

В. Г. Прокопенко

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В АВТОСТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С МНОГОСЕГМЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*Исследованы статистические свойства автостохастических динамических систем, имеющих многокомпонентный хаотический мультиаттрактор. Рассмотрено определение статистических характеристик временных интервалов, в течение которых движение происходит в пределах отдельных фрагментов мультиаттрактора.*

**E-mail:** vadipro@yandex.ru

**Ключевые слова:** автономная автостохастическая система, композиционный хаотический аттрактор, мультиаттрактор, многосегментная нелинейность, редуцирующая функция, ячейка фазового пространства, статистические характеристики.

В настоящее время сформулированы и исследованы статистические характеристики автономных автостохастических систем с простейшими нелинейностями [1]. В случае систем с многосегментной нелинейностью их целесообразно дополнить новыми, отражающими влияние числа сегментов и учитывающими соответствующие новые особенности динамики таких систем.

Хаотический аттрактор динамической системы с многосегментной нелинейностью состоит из ряда взаимосвязанных бассейнов притяжения фазовых траекторий. Основную часть времени траектории находятся внутри этих бассейнов, но иногда самопроизвольно переходят из одного бассейна в другой [2]. Поэтому свойства генерируемых такой системой хаотических колебаний зависят от продолжительности пребывания траекторий внутри и вне отдельных бассейнов. Так как эти временные интервалы являются случайными величинами, для их описания можно использовать статистические характеристики — функции распределения, математическое ожидание, дисперсию и другие.

В общем случае хаотический аттрактор динамической системы с многосегментной нелинейностью может иметь весьма сложную структуру, например: может содержать неодинаковые бассейны притяжения фазовых траекторий с различной средней продолжительностью движения внутри различных бассейнов [3]; может представлять собой иерархию бассейнов различного ранга, когда все или какая-то часть бассейнов более высокого ранга представляет собой совокупность бассейнов притяжения более низкого ранга, которые, в свою очередь, также могут состоять из ряда бассейнов еще более низкого ранга, и так далее [4].

В случае такого “иерархического” аттрактора движение может надолго “задерживаться” в пределах отдельных бассейнов притяжения фазовых траекторий того или иного ранга. Поэтому условимся именовать данные бассейны локальными хаотическими аттракторами. Положим, что самый нижний, нулевой, ранг имеют индивидуальные бассейны притяжения фазовых траекторий, каждый из которых соответствует окрестности какой-либо одной особой точки (например, локальный аттрактор I.I на рис. 1, *a*). Первый ранг имеют локальные аттракторы, содержащие только локальные аттракторы нулевого ранга (например, локальные аттракторы I, II, III на рис. 1, *a* и 2, *a*). Локальные аттракторы второго ранга содержат также (или только) локальные аттракторы первого ранга (см. рис. 1, *a*) и так далее.

Примером динамической системы, для которой актуально исследование названных характеристик, является следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= f [H_1(x) + H_2(y) + H_3(z)]; \\ \frac{dy}{d\tau} &= A \{f [H_1(x) + H_2(y) + H_3(z)] + H_3(z) - CH_2(y)\}; \\ \frac{dz}{d\tau} &= BH_1(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$f(\xi) = b\xi + \frac{a-b}{2} \left[ -P(\xi) + \sum_{m=1}^M [P(\xi + mc) - 1] + \sum_{n=1}^N [P(\xi - nc) + 1] \right];$$

$$H_j(\xi) = \xi + (d_j + 1) [E0_j(\xi + s_j) - E1_j(\xi + s_j) - E2_j(\xi + s_j)];$$

$$E0_j(\xi) = P_j(\xi + g_j) + P_j(\xi - g_j);$$

$$E1_j(\xi) = \sum_{m=0}^{M_j} \left\{ P_j[\xi - (2m - 1)g_j] + \frac{h_j}{d_j} \right\};$$

$$E2_j(\xi) = \sum_{n=0}^{N_j} \left\{ P_j[\xi + (2n - 1)g_j] - \frac{h_j}{d_j} \right\};$$

$$P_j(\xi) = \frac{1}{2} \left( \left| \xi + \frac{h_j}{d_j} \right| - \left| \xi - \frac{h_j}{d_j} \right| \right);$$

$g_j = h_j \left( 1 + \frac{1}{d_j} \right)$ ;  $P(\xi) = \frac{|\xi + 1| - |\xi - 1|}{2}$ ;  $c = 2 \frac{a-b}{1-b}$ ;  $d_j, h_j$  и  $s_j$  — вещественные коэффициенты, причем  $d_j \geq 1$ ;  $M, N, M_j$  и  $N_j$  — целые неотрицательные числа;  $j = 1, 2, 3$ .

