\varepsilon}^0)$ тензора малых деформаций, который можно записать в виде (с учетом тепловых деформаций):

$$\overset{0}{\rho}\psi = \overset{0}{\rho}\psi_0 + \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)} I_\beta^{(s)} + \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} l_{\gamma\gamma} I_\gamma^{(s)} = \overset{0}{\rho}\psi_0 + \frac{1}{2}\overset{(n)}{\mathbf{C}} \cdot\cdot {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}}, \tag{5}$$

где r_1 — число линейных инвариантов $I_\gamma^{(s)}\left(\overset{(n)}{\mathbf{C}}\right)$; $r_2 - r_1$ — число квадратичных инвариантов; ${}^4\mathbf{C}$ — тензор модулей упругости.

Тензор ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)}$, образованный вторыми производными потенциала по инвариантам, для линейно-упругих сред в точности совпадает с тензором модулей упругости ${}^4\mathbf{C}$:

$$
{}^4 \overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)} = {}^4\,\mathbf{C}, \quad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{6}
$$

Тогда, используя формулу (54) из работы [9], получаем, что энергетические тензоры напряжений $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_{\xi}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_{\xi}$ в варьированной конфигурации $\widehat{K}$ при малых деформациях совпадают:

$$
\boldsymbol{\sigma} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_{\xi} = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_{\xi}. \tag{7}
$$

Однако тензоры $\mathbf{T}_\xi$ и $\mathbf{P}_\xi$ при малых деформациях не совпадают с тензором $\boldsymbol{\sigma}$. Действительно, если воспользоваться формулами (72), приведенными в работе [9], и линеаризовать их в соответствии с формулами (1) и (4), то для модели A_{V} получим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_\xi &= \boldsymbol{\sigma} + \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{т}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w};\\
\mathbf{P}_\xi &= \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} + \boldsymbol{\sigma}^0 (\nabla \cdot \mathbf{w}).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Аналогично, если воспользоваться выражениями (75), приведенными в работе [9], и линеаризовать их с учетом формул (1) и (4), то для модели A_{I} запишем следующие соотношения:

$$
\mathbf{T}_\xi = \boldsymbol{\sigma} - \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{т}};
$$

$$
\mathbf{P}_\xi = \boldsymbol{\sigma} - 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{т}} + \boldsymbol{\sigma}^0 (\nabla \cdot \mathbf{w}).
$$

С учетом формул (3), (6), (7) из формулы (54), представленной в работе [9], получим определяющее соотношение в варьированной конфигурации:

$$
\boldsymbol{\sigma} = {}^4\,\mathbf{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}).
$$

Постановка задач теории устойчивости в случае малых деформаций. Для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0$, тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ и вектора перемещений $\mathbf{u}^0$ в основном (устойчивом) состоянии имеем задачу равновесия тела (см. (71) в работе [9]), которая для малых деформаций принимает вид

$$
\begin{gathered}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = 0;\\
\boldsymbol{\sigma}^0 = {}^4\,\mathbf{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^0;\\
\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u}^0 + \nabla \otimes \mathbf{u}^{0\mathrm{т}});\\
\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \Big|_{\Sigma_\sigma} = \mu \overset{0}{\mathbf{S}}{}^{e}; \quad \mathbf{u}^0 \Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = \mu \overset{0}{\mathbf{u}}{}^{e}.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Задача теории устойчивости (см. (73) в работе [9]) для модели A_{V}, линеаризованная по формулам (1) и (4) по аналогии с выражениями (8), для случая малых деформаций имеет вид

$$
\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} + (\nabla \cdot \mathbf{w})\boldsymbol{\sigma}^0) = 0;
$$

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}); \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\mathbf{w} + \nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}}); \tag{10}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\nabla\otimes\mathbf{w} + (\nabla\cdot\mathbf{w})\boldsymbol{\sigma}^0)\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \quad \mathbf{w}\Big|_{\Sigma_u} = 0.$$

Для модели A_{I} уравнение теории устойчивости (76), приведенное в работе [9], линеаризованное по формулам (1) и (4), для случая малых деформаций принимает следующий вид:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} - 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\sigma}^0(\nabla\cdot\mathbf{w})) = 0;$$

