УДК 528.856.044.1

Р. И. Шувалов

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОГРАММЫ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ПО ДАННЫМ СЪЕМОК КОСМИЧЕСКОГО РАДИОЛОКАТОРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ АНТЕННЫ

*Рассмотрена математическая модель формирования топографической интерферограммы поверхности Земли по данным съемок радиолокатора с синтезированной апертурой антенны с околоземной орбиты. Получены соотношения, связывающие локальные углы наклона топографического рельефа с локальными углами наклона фазового рельефа на интерферограмме, которые необходимы для повышения точности построения цифровых моделей рельефа Земли методом космической радиолокационной топографической интерферометрии.*

**E-mail: Shuvalov.R.BMSTU@mail.ru**

***Ключевые слова***: радиолокатор, синтезированная апертура, топография, радиолокационная интерферометрия, топографическая интерферограмма.

Одним из важных приложений данных съемок радиолокатора с синтезированной апертурой антенны (РСА), устанавливаемого на борту космического аппарата, является построение цифровых моделей рельефа (ЦМР) поверхности Земли. Являясь активным и когерентным датчиком, РСА способен выполнять интерферометрические измерения. Интерферометрический метод измерений основан на использовании эффекта интерференции волн и состоит в сравнении мало отличающихся друг от друга волновых фронтов [1]. Потенциальная точность метода составляет несколько долей используемой длины волны и, как правило, превышает точность других методов измерений. Интерферометрический метод получения ЦМР подстилающей поверхности по данным РСА состоит в формировании топографической интерферограммы по результатам совместной обработки данных двух радиолокационных съемок и извлечении из нее топографической информации [2–5]. Метод аналогичен известному в экспериментальной механике методу смещенного источника [1].

Получаемая топографическая интерферограмма поверхности Земли искажена действием фазового шума и, в силу геометрии съемки, может содержать области неоднозначности и области отсутствия адекватной фазы. Для успешного извлечения из такой интерферограммы топографической информации необходима соответствующая математическая модель. В настоящей работе рассматривается математическая модель формирования топографической интерферограммы поверхности Земли по данным съемок РСА с околоземной орбиты. Цель работы — получение соотношений, связывающих локальные углы наклона топографического рельефа с углами наклона фазового рельефа на интерферограмме. Под фазовым рельефом понимается поверхность, изображающая зависимость фазы от пространственных координат.

**Формирование топографической интерферограммы.** Радиолокационная съемка заключается в облучении подстилающей поверхности радиоимпульсами и измерении амплитуды и фазы вернувшегося к радиолокатору отраженного электромагнитного сигнала. Зарегистрированный сигнал от различных точек подстилающей поверхности проходит специальную обработку, и формируется матрица комплексных величин — цифровое радиолокационное изображение (РЛИ) подстилающей поверхности

$$I = \{i_{mn}\}, \quad m = 1, \ldots, M, \quad n = 1, \ldots, N;$$

РЛИ формируется в системе координат "азимут–наклонная дальность", индексы $m$ и $n$ определяют положение точки на оси азимута и на оси наклонной дальности соответственно. Ось азимута совпадает с направлением орбитального движения РСА. Положение образа элемента подстилающей поверхности на оси наклонной дальности определяется фактической дальностью от РСА до этого элемента на момент его траверса. Два изображения одного и того же участка подстилающей поверхности, полученные под различными углами наблюдения при определенных ограничениях на геометрию съемки, образуют интерферометрическую пару. Полученные по результатам съемки снимки $I_1$ и $I_2$ интерферометрической пары пространственно совмещаются, т.е. между точками снимков устанавливается взаимнооднозначное соответствие, при котором каждая точка первого снимка и соответствующая ей точка второго снимка отвечают одной и той же точке подстилающей поверхности. Для двух комплексных значений радиолокационного сигнала, соответствующих одной и той же точке подстилающей поверхности, определяется комплексная корреляционная функция [5]

$$C(i_1, i_2) = \frac{\mathrm{E}[i_1 \, i_2^*]}{\sqrt{\mathrm{E}\left[|i_1|^2\right] \cdot \mathrm{E}\left[|i_2|^2\right]}},$$