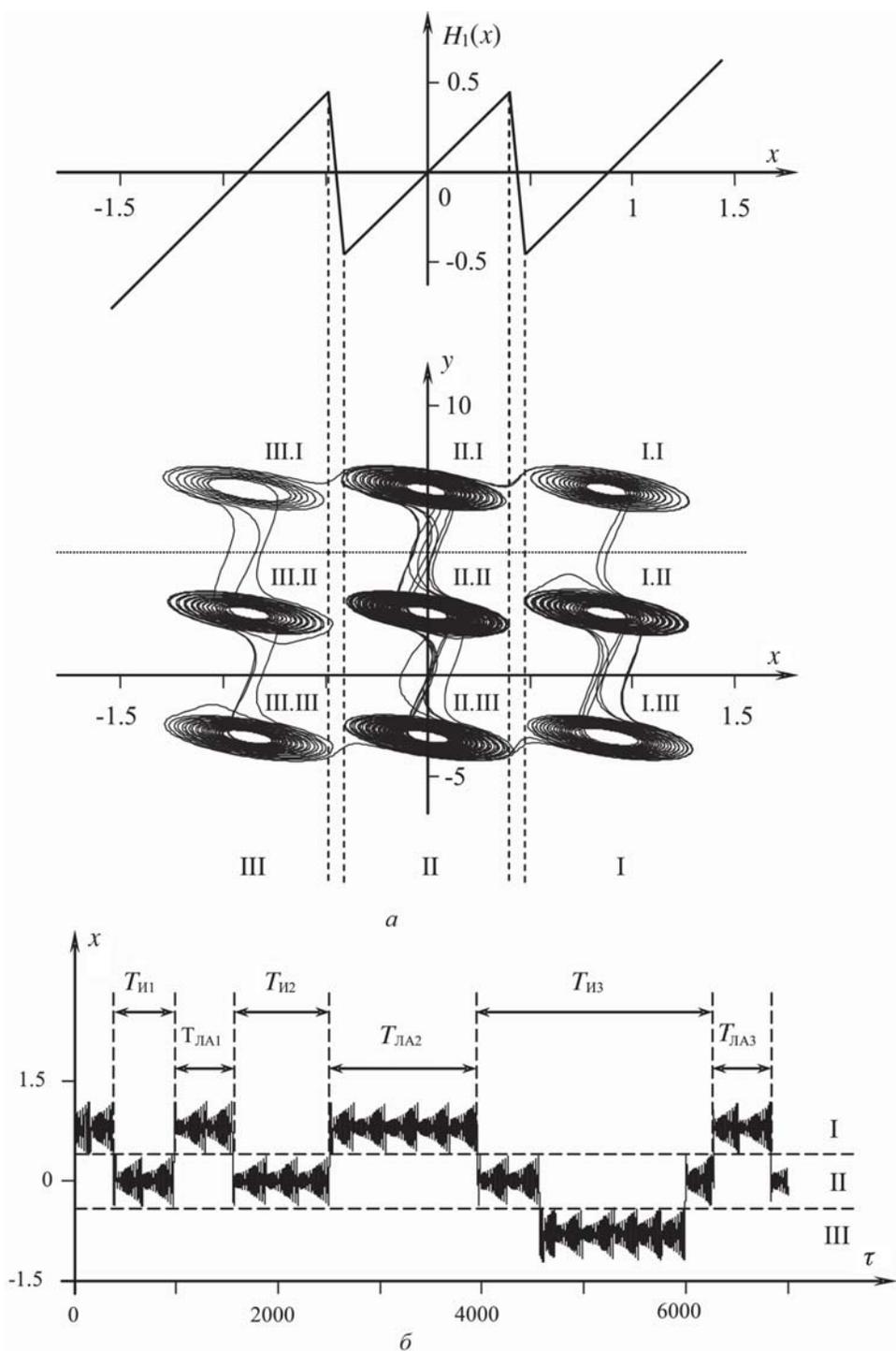


Рис. 1. *а* — нелинейная функция  $H_1(x)$  и соответствующий ей хаотический мультиаттрактор; *б* — длительности  $T_{ЛАi}$  отдельных эпизодов движения на локальном хаотическом аттракторе первого ранга I и длительности  $T_{Иi}$  интервалов между двумя последовательными эпизодами движения на этом аттракторе