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}); \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\mathbf{w} + \nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}}); \tag{11}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma} - 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\sigma}^0(\nabla\cdot\mathbf{w}))\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \quad \mathbf{w}\Big|_{\Sigma_u} = 0.$$

Таким образом, линеаризованные постановки задач теории упругости в случае малых деформаций, полученные для разных нелинейно-упругих сред (модель A_{I} или A_{V}), оказываются различными. Покажем, что на самом деле это различие весьма мало, и им, как правило, можно пренебречь. Для этой цели представим градиент вектора $\nabla\otimes\mathbf{w}$ в виде разложения на симметричную и кососимметричную части [13]:

$$\nabla\otimes\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \epsilon\cdot\boldsymbol{\omega}; \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\mathbf{w} - \nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}}) = -\epsilon\cdot\boldsymbol{\omega}; \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\epsilon\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}),$$

где ϵ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $\boldsymbol{\omega}$ — сопутствующий вектор.

Подставим выражение (12) в уравнение равновесия системы (10). Предположим, что максимальные значения компонент тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}^0$ имеют один порядок, тогда в силу допущения (2) о малости компонент тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$ слагаемыми $\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$ и $I_1(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\sigma}^0$ в уравнениях равновесия и в граничных условиях системы (2) можно пренебречь по сравнению с тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Здесь учтено, что $\nabla\cdot\mathbf{w} = \mathbf{E}\cdot\cdot\nabla\otimes\mathbf{w} = \mathbf{E}\cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Omega}) = I_1(\boldsymbol{\varepsilon})$.

В то же время, поскольку в (2) никаких допущений о малости значений компонент тензора $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w})$ не сделано, пренебрегать слагаемым $\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w})$ по сравнению с тензором $\boldsymbol{\sigma}$ нет оснований. Тогда уравнение равновесия системы (2) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\nabla\otimes\mathbf{w} + (\nabla\cdot\mathbf{w})\boldsymbol{\sigma}^0) = \\ &= \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}) + I_1(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\sigma}^0) = \\ &= \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\epsilon\cdot\boldsymbol{\omega}) = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^0)\cdot\epsilon\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\cdot(\nabla\otimes\boldsymbol{\omega}\cdot\epsilon).\end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^0 = 0$ (уравнение равновесия в системе (9) в основном состоянии), задачу теории устойчивости (10) с учетом (13) можно записать так:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\cdot(\mathbf{B}\cdot\epsilon) = 0; \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}); \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\mathbf{w} + \nabla\otimes\mathbf{w}^{\text{т}});$$
$$\mathbf{B} = \nabla\otimes\boldsymbol{\omega}; \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\epsilon\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}); \tag{14}$$
$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\mathbf{w} - \nabla\otimes\mathbf{w}^{\text{т}});$$
$$\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\epsilon\cdot\boldsymbol{\omega})\big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \qquad \mathbf{w}\big|_{\Sigma_u} = 0.$$

Отметим, что уравнение теории устойчивости в системе (14) можно записать в эквивалентных формах:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\epsilon\cdot\boldsymbol{\omega}) = 0;$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w})) = 0.$$

Рассмотрим уравнение равновесия в задаче (11), подставляя в них выражения (12) и отбрасывая слагаемые $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\sigma}^0$ и $\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$, малые по сравнению со слагаемыми $\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}$:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} - 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w})) + \boldsymbol{\sigma}^0 I_1(\boldsymbol{\varepsilon})) \approx$$
$$\approx \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w})) = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\cdot(\nabla\otimes\boldsymbol{\omega}\cdot\epsilon).$$

В результате получено уравнение равновесия, в точности совпадающее с уравнением (13). Аналогично можно показать, что мало отличаются и граничные условия в задачах (10) и (11). Таким образом, постановки задач теории устойчивости, полученные для различных моделей нелинейно-упругих сред A_{I} и A_{V}, в случае малых деформаций фактически совпадают с точностью до малых слагаемых, которыми, как правило, можно пренебречь.