где $i_1$, $i_2$ — комплексные значения в соответственных точках РЛИ интерферометрической пары; $\mathrm{E}[\cdot]$ — оператор математического ожидания по множеству элементарных отражателей внутри соответствующей ячейки пространственного разрешения РСА на подстилающей поверхности. Фаза $\varphi = \arg[C]$ и амплитуда $\rho = |C|$ комплексной корреляционной функции в точке называются интерферометрической фазой и когерентностью. Двумерный массив $\vec{\Phi} = \{\varphi_{mn}\}$ значений интерферометрической фазы называется интерферограммой, а двумерный массив $\vec{\mathrm{P}} = \{\rho_{mn}\}$ значений когерентности — матрицей когерентности.

**Математическая модель формирования интерферограммы.** Математическая модель формирования топографической интерферограммы включает в себя систему алгебраических уравнений, связывающую топографическую информацию, параметры съемки и фазовую информацию, а также модель искажающего действия фазового шума. Система уравнений, в предположении сферичности Земли, имеет следующий вид (рис. 1, *а*):

$$\psi = \frac{4\pi}{\lambda}\left(r_2 - r_1\right); \tag{1}$$

$$r_2^2 = r_1^2 + B^2 + 2r_1 B \sin\left(\alpha - \gamma\right); \tag{2}$$

$$\gamma = \arccos\frac{\left(R+H\right)^2 + r_1^2 - \left(R+h\right)^2}{2\left(R+H\right) r_1}, \tag{3}$$

где $\psi$ — абсолютная интерферометрическая фаза, соответствующая данной точке на интерферограмме; $r_1$ и $r_2$ — наклонные дальности,

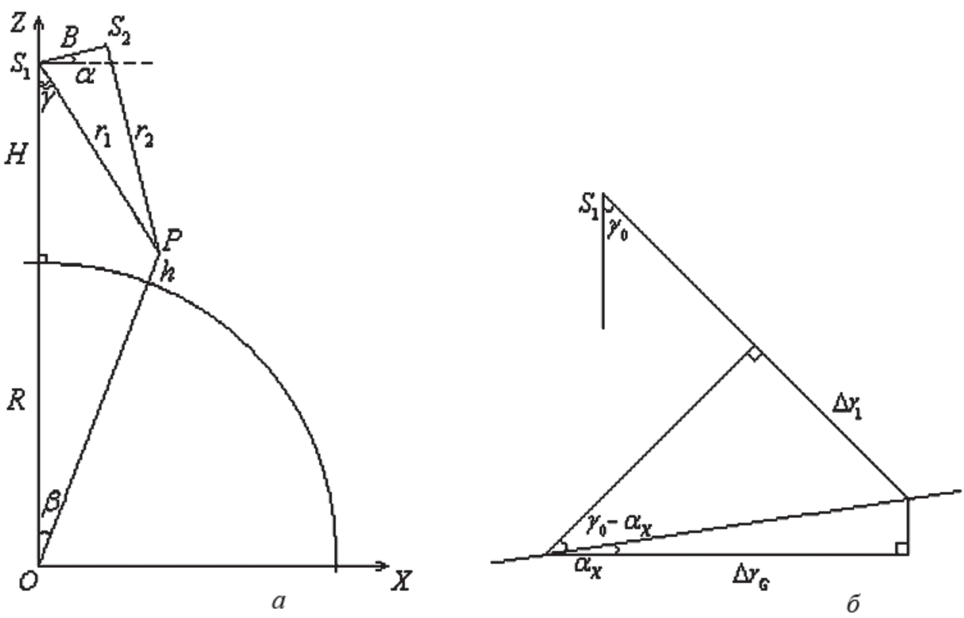


**Рис. 1. Геометрическая модель интерферометрических измерений:**
*а* — измерения в плоскости, перпендикулярной оси азимута; первая съемка точки $P$ проводится из положения $S_1$, вторая — из положения $S_2$ (Земля предполагается сферической); *б* — связь приращения наклонной дальности $\Delta r_1$ с приращением наземной дальности $\Delta r_G$ при ненулевом угле наклона рельефа $\alpha_X \neq 0$ (фронт волны предполагается плоским)