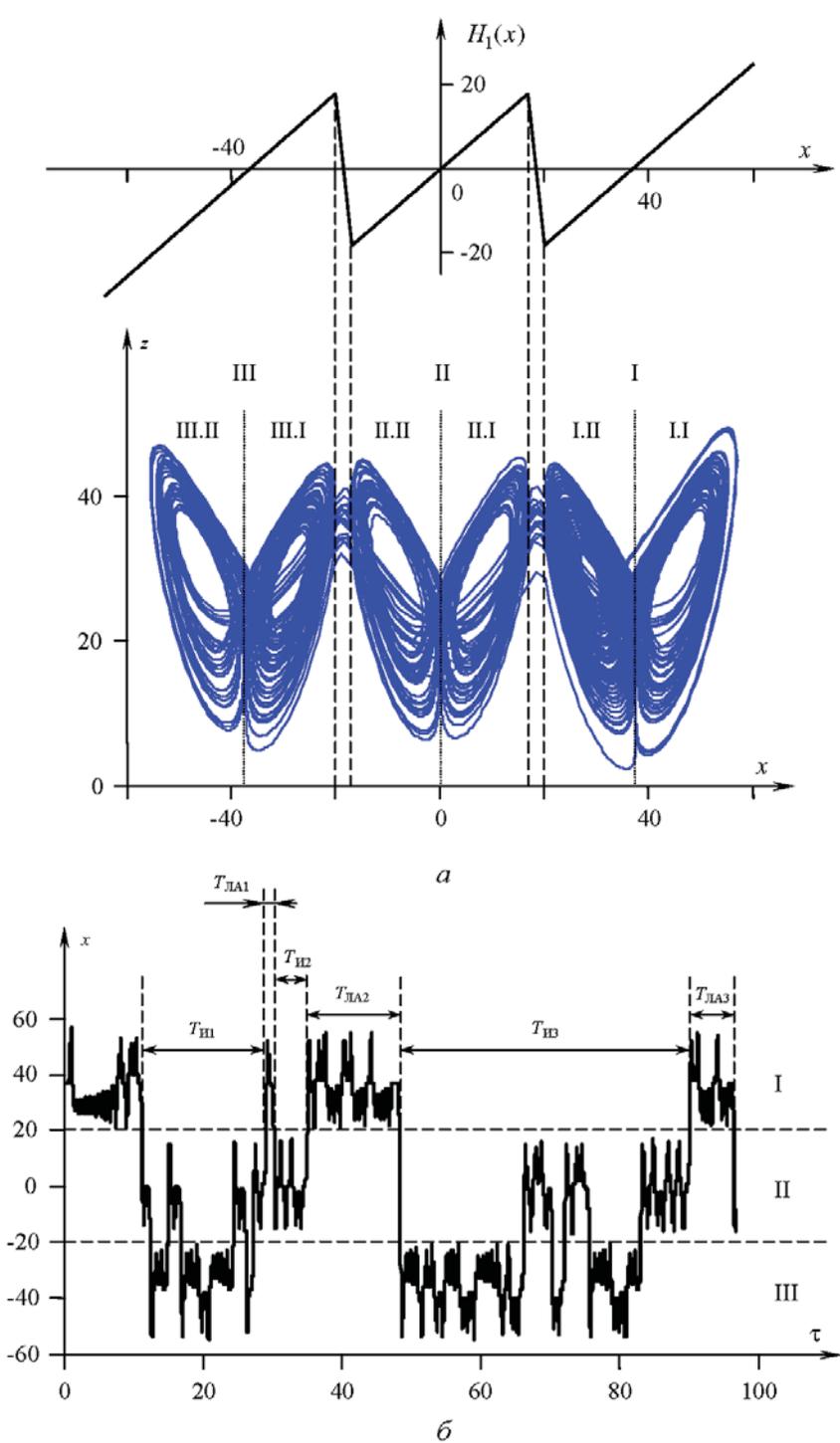


Рис. 2. *a* – нелинейная функция  $H_1(x)$  и соответствующий ей хаотический мультиаттрактор; *б* – продолжительности  $T_{\text{ЛА}i}$  отдельных эпизодов движения на локальном хаотическом аттракторе первого ранга I и длительности  $T_{\text{И}i}$  интервалов между двумя последовательными эпизодами движения на этом аттракторе

Хаотический аттрактор системы (1) при  $M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = M_3 = N_3 = 1$ ,  $d_1 = d_2 = d_3 = 10$ ,  $h_1 \approx 0,4$ ,  $h_2 \approx 5,4$ ,  $h_3 \approx 2,7$ ,  $s_1 = 0$ ,  $s_2 \approx -2,7$ ,  $s_3 \approx -0,7$ ,  $M = 0$ ,  $N = 1$ ,  $a = 14$ ,  $b = -0,5$ ,  $A = 10$ ,  $B = 9$ ,  $C = 0,3$  показан на рис. 3, а. Характеристические показатели Ляпунова при указанных значениях констант равны  $\lambda_1 \approx 0,014$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 \approx -0,83$ .

В вырожденном случае при  $M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = M_3 = N_3 = 0$ , когда  $H_1(x) = x$ ,  $H_2(y) = y$ ,  $H_3(z) = z$ , уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= f(x + y + z); \\ \frac{dy}{d\tau} &= A[f(x + y + z) + z - Cy]; \\ \frac{dz}{d\tau} &= Bx \end{aligned} \quad (2)$$

и описывают хаотические колебания, характеризующиеся аттрактором с последовательным расположением бассейнов притяжения (рис. 3, б), аналогичным аттракторам динамических систем [5, 6].

Изображение нелинейной функции  $H_j(\xi)$ , соответствующей аттрактору на рис. 3, а, приведено на рис. 3, в.

Хаотический аттрактор динамической системы (1) является совокупностью локальных аттракторов первого ранга, отвечающих системе уравнений (2), каждый из которых состоит из нескольких (на рис. 3 — из трех) локальных аттракторов нулевого ранга. Полный аттрактор имеет второй ранг.

Образование составного мультиаттрактора, показанного на рис. 3, а, достигается заменой линейных переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнениях (2) линейно-дискретными (“редуплицирующими”) функциями  $H_1(x)$ ,  $H_2(y)$  и  $H_3(z)$  в уравнениях (1).

При замене линейного аргумента линейно-дискретной функцией  $H_j$  происходит разбиение фазового пространства на фрагменты, упорядоченные вдоль соответствующей оси координат; внутри каждого фрагмента воспроизводится область фазового пространства, содержащая исходный хаотический аттрактор.

Если граница такого фрагмента фазового пространства пересекает расположенный внутри него хаотический аттрактор, фазовые траектории (теряющие, в случае уравнений (1), устойчивость в области данного пересечения) получают возможность покинуть данный фрагмент фазового пространства и перейти в соседний — на содержащийся внутри него аттрактор (см. рис. 1, а).