Последовательность решения задачи устойчивости следующая: вначале решается задача (10) для основного состояния при $\mu = 1$, а затем вычисляется поле тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0(1)$. В силу линейности задачи (10) любому другому значению параметра μ соответствует поле тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0(\mu)$, пропорциональное полю $\boldsymbol{\sigma}^0(1)$: $\boldsymbol{\sigma}^0(\mu) = \mu\boldsymbol{\sigma}^0(1)$. Подставляя это поле $\boldsymbol{\sigma}^0(\mu)$ в систему (14), получаем задачу теории устойчивости, т.е. задачу на собственные значения, решением которой является система собственных значений μ и собственных функций $\mathbf{w}$.

Вариационная формулировка задачи теории устойчивости. Для задачи (14) теории устойчивости можно записать вариационную формулировку, которая играет важную роль при численном решении задачи, например методами конечных и граничных элементов. Введем понятие "вариация векторного поля" $\delta\mathbf{w}(\mathbf{x})$ — поля, удовлетворяющего кинематическому граничному условию $\delta\mathbf{w}\,|_{\Sigma_u} = 0$. Учитывая, что поле $\xi\mathbf{w}$ согласно формуле (4), приведенной в работе [9], представляет собой вариацию радиус-вектора $\delta\mathbf{x} = \xi\mathbf{w}$ материальных точек при переходе из устойчивой конфигурации K в неустойчивую $\widehat{K}$, вектор $\delta(\xi\mathbf{w}) = \xi\delta\mathbf{w}$ можно рассматривать как "вариацию вариации".

Умножим уравнение теории устойчивости в форме (14) скалярно на вектор $\delta\mathbf{w}$ и выполним очевидное преобразование вида

$$\begin{aligned}&\delta\mathbf{w}\cdot\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w})) =\\ &= \nabla\cdot((\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}))\cdot\delta\mathbf{w}) - (\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}))\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{т}} = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Интегрируя уравнение (15) по всей области V и применяя формулу Гаусса – Остроградского, получим

$$\int\limits_V (\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}))\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{т}}dV - \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}))\cdot\delta\mathbf{w}\,d\Sigma = 0. \tag{16}$$

Используя граничные условия из задачи (14), находим, что поверхностный интеграл в выражении (16) обращается в нуль, так как $\Sigma = \Sigma_\sigma\cup\Sigma_u$, на части Σ_σ вектор $\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega})$ обращается в нуль, а на части Σ_u $\delta\mathbf{w} = 0$. В результате запишем итоговое вариационное уравнение задачи теории устойчивости

$$\int\limits_V ({}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{\Omega}(w))\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{т}}dV = 0. \tag{17}$$

Вариационная формулировка задачи теории устойчивости заключается в нахождении собственных функций $\mathbf{w}$ и собственных значений μ (как и ранее, $\boldsymbol{\sigma}^0(\mu) = \mu\boldsymbol{\sigma}^0(1)$), удовлетворяющих вариационному уравнению (17).

Уравнения трехмерной теории устойчивости в произвольном базисе. Компонентное представление задачи теории устойчивости (17) в произвольном локальном базисе $\mathbf{r}_i$ имеет вид

$$\begin{gathered}\nabla_i\sigma^{ij} - (1/\sqrt{g})\epsilon^{jmk}B_{im}\sigma^{0i}_k = 0;\\ \sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl};\quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\nabla_k w_l + \nabla_l w_k);\\ B^m_i = \nabla_i\omega^m;\quad \omega^m = \frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{mnk}\Omega_{kn};\quad \Omega_{kn} = \frac{1}{2}(\nabla_k w_n - \nabla_n w_k);\\ n_i\left(\sigma^{ij} - \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{jmk}\omega_m\sigma^{0i}_k\right)\Bigg|_{\Sigma_\sigma} = 0,\quad w_i\Big|_{\Sigma_u} = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Уравнения трехмерной теории устойчивости в ортогональном базисе. Если локальный базис $\mathbf{r}_i = \hat{\mathbf{r}}_i$ ортогонален, соответствует ортогональным координатам X^i, то уравнения трехмерной теории устойчивости (14) в этом базисе имеют вид