соответствующие данной точке на момент первой и второй съемок; $\lambda$ — рабочая длина волны РСА; $B$ — длина базовой линии; $\alpha$ — угол ориентации базовой линии; $\gamma$ — угол наблюдения, соответствующий первой съемке; $R$ — радиус Земли; $H$ — высота РСА на момент первой съемки; $h$ — высота рельефа в данной точке. При фиксированных значениях параметров съемки (т.е. $R$, $H$, $B$, $\alpha$), согласно системе уравнений (1)–(3), абсолютная интерферометрическая фаза $\psi$ является функцией наклонной дальности $r_1$ и высоты рельефа $h$:

$$\psi = \psi\left(r_1, h\right). \tag{4}$$

Зависимость (4) — нелинейная и может быть получена в явном виде путем подстановки (3) в (2) и (2) в (1). Линеаризация зависимости (4) в окрестности точки $(r_0, 0)$ приводит к выражению

$$\psi\left(r_1, h\right) \approx \psi\left(r_0, 0\right) + \frac{\partial\psi}{\partial r_1}\left(r_1 - r_0\right) + \frac{\partial\psi}{\partial h}h, \tag{5}$$

где $r_0$ — наклонная дальность до центра кадра.

Формулу (5) перепишем в виде

$$\psi\left(r_1, h\right) \approx \psi_0 + \psi_R + \psi_T, \tag{6}$$

где

$$\psi_0 = \psi\left(r_0, 0\right), \quad \psi_R = \frac{\partial\psi}{\partial r_1}\left(r_1 - r_0\right), \quad \psi_T = \frac{\partial\psi}{\partial h}h.$$

Первая компонента ($\psi_0$) — постоянная по полю интерферограммы и полезной информации не несет. Вторая компонента ($\psi_R$) описывает изменения наклонной дальности по полю кадра. Третья компонента — топографическая фаза $\psi_т$ — описывает изменения высоты рельефа по полю кадра. Операция компенсации $\psi_R$ называется устранением набега фазы по направлению наклонной дальности. Вычислим производные, входящие в формулу (5). Дифференцируя (1) с учетом (2) и (3), находим

$$\frac{\partial\psi}{\partial r_1} = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{r_1 - r_2 + B\sin\left(\alpha - \gamma\right)}{r_2}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial h} = -\frac{4\pi}{\lambda}\frac{B_\perp}{r_2}\frac{R+h}{R+H}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\left(R+H\right)^2 + r_1^2 - \left(R+h\right)^2}{2\left(R+H\right)r_1}\right)^2}}, \tag{8}$$

где $B_\perp = B\cos\left(\alpha - \gamma\right)$.

Пусть $\gamma_0$ — угол наблюдения, соответствующий центру кадра. Для характерных значений параметров космической съемки РСА справедливы соотношения: $h \ll R$, $H \ll R$, $r_1 \gg B$, $r_2 \gg B$ и, как следствие, приближенные равенства $\dfrac{R+h}{R+H} \approx 1$, $r_2 \approx r_1 \approx r_0$, которые позволяют упростить формулу (8):

$$\frac{\partial\psi}{\partial h} \cong -\frac{4\pi}{\lambda}\frac{B_\perp}{r_0 \sin\gamma_0}. \tag{9}$$

Отметим, что знак производной $\dfrac{\partial\psi}{\partial h}$ определяется знаком величины $B_\perp$ (формула (8)), который, в свою очередь, определяется величиной угла $\chi = \alpha - \gamma$. Это обстоятельство учитывается при вычислении топографической интерферограммы, для которой обычно выполняется неравенство $\dfrac{\partial\psi_T}{\partial h} > 0$. Поэтому

$$d\psi_T = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{|B_\perp|}{r_0 \sin\gamma_0}dh. \tag{10}$$