Частота переходов фазовых траекторий между локальными аттракторами зависит главным образом от того, насколько большую долю аттрактора отсекает указанная граница. Имеют значение также ширина

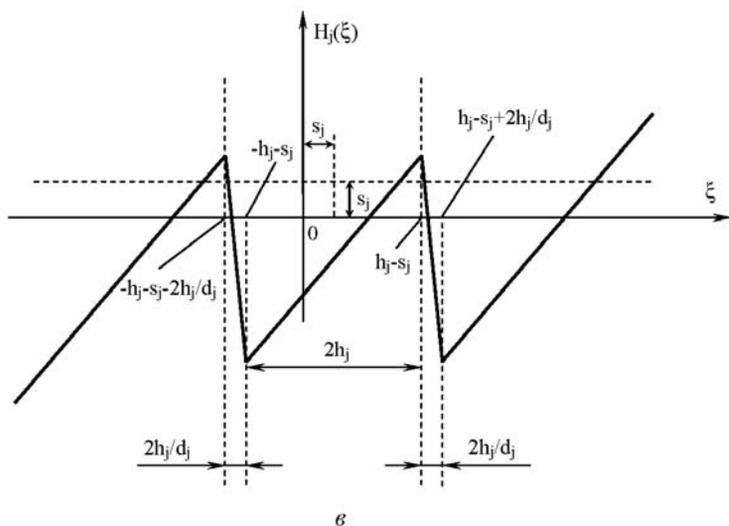
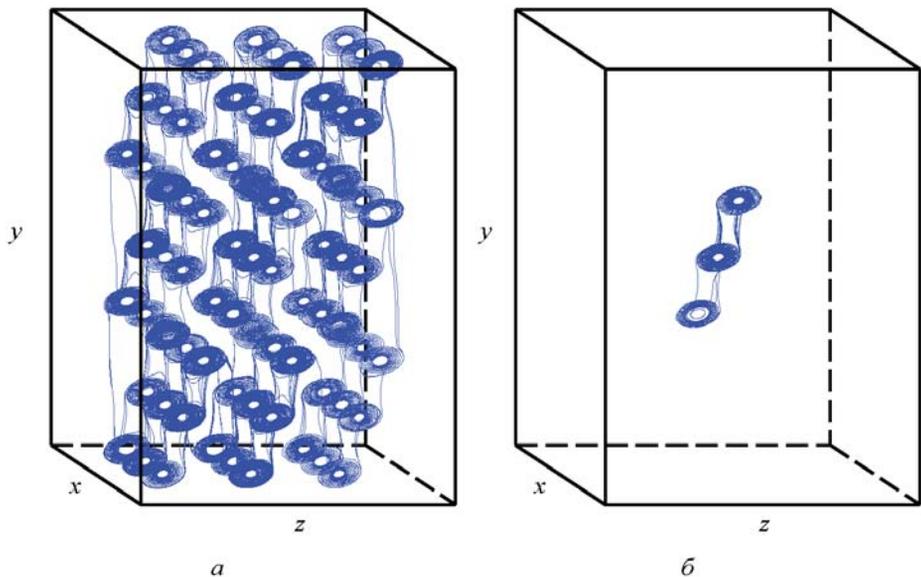


Рис. 3. *a* – иерархический хаотический аттрактор второго ранга, состоящий из 27 локальных хаотических аттракторов первого ранга (*б*), каждый из которых состоит из трех локальных хаотических аттракторов нулевого ранга; *в* – нелинейная функция  $H_i(\xi)$  при  $M_i = N_i = 1$

и свойства переходной области, если функции  $H_1, H_2, H_3$  не являются разрывными. Положение границ задают параметры  $h_j$  и  $s_j$ , ширину и свойства переходной области определяет коэффициент  $d_j$ .

Случайными величинами, которые можно исследовать статистическими методами, для составных хаотических аттракторов являются, прежде всего:

– длительность отдельного эпизода движения на заданном локальном хаотическом аттракторе;

— длительность отдельного эпизода движения вне (за пределами) заданного локального хаотического аттрактора.

Эти случайные величины можно численно охарактеризовать следующими статистическими характеристиками:

— частотным распределением длительностей отдельных эпизодов движения на заданном локальном хаотическом аттракторе;

— частотным распределением длительностей отдельных эпизодов движения вне заданного локального хаотического аттрактора;

— средним значением длительностей отдельных эпизодов движения на заданном локальном хаотическом аттракторе (см. рис. 1, *a*);

— средним значением длительностей отдельных эпизодов движения вне заданного локального хаотического аттрактора;

— дисперсией (или среднеквадратическим отклонением) длительностей отдельных эпизодов движения на заданном локальном хаотическом аттракторе;

— дисперсией (или среднеквадратическим отклонением) длительностей отдельных эпизодов движения вне заданного локального хаотического аттрактора;

— относительным суммарным временем движения на заданном локальном хаотическом аттракторе.

Под отдельным эпизодом движения на заданном локальном хаотическом аттракторе в строгом смысле следует понимать интервал времени от момента выхода траектории на данный аттрактор до того момента, когда она его покинет. Для этого необходимо определять положение сепаратрисс, вследствие чего строгое определение этих моментов времени, как правило, представляет значительную трудность. Однако почти всегда они очень незначительно отличаются от моментов пересечения траекторией границ ячейки фазового пространства, содержащей отдельный аттрактор. Поэтому при расчетах намного удобнее принять за время движения траектории на некотором локальном аттракторе время, которое траектория проводит внутри ячейки фазового пространства, содержащей данный аттрактор. Иначе говоря, под длительностью одного эпизода движения на выбранном аттракторе удобно считать время от момента входа траектории внутрь содержащей его ячейки фазового пространства, до момента ее выхода из данной ячейки. Это существенно упрощает вычисление обсуждаемых характеристик, так как границы ячеек фазового пространства задаются известными функциями  $H_1(x)$ ,  $H_2(y)$  и  $H_3(z)$ .