$$\begin{aligned}&(H_\beta H_\gamma\sigma_{\alpha\alpha})_\alpha + (H_\alpha H_\gamma\sigma_{\alpha\beta})_\beta + (H_\alpha H_\beta\sigma_{\alpha\gamma})_\gamma + \sigma_{\alpha\beta}H_\gamma H_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}H_\beta H_{\alpha\gamma} -\\ &-\sigma_{\beta\beta}H_\gamma H_{\beta\alpha} - \sigma_{\gamma\gamma}H_\beta H_{\gamma\alpha} - H_1H_2H_3\epsilon_{\alpha mk}B_{im}\sigma^0_{ik} = 0,\quad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha.\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $H_\gamma = \sqrt{g_{\gamma\gamma}}$ — параметры Ламе ($g_{\gamma\gamma} = \widehat{\mathbf{r}}_\gamma \cdot \widehat{\mathbf{r}}_\gamma$); σ_{ij} — физические компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}$ в физическом базисе $\widehat{\mathbf{r}}^j$ координат X^i [13]; B_{im} — физические компоненты тензора $\mathbf{B}$; σ^0_{ik} — компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}^0$ в том же базисе,

$$\mathbf{B} = \nabla \otimes \boldsymbol{\omega} = B_{im}\widehat{\mathbf{r}}^i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^m;\;\; \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\widehat{\mathbf{r}}^i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j;\;\; \boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma^0_{ij}\widehat{\mathbf{r}}^i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j;$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i\widehat{\mathbf{r}}^i;\;\; \mathbf{w} = w_i\widehat{\mathbf{r}}^i;\;\; \boldsymbol{\Omega} = \Omega_{ij}\widehat{\mathbf{r}}^i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j.$$

По латинским индексам $i, j, k, \ldots$ идет суммирование от 1 до 3, а по греческим индексам $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ суммирования нет, индексы α, β, γ образуют четную подстановку. В силу ортонормированности базиса $\widehat{\mathbf{r}}_i$, верхние и нижние компоненты всех тензоров и векторов в этом базисе совпадают (B^{im}, B_{im}, B^i_m, B^m_i и т.п.), их различие сохраняется только для соблюдения формального правила суммирования по верхним и нижним индексам, например, $B^{im}\sigma^{0k}_i$.

Физические компоненты B_{im} тензора $\mathbf{B}$ связаны с физическими компонентами ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ и находятся по формулам [13]:

$$B_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \breve{\omega}_\alpha\delta_{\alpha\beta};\;\; \omega_{\alpha\beta} = \frac{\omega_{\beta,\alpha}}{H_\alpha} - \frac{\omega_\alpha H_{\alpha\beta}}{H_\alpha H_\beta};$$

$$\breve{\omega}_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\omega_\gamma H_{\alpha\gamma}}{H_\gamma},\;\; \alpha, \beta = 1, 2, 3. \qquad (20)$$

Физические компоненты Ω_{im} тензора $\boldsymbol{\Omega}$ согласно тем же формулам [13] имеют вид

$$-\omega_\gamma = \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{w_{\beta,\alpha}}{H_\alpha} - \frac{w_\alpha H_{\alpha\beta}}{H_\alpha H_\beta} - \frac{w_{\alpha,\beta}}{H_\beta} + \frac{w_\beta H_{\beta\alpha}}{H_\alpha H_\beta}\right) =$$
$$= \frac{1}{2H_\alpha H_\beta}((w_\beta H_\beta)_{,\alpha} - (w_\alpha H_\alpha)_{,\beta}),\;\; \alpha,\, \beta = 1,\, 2,\, 3,\;\; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \qquad (21)$$

где α, β, γ образуют четную подстановку. В (21) учтено, что физические компоненты ω_i сопутствующего вектора $\boldsymbol{\omega}$ связаны с физическими компонентами Ω_{ij} кососимметричного тензора $\boldsymbol{\Omega}$ формулами

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega^{jk},\;\; i,\, j = 1,\, 2,\, 3. \qquad (22)$$

Выражение для компонент вектора фиктивных массовых сил $\overset{0}{\rho}\,\mathbf{f} = -\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot\cdot (\mathbf{B} \cdot \epsilon)$ в ортогональных координатах X^i имеет вид

$$\overset{0}{\rho}\, f_\alpha = -\epsilon_{\alpha mk}B^{im}\sigma^{0k}_i = -\sum_{s=1}^{3}(B_{s\beta}\sigma^0_{s\gamma} - B_{s\gamma}\sigma^0_{s\beta}),\;\; \alpha = 1,\, 2,\, 3. \qquad (23)$$