Пусть заданы цифровая топографическая интерферограмма $\Psi = \{\psi_{mn}\}$ (массив абсолютных значений фазы) в системе координат "азимут–наклонная дальность" и ЦМР $H = \{h_{mn}\}$ в системе координат "азимут–наземная дальность". Наземная дальность — это расстояние от подспутниковой точки, измеряемое вдоль проекции направления наклонной дальности на поверхность Земли. Углом наклона фазового рельефа по направлению наклонной дальности будем называть величину $\beta_X = \operatorname{arctg}\dfrac{\psi_{m,n+1} - \psi_{mn}}{n+1-n}$, углом наклона фазового рельефа по направлению азимута величину $\beta_Y = \operatorname{arctg}\dfrac{\psi_{m+1,n} - \psi_{mn}}{m+1-m}$, углом наклона топографического рельефа по направлению наземной дальности — величину $\alpha_X = \operatorname{arctg}\dfrac{h_{m,n+1} - h_{mn}}{\Delta r_G}$, а углом наклона топографического рельефа по направлению азимута — величину $\alpha_Y = \operatorname{arctg}\dfrac{h_{m+1,n} - h_{mn}}{\Delta a}$. Здесь $\Delta r_G$ и $\Delta a$ — размеры пикселя снимка по направлениям наземной дальности и азимута соответственно. Найдем соотношения, связывающие углы наклона фазового рельефа с углами наклона топографического рельефа. Из (10) имеем

$$\operatorname{tg}\beta_X = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{|B_\perp|\,\Delta r_S}{r_0 \sin\gamma_0}\operatorname{tg}\alpha_X \frac{dr_G}{dr_1}, \tag{11}$$

где $\Delta r_S = \Delta r_1$ — размер пикселя снимка по направлению наклонной дальности; $r_G$ — наземная дальность, определяемая выражением $r_G = R\beta$ (см. рис. 1, *а*). Из рис. 1, *а* находим

$$r_1 = \sqrt{(R+H)^2 + (R+h)^2 - 2\,(R+H)\,(R+h)\cos\beta}, \tag{12}$$

и после дифференцирования (12) имеем

$$\frac{dr_1}{dr_G} = \\ = \frac{(R+h)\,\dfrac{dh}{dr_G} - (R+H)\,\dfrac{dh}{dr_G}\cos\beta + (R+H)\,(R+h)\sin\beta\dfrac{d\beta}{dr_G}}{r_1}. \quad (13)$$

Поскольку $r_G = R\beta$, то $\dfrac{d\beta}{dr_G} = \dfrac{1}{R}$. С учетом того, что для характерных значений параметров космической радиолокационной съемки $R \gg H$, $R \gg h$ и $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$, формула (13) упрощается:

$$\frac{dr_1}{dr_G} = \frac{h-H}{r_1}\frac{dh}{dr_G} + \frac{r_G}{r_1}. \quad (14)$$

Далее, поскольку $\dfrac{h-H}{r_1} \approx -\cos\gamma_0$, $\dfrac{r_G}{r_1} \approx \sin\gamma_0$ и $\dfrac{dh}{dr_G} = \operatorname{tg}\alpha_X$, формула (14) принимает вид

$$\frac{dr_1}{dr_G} = \frac{\sin(\gamma_0 - \alpha_X)}{\cos\alpha_X}. \quad (15)$$

Формула (15) имеет простую геометрическую интерпретацию (рис. 1, *б*). С учетом (15) формула (11) принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg}\beta_X = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{|B_\perp|\,\Delta r_1}{r_0\sin\gamma_0}\frac{\sin\alpha_X}{\sin(\gamma_0-\alpha_X)}, \quad \alpha_X \in \left(-\frac{\pi}{2};\gamma\right). \quad (16)$$

Теперь найдем аналогичную формулу для направления азимута. Из соотношения (10) имеем

$$\frac{\partial\psi_T}{\partial a} = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{|B_\perp|}{r_0\sin\gamma_0}\frac{\partial h}{\partial a}, \quad (17)$$

где $a$ — азимутальная координата, отсчитываемая вдоль траектории движения РСА.

Для упрощения дальнейших выкладок будем исходить из геометрии обзора в предположении плоской поверхности Земли. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке на поверхности Земли и осями: $A$ — ось азимута, $R_G$ — ось наземной дальности, $Z$ — ось высоты над поверхностью Земли (рис. 2, *а*).