Введем обозначения:  ${}^r_k T_{\text{ЛA}i}$  — продолжительность  $i$ -го эпизода движения на  $k$ -м локальном аттракторе ранга  $r$  (рис. 1, *б*);  ${}^r_k T_{\text{И}i}$  — длительность  $i$ -го интервала между последовательными эпизодами движения на  $k$ -м локальном аттракторе ранга  $r$ ;  $M_{\text{ЛA}}$  — число наблюдавшихся

эпизодов движения на данном аттракторе за время наблюдения  $T_{\Sigma}$ ;  $M_{II}$  — число наблюдавшихся интервалов между последовательными эпизодами движения на данном аттракторе за время наблюдения  $T_{\Sigma}$ .

Например,  ${}^0_{I,III}T_{IIA10}$  — продолжительность 10-го эпизода движения на локальном аттракторе I.III нулевого ранга;  ${}^1_{II}T_{II3}$  — длительность 3-го интервала между последовательными эпизодами движения на локальном аттракторе II первого ранга.

Определим данные характеристики для частного случая уравнений (1), соответствующего хаотическому аттрактору, состоящему из трех локальных аттракторов первого ранга (I, II, III), каждый из которых, в свою очередь, состоит из трех локальных аттракторов нулевого ранга (см. рис. 1, *a*). Такой аттрактор реализуется при  $M_1 = N_1 = 1$ ,  $M_2 = N_2 = M_3 = N_3 = 0$ , когда  $H_2(y) = y$ ,  $H_3(z) = z$ , и соответствует уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= f(H(x) + y + z); \\ \frac{dy}{d\tau} &= A[f(H(x) + y + z) + z - Cy]; \\ \frac{dz}{d\tau} &= BH(x). \end{aligned} \quad (3)$$

В этом случае “редупликацию” исходного аттрактора осуществляет только функция  $H_1(x)$ , параметры которой ( $d_1 = 10$ ,  $h_1 \approx 0,4$ ,  $s_1 = 0$ ) те же, что и в случае аттрактора на рис. 3, *a*.

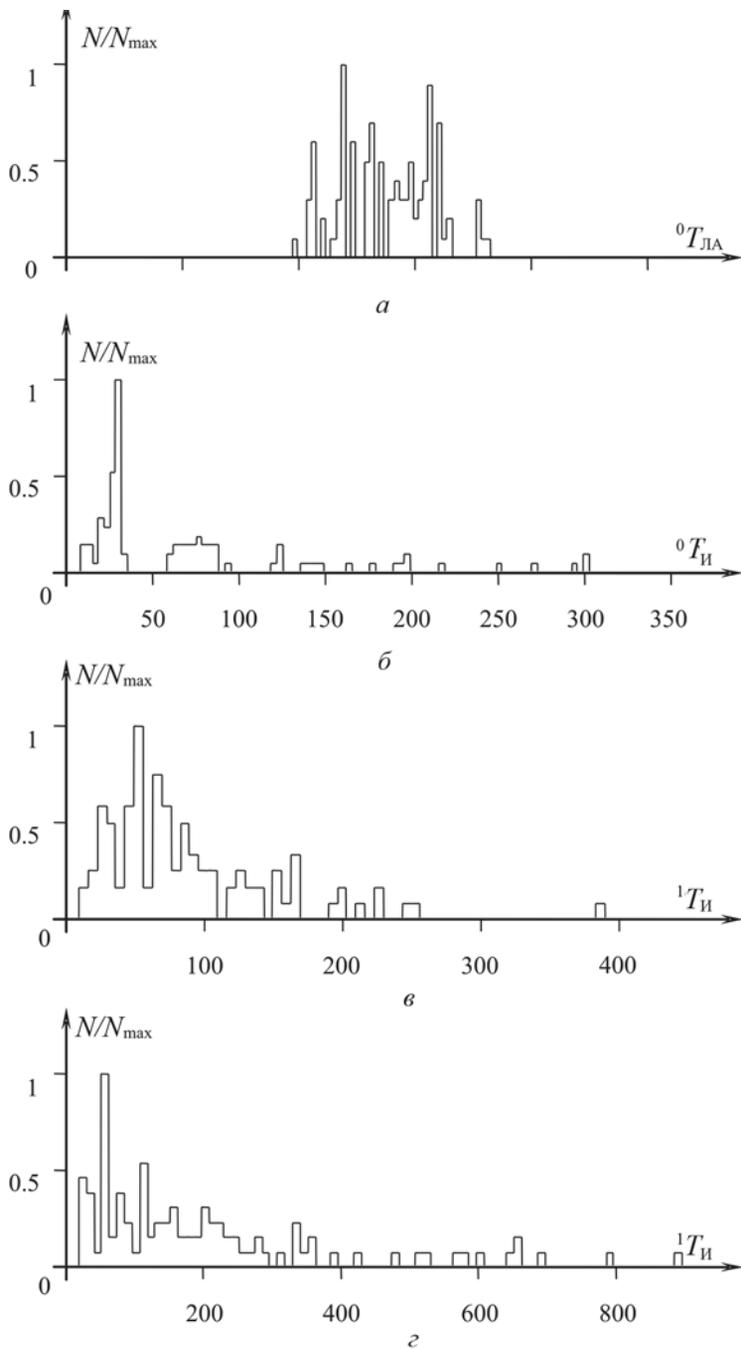
Для сравнения также определим названные характеристики аналогичного по строению мультиаттрактора, состоящего из трех локальных аттракторов, соответствующих уравнениям Лоренца, в которых переменная  $x$  заменена “редуплицирующей функцией”  $H_1(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A(y - H_1(x)); \\ \frac{dy}{d\tau} &= H_1(x)(B - z) - y; \\ \frac{dz}{d\tau} &= H_1(x)y - Cz. \end{aligned} \quad (4)$$

Хаотический аттрактор, отвечающий уравнениям (4) при  $A = 10$ ,  $B = 30$ ,  $C = 2,6$ ,  $d_1 = 10$ ,  $h_1 \approx 17$ ,  $s_1 = 0$  показан на рис. 2.