Для физических компонент $\varepsilon_{\alpha\beta}$ тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$ имеют место формулы [13]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{w_{\alpha,\alpha}}{H_\alpha} + \frac{H_{\alpha\beta}}{H_\alpha H_\beta} w_\beta + \frac{H_{\alpha\gamma} w_\gamma}{H_\alpha H_\gamma};\\
\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{H_\alpha}{H_\beta}\left(\frac{w_\alpha}{H_\alpha}\right)_\beta + \frac{H_\beta}{H_\alpha}\left(\frac{w_\beta}{H_\beta}\right)_\beta \right).
\end{aligned} \tag{24}
$$

Соотношения упругости в системе (18) в ортогональных координатах формально не меняют вид.

Система уравнений (19)–(24) может быть использована при выводе уравнений теории устойчивости оболочечных конструкций. Этому вопросу посвящена часть 3 настоящей работы.

Выводы. Из общих уравнений обобщенной трехмерной теории устойчивости нелинейно-упругих тел с конечными деформациями были получены уравнения трехмерной теории устойчивости для малых деформаций. Если принять дополнительное допущение о малости тензора деформаций по сравнению с тензором поворотов, то для различных моделей нелинейно-упругих сред соотношения теории устойчивости при малых деформациях будут одинаковыми. Определена вариационная постановка трехмерной задачи теории устойчивости. Приведены соотношения трехмерной теории устойчивости в компонентах, в том числе в ортогональном базисе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
2. *Коханенко Ю.В.* Трехмерная устойчивость цилиндра при неоднородном начальном состоянии // Доклады НАНУ. 2009. № 1. С. 60–62.
3. *Bazant Z.P.* Stability of elastic, an elastic and disintegrating structures: a conspectus of main results // ZAMM, Z Angew. Math. Mech., 2000. Vol. 80. No. 11–12. P. 709–732.
4. *Timoshenko S.P.*, *Gere J.M.* Theory of elastic stability. 2nd. New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1961. 356 p.
5. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 964 с.
6. *Bazant Z.P.*, *Cedolin L.* Stability of structures. Oxford: Oxford University Press, 1990. 316 p.
7. *Васильев В.В.* Механика композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 272 с.
8. *Григолюк Э.И.*, *Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
9. *Димитриенко Ю.И.* Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Ч. 1. Конечные деформации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 4 (51). С. 79–95.
10. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
11. *Димитриенко Ю.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 464 с.
12. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

13. *Димитриенко Ю.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 462 с.

REFERENCES

[1] Guz' A.N. Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruemykh tel [Fundamentals of three-dimensional theory of deformable bodies stability]. Kiev, Vishcha Shkola Publ., 1986. 512 p.
[2] Kokhanenko Yu.V. Three-dimensional stability of the cylinder at a non-homogeneous initial state. *Dokl. Akad. Nauk NANU* [Proc. Ukr. Acad. Sci.], 2009, no. 1, pp. 60–62 (in Russ.).
[3] Bazant Z.P. Stability of elastic, an elastic and disintegrating structures: a conspectus of main results. ZAMM, Z Angew. *Math. Mech.*, 2000, vol. 80, no. 11–12, pp. 709–732 (in Russ.).
[4] Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability. 2nd. New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1961. 356 p.
[5] Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 964 p.
[6] Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of structures. Oxford: Oxford University Press, 1990. 316 p.
[7] Vasil'ev V.V. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1984. 272 p.
[8] Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. Ustoychivost' i kolebaniya trekhsloynykh obolochek [Stability and vibration of sandwich shells]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1973. 172 p.
[9] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 1. Finite deformations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 4 (51), pp. 79–95 (in Russ.).
[10] Dimitrienko Yu.I. Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 624 p.
[11] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. T. 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Continuum mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media], Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011. 464 p.
[12] Lur'e A.I. Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 512 p.
[13] Dimitrienko Yu.I. Continuum mechanics. T. 1. Tensor analysis. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011. 462 p.

Статья поступила в редакцию 29.03.2013

Юрий Иванович Димитриенко — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yu.I. Dimitrienko — Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mechanics of continua, computational mechanics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical simulation in the science of materials, computational gas dynamics.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.