Пусть радиолокатор движется прямолинейно и равномерно вдоль прямой, определяемой пересечением плоскостей $z = H = \text{const}$ и $r_G = 0 = \text{const}$ (см. рис. 2, *а*). Пусть в фиксированный момент времени радиолокатор расположен в точке $(a, 0, H)$ и точка подстилающей поверхности, расположенная на заданной наклонной дальности $r_S$, имеет координаты $(a, r_G, h)$. Предположим также, что соответствие точек подстилающей поверхности точкам снимка является

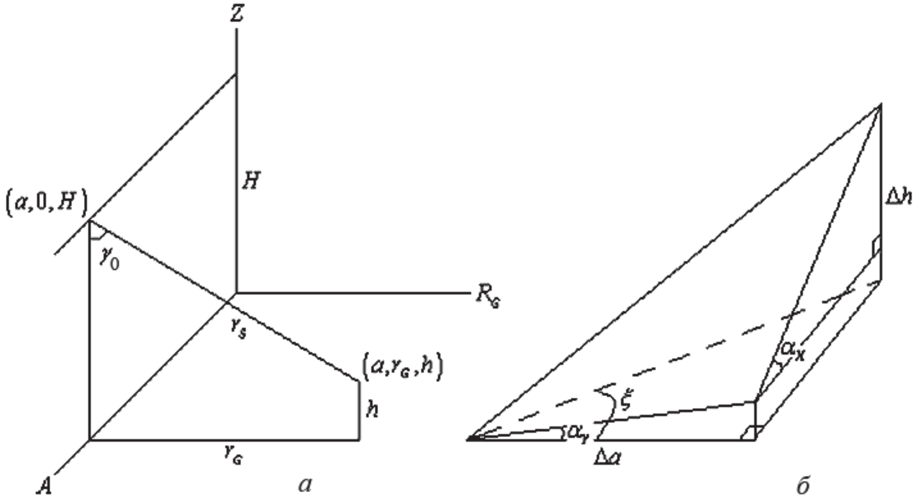


**Рис. 2. Геометрия сканирования подстилающей поверхности в направлении полета РСА (*а*) и вспомогательные геометрические построения (*б*)**

взаимно-однозначным. Тогда на подстилающей поверхности через каждую точку можно провести единственную линию равной наклонной дальности, которую РСА "вычерчивает", совершая азимутальное перемещение. Требуется найти приращение топографической фазы $\Delta\psi_T$, обусловленное приращением криволинейной координаты вдоль линии $r_1 =$ const. Зададим некоторую точку $P$ на подстилающей поверхности и ее малую окрестность. Пусть $P'$ — ортогональная проекция точки $P$, а кривая $r_G = r_G(a)$ — ортогональная проекция кривой равной наклонной дальности $r_S =$ const на плоскость нулевой высоты $z = 0$ в соответствующей окрестности точки $P'$. Если окрестность достаточно мала, проекция кривой равной дальности будет описываться однозначной функцией $r_G = r_G(a)$. Найдем производную $\dfrac{\partial r_G}{\partial a}$ в точке $P'$. Из принятой геометрии обзора непосредственно следует

$$r_S = \sqrt{r_G^2(a) + (H - h(a, r_G(a)))^2}. \tag{18}$$

Условие постоянства наклонной дальности с изменением азимута (перемещением РСА) имеет вид

$$\frac{dr_S}{da} = 0. \tag{19}$$

Дифференцируя соотношение (18), получаем

$$\frac{dr_S}{da} = \frac{r_G(a)\dfrac{\partial r_G(a)}{\partial a} - (H - h)\left(\dfrac{\partial h}{\partial a} + \dfrac{\partial h}{\partial r_G}\dfrac{\partial r_G}{\partial a}\right)}{r_S}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), приходим к уравнению

$$\frac{1}{r_S} r_G(a) \frac{\partial r_G(a)}{\partial a} - \frac{H - h(a, r_G(a))}{r_S} \left( \operatorname{tg} \alpha_Y + \operatorname{tg} \alpha_X \frac{\partial r_G(a)}{\partial a} \right) = 0. \tag{21}$$

Учитывая что $\dfrac{r_G}{r_S} = \sin \gamma_0$, $\dfrac{H - h}{r_S} = \cos \gamma_0$ (см. рис. 2, *а*), разрешая уравнение (21) относительно производной $\dfrac{\partial r_G}{\partial a}$, получаем

$$\frac{\partial r_G}{\partial a} = \frac{\cos \gamma_0 \cos \alpha_X \operatorname{tg} \alpha_Y}{\sin(\gamma_0 - \alpha_X)}. \tag{22}$$