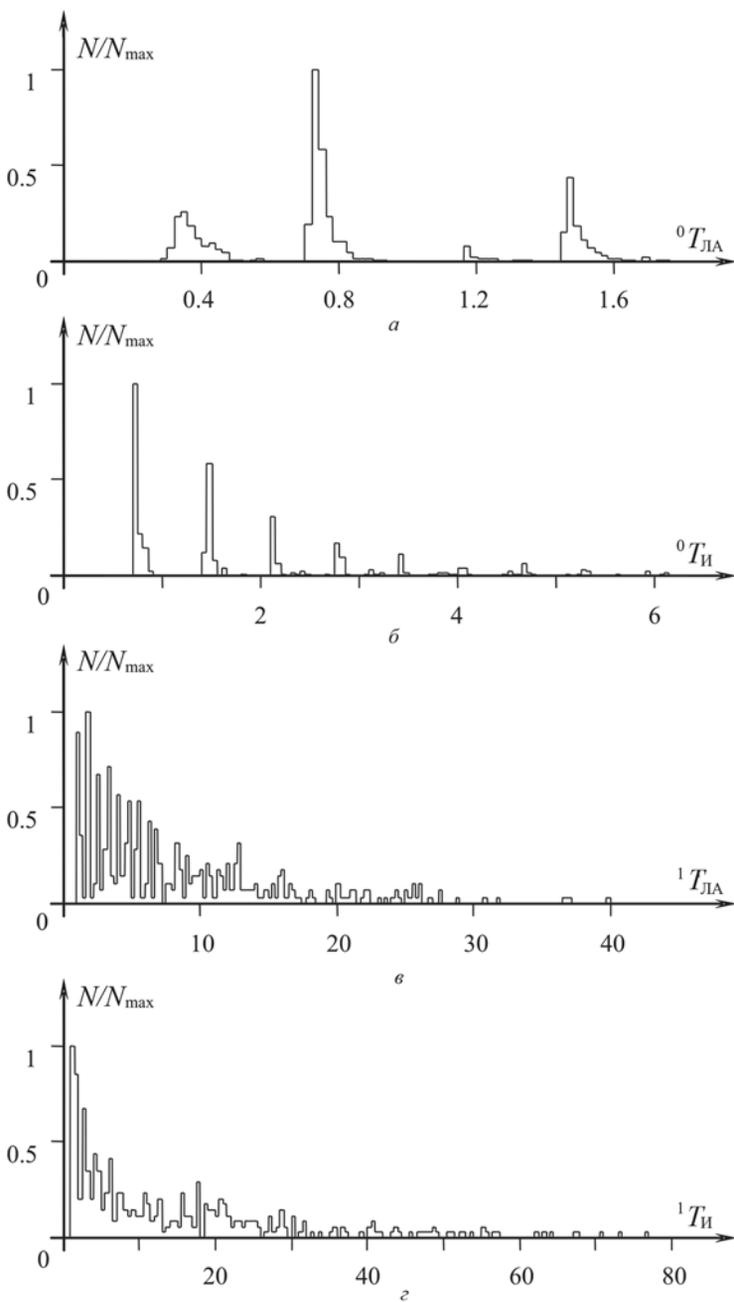
**Частотное распределение.** Частотное распределение в рассматриваемом случае представляет собой зависимость числа наблюдавшихся за время  $T_{\Sigma}$  эпизодов движения на выбранном локальном аттракторе от их длительности.

На рис. 4 и 5 приведены примеры частотных распределений длительностей отдельных эпизодов пребывания фазовых траекторий внутри и вне соответствующего локального аттрактора I.I нулевого ранга



**Рис. 4. Частотное распределение длительностей отдельных эпизодов движения в системе (3):**

*a* — интервалов движения на локальном хаотическом аттракторе нулевого ранга I.I.;  
*б* — интервалов между двумя последовательными эпизодами движения на локальном хаотическом аттракторе нулевого ранга I.I.;  
*в* — интервалов отдельных эпизодов движения на локальном хаотическом аттракторе первого ранга I;  
*г* — интервалов между двумя последовательными эпизодами движения на локальном хаотическом аттракторе первого ранга I



**Рис. 5. Частотное распределение длительностей отдельных эпизодов движения в системе (4):**

$a$  — интервалов движения на локальном хаотическом аттракторе нулевого ранга I.I;  $\bar{b}$  — интервалов между двумя последовательными эпизодами движения на локальном хаотическом аттракторе нулевого ранга I.I;  $\text{в}$  — интервалов отдельных эпизодов движения на локальном хаотическом аттракторе первого ранга I;  $\text{г}$  — интервалов между двумя последовательными эпизодами движения на локальном хаотическом аттракторе первого ранга I

(рис. 4, а, б, рис. 5, а, б) и соответствующего локального аттрактора I первого ранга (рис. 4, в, г, рис. 5, в, г) систем уравнений (3) и (4), соответственно.

Данные зависимости показывают, что эти весьма различные по своим свойствам автостохастические системы демонстрируют сходное поведение на временных масштабах, отвечающих движению на полном мультиаттракторе системы. Некоторые общие черты поведения проявляются также на временных масштабах, соответствующих движению на локальных аттракторах нулевого и первого рангов, хотя здесь значительно больше заметны различия, связанные с различиями свойств уравнений (3) и (4).

В обоих случаях заметна концентрация продолжительностей пребывания траекторий внутри и вне локальных аттракторов нулевого ранга вблизи равноотстоящих друг от друга дискретных значений, что является следствием квазипериодического характера движения в окрестностях соответствующих положений равновесия.

Интересно, что как для уравнений (3), так и для уравнений (4) значения времени движения на локальном аттракторе нулевого ранга сконцентрированы внутри ограниченного интервала, в то время как распределение значений длительности движения за пределами аттрактора нулевого ранга значительно шире, причем его спад в области больших значений представляет собой медленно убывающий “хвост”.

Хорошо заметно также качественное различие между поведением траекторий на различных временных масштабах. Так, распределение длительностей движения на аттракторе первого ранга уже не показывает никакой концентрации внутри какого-либо ограниченного интервала. Распределения продолжительностей отдельных эпизодов движения внутри и вне локальных аттракторов первого ранга (см. рис. 4, в, г, рис. 5, в, г) в целом сходны друг с другом и аналогичны распределению интервалов между двумя последовательными эпизодами движения на заданном локальном аттракторе нулевого ранга (см. рис. 4, б, рис. 5, б). Общим свойством данных распределений является большое рассеяние относительно среднего значения.

**Среднее значение и разброс длительностей отдельных эпизодов движения внутри и вне заданного локального хаотического аттрактора.** Средние значения продолжительности одного эпизода движения в пределах  $k$ -го локального аттрактора ранга  $r$  и длительности одного интервала между двумя последовательными эпизодами равны

$$\langle {}^r T_{\text{ЛА}i} \rangle = \lim_{T_{\Sigma} \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{M_{\text{ЛА}}} {}^r T_{\text{ЛА}i}}{M_{\text{ЛА}}} \quad \text{и} \quad \langle {}^r T_{\text{И}} \rangle = \lim_{T_{\Sigma} \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{M_{\text{И}}} {}^r T_{\text{И}i}}{M_{\text{И}}}.$$

Например, для уравнений (3)  $\langle {}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle \approx 27,5$ ,  $\langle {}^0_{I,I}T_{\text{И}} \rangle \approx 72$ ,  $\langle {}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle \approx 71$ ,  $\langle {}^1_{I,I}T_{\text{И}} \rangle \approx 169$  при времени наблюдения  $T_{\Sigma} = 3 \cdot 10^5$ . Видно, что при переходе от локального аттрактора нулевого ранга к аттрактору первого ранга отношение  $\frac{\langle T_{\text{И}} \rangle}{\langle T_{\text{ЛA}} \rangle}$  уменьшилось примерно в

3 раза  $\left( \frac{\langle {}^0_{I,I}T_{\text{И}} \rangle}{\langle {}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle} \approx 3, \frac{\langle {}^1_{I,I}T_{\text{И}} \rangle}{\langle {}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle} \approx 1,1 \right)$ , что очевидным образом связано со структурой аттрактора на рис. 1,  $a$  — локальных аттракторов нулевого ранга втрое больше, чем локальных аттракторов первого ранга.

Соответствующие среднеквадратические отклонения составляют:  $\sigma({}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}}) \approx 24$ ,  $\sigma({}^0_{I,I}T_{\text{И}}) \approx 69$ ,  $\sigma({}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}}) \approx 62$ ,  $\sigma({}^1_{I,I}T_{\text{И}}) \approx 186$ . Интересно, что для локальных аттракторов и нулевого и первого ранга значения отношений  $\frac{\sigma(T_{\text{ЛA}})}{\langle T_{\text{ЛA}} \rangle}$  и  $\frac{\sigma(T_{\text{И}})}{\langle T_{\text{И}} \rangle}$  лежат вблизи единицы, что является показателем приблизительно одинаковой нерегулярности движения, содержащего переходы между локальными хаотическими аттракторами первого ранга, и движения, содержащего только переходы между локальными аттракторами нулевого ранга.

В случае уравнений (4) при времени наблюдения  $T_{\Sigma} = 10^5$  получаем  $\langle {}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle \approx 0,85$ ,  $\langle {}^0_{I,I}T_{\text{И}} \rangle \approx 6,2$ ,  $\langle {}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle \approx 8,9$ ,  $\langle {}^1_{I,I}T_{\text{И}} \rangle \approx 15,8$ ,  $\sigma({}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}}) \approx 0,42$ ,  $\sigma({}^0_{I,I}T_{\text{И}}) \approx 12,6$ ,  $\sigma({}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}}) \approx 8$ ,  $\sigma({}^1_{I,I}T_{\text{И}}) \approx 19,3$ . Видно, что здесь, также как и в уравнениях (3), средняя продолжительность движения на локальном аттракторе нулевого ранга значительно меньше средней длительности интервала движения вне его. В системе (4) при переходе от локального аттрактора нулевого ранга к аттрактору первого ранга отношение  $\frac{\langle T_{\text{И}} \rangle}{\langle T_{\text{ЛA}} \rangle}$  также уменьшается, причем почти в той же степени, что и в системе (3)  $\left( \frac{\langle {}^0_{I,I}T_{\text{И}} \rangle}{\langle {}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle} \approx 7,4, \frac{\langle {}^1_{I,I}T_{\text{И}} \rangle}{\langle {}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle} \approx 1,8 \right)$ , что, вероятно, объясняется однотипным характером движения на уровне мультиаттрактора в целом.