Обозначив $\dfrac{\partial r_G}{\partial a} = \operatorname{tg} \xi$, из принятой геометрии обзора (рис. 2) можно записать

$$\frac{\partial h}{\partial a} = \operatorname{tg} \alpha_Y + \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \alpha_X. \tag{23}$$

Подставив в формулу (23) выражение (22), имеем

$$\frac{\partial h}{\partial a} = \operatorname{tg} \alpha_Y \frac{\sin \gamma_0 \cos \alpha_X}{\sin(\gamma_0 - \alpha_X)}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (17), получим

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} \beta_Y = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{|B_\perp| \, \Delta a}{r_0} \frac{\operatorname{tg} \alpha_Y \cos \alpha_X}{\sin(\gamma_0 - \alpha_X)}, \\ \alpha_X \in \left( -\frac{\pi}{2}; \gamma \right), \quad \alpha_Y \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right). \end{gathered} \tag{25}$$

Формулы (16) и (25) связывают углы наклона фазового рельефа с углами наклона топографического рельефа (рис. 3). При стремлении угла наклона рельефа по направлению дальности к значению угла наблюдения ($\alpha_X \to \gamma$) наклон фазового рельефа по направлению дальности возрастает до бесконечности: $\Delta_{TX} = \operatorname{tg}(\beta_X) \to +\infty$, а при убывании $\left( \alpha_X \to -\dfrac{\pi}{2} \right)$ этот наклон имеет асимптотический предел $\Delta_{TX} = \Delta_{TX}^* = \operatorname{tg} \beta_X^*$. При этом наклон фазового рельефа по направлению дальности зависит лишь от угла наклона рельефа в этом же направлении: $\Delta_{TX} = \Delta_{TX}(\alpha_X)$ (рис. 3, *а*).

Обращая формулы (16) и (25), получаем формулы обратного преобразования в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} \alpha_X = \frac{\lambda r_0 \sin^2 \gamma_0 \operatorname{tg} \beta_X}{4\pi \, |B_\perp| \, \Delta r_S + \lambda r_0 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \operatorname{tg} \beta_X}; \\ \operatorname{tg} \alpha_Y = \frac{\lambda r_0 \Delta r_S \sin \gamma_0 \operatorname{tg} \beta_Y}{4\pi \, |B_\perp| \, \Delta r_S \Delta a + \lambda r_0 \Delta a \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \operatorname{tg} \beta_X}; \\ \beta_X \in \left( \beta_X^*; \frac{\pi}{2} \right), \quad \beta_Y \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right), \end{gathered}$$

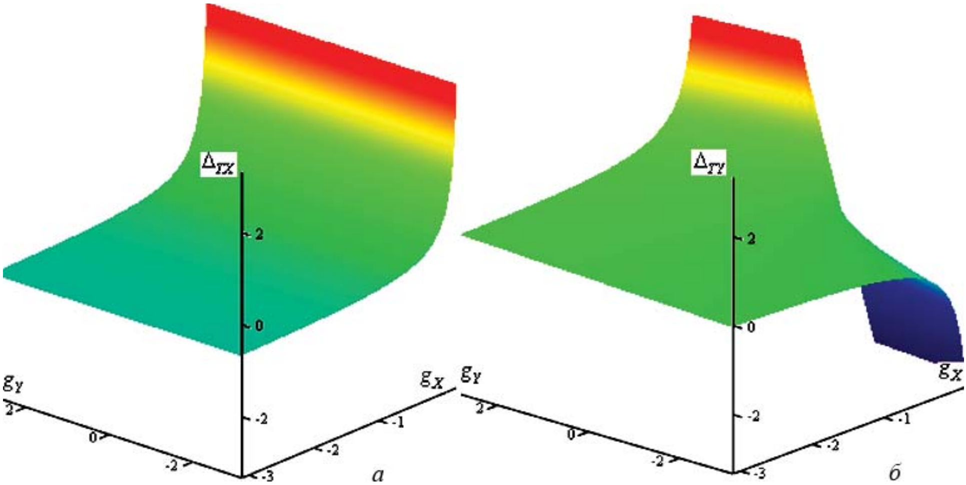


**Рис. 3. Зависимость физической фазовой разности по направлению наземной дальности $\Delta_{TX} = \operatorname{tg}\beta_X$ (*а*) и физической фазовой разности по направлению азимута $\Delta_{TY} = \operatorname{tg}\beta_Y$ от компонент топографического градиента $g_X = \operatorname{tg}\alpha_X$ и $g_Y = \operatorname{tg}\alpha_Y$ при параметрах съемки, характерных для РСА ERS-1: $r_0 = 853$ км, $\lambda = 5{,}7$ см, $\Delta r_S = 8$ м, $\Delta a = 4$ м, $\gamma_0 = 22°$, $B_\perp = 150$ м**