В системе (4) имеем  $\frac{\sigma({}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}})}{\langle {}^0_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle} \approx 0,5$ ,  $\frac{\sigma({}^0_{I,I}T_{\text{И}})}{\langle {}^0_{I,I}T_{\text{И}} \rangle} \approx 2$ , что приблизительно в 2 раза соответственно меньше и больше, чем в системе (3). Но вот значения отношений  $\frac{\sigma({}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}})}{\langle {}^1_{I,I}T_{\text{ЛA}} \rangle} \approx 0,9$  и  $\frac{\sigma({}^1_{I,I}T_{\text{И}})}{\langle {}^1_{I,I}T_{\text{И}} \rangle} \approx 1,2$  практически совпадают с соответствующими значениями в системе (3); т.е. эти отношения показывают существенное различие в нерегулярности движения на уровне исходных хаотических аттракторов и значительное сходство на уровне составных мультиаттракторов.

**Относительное суммарное время движения на заданном локальном хаотическом аттракторе.** Относительное суммарное вре-

мя движения на заданном локальном хаотическом аттракторе равно

$${}^r_k to = \lim_{T_\Sigma \rightarrow \infty} \frac{\sum_i {}^r_k T_{\text{Л}Ai}}{T_\Sigma}.$$

Для системы уравнений (3) при  $T_\Sigma = 3 \cdot 10^5$  имеем  ${}^0_{I,I} to \approx 0,11$ ,  ${}^1_I to \approx 0,33$ , т.е. симметричному хаотическому аттрактору системы (3) соответствует равномерное распределение суммарного времени движения между 9 одинаковыми локальными аттракторами нулевого ранга и 3 одинаковыми локальными аттракторами первого ранга. Аналогичная картина наблюдается в системе (4), где  ${}^0_{I,I} to \approx 0,17$ ,  ${}^1_I to \approx 0,33$  при  $T_\Sigma = 1 \cdot 10^5$  (6 одинаковых аттракторов нулевого ранга и 3 одинаковых аттрактора первого ранга).

Приведенные результаты были получены путем решения уравнений движения методом Рунге–Кутты 4-го порядка (с помощью функции `rkfixed` в `MATNCAD`) и проверены сопоставлением с результатами расчета с использованием функции `Rkadapt`, которая адаптирует значение шага к скорости изменения решения, а также функций `Stiffb`, `Stiffi`, предназначенных для решения жестких систем дифференциальных уравнений.

Рассмотренные характеристики можно применить к любым хаотическим мультиаттракторам, полученным путем объединения нескольких исходных хаотических аттракторов. Их использование позволяет проводить статистическое исследование внутренней структуры объединенных аттракторов и выявлять соответствующие особенности движения, объективно сравнивать динамические системы подобного типа.

Так, сравнение уравнений (3) и (4) по данным характеристикам, показывая существенные различия между ними на уровне исходных хаотических аттракторов, демонстрирует заметное сходство динамики на уровне мультиаттрактора в целом.

Следует отметить, что эту особенность композиционных мультиаттракторов довольно трудно выявить, исследуя другие параметры колебаний, генерируемых подобными системами. Например, спектр характеристических показателей Ляпунова практически одинаков для исходного хаотического аттрактора и построенного на его основе составного мультиаттрактора.

При этом данная особенность составных мультиаттракторов представляет значительный интерес, так как показывает возможность конструирования хаотических аттракторов с наперед заданными свойствами, в значительной степени независимыми от вида исходной динамической системы.

1. М а л и н е ц к и й Г. Г., П о т а п о в А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: УРСС, 2000. – 336 с.
2. П р о к о п е н к о В. Г. Динамический аналог схемы Чуа с многосегментной нелинейностью // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 396. – № 3. – С. 317–323.
3. П а т е н т Р Ф 2321155. Генератор хаотических колебаний / В.Г. Прокопенко. Оpubл. 2008, БИПМ № 9.
4. S u y k e n s J. A. K., H u a n g A., C h u a L O. A family of  $n$ -scroll attractors // Int. J. Electron. Commun. – 1997.– Vol. 51. No 3. – С. 131–138
5. П р о к о п е н к о В. Г. Генераторы хаотических колебаний на основе полупроводниковых источников отрицательного сопротивления с многосегментной вольт-амперной характеристикой // Микроэлектроника. – 2004. – Т. 33. – № 6. – С. 468–478.
6. Патент РФ 2207708. Генератор гиперхаотических колебаний / В.Г. Прокопенко. Оpubл. 2003, БИПМ № 18.

Статья поступила в редакцию 18.12.2008

Вадим Георгиевич Прокопенко — ведущий конструктор НКБ “Миус” Таганрогского государственного радиотехнического университета, канд. техн. наук. Автор более 100 научных работ в области теории автономных автостохастических систем, полупроводниковой электроники, высокостабильных источников опорной частоты.

V.G. Prokopenko — Ph. D. (Eng.), leading designer of the design bureau “Mius” of the Taganrog State Radio Engineering University. Author of more than 100 publications in the field of the theory of independent auto stochastic systems, semiconductor electronics, highly-stable sources of basic frequency.