$$\beta_X^* = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4\pi}{\lambda}\frac{|B_\perp|\,\Delta r_S}{r_0 \sin\gamma_0 \cos\gamma_0}\right).$$

Наличие нижней границы $\beta_X^*$ следует из условия непрерывности рельефа: $|\alpha_X| < \dfrac{\pi}{2}$.

Отметим, что в работе [6] аналогичные соотношения между мгновенными значениями пространственной частоты (instantaneous frequencies) интерферограммы по дальности и азимуту и локальными углами наклона рельефа в соответствующей точке получены другим способом. Они получены для интерферограммы, содержащей наряду с топографической фазой фазу наземной дальности, и переходят в формулы (16), (25) после компенсации частоты, обусловленной наземной дальностью, и соответствующей замены переменных.

**Фазовый шум.** Поскольку приемная аппаратура измеряет лишь главное значение фазы электромагнитного сигнала, наблюдаемая интерферометрическая фаза $\varphi$ определена на отрезке длиной $2\pi$ радиан ($-\pi \leqslant \varphi < \pi$). Наблюдаемая фаза $\varphi$ содержит составляющую $\varphi_N$ фазового шума, обусловленного декорреляцией снимков интерферометрической пары, и полезную составляющую $\varphi_T$, представляющую собой главное значение абсолютной полезной фазы $\psi_T$. Модель взаимодействия полезной и шумовой составляющих фазы имеет вид [7]

$$\varphi = W\left[\varphi_T + \varphi_N\right], \quad \varphi_T = W\left[\psi_T\right]. \tag{26}$$

Здесь символом $W[\cdot]$ обозначен оператор свертки по модулю $2\pi$

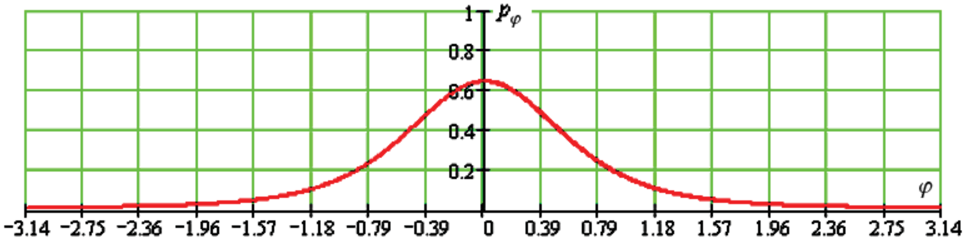


**Рис. 4. Плотность распределения вероятностей наблюдаемой интерферометрической фазы $\varphi$ на отрезке $[-\pi;\pi)$ при значениях $\rho = 0{,}5$, $L = 4$, $\varphi_T = 0$**

радиан, определяемый выражением [8]

$$W[\psi] = \arg\{\exp\{j\psi\}\}, \quad \psi \in \mathbb{R},$$

где $j$ — мнимая единица. Фазовый шум предполагается некоррелированным с полезной составляющей фазы, а его математическое ожидание равным нулю [9, 10]. При этих допущениях плотность распределения (по реализациям в точке) наблюдаемой на интерферограмме фазы $\varphi$ на отрезке $[-\pi;\pi)$ имеет вид [9] (рис. 4)

$$p_\Phi(\varphi|\rho,\varphi_T,L) = \frac{\Gamma\left(L+\frac{1}{2}\right)\left(1-\rho^2\right)^L\beta}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(L)\left(1-\beta^2\right)^{L+\frac{1}{2}}} + \frac{\left(1-\rho^2\right)^L}{2\pi}\cdot F\left(L,1;\frac{1}{2};\beta^2\right),$$
$$\beta = \rho\cos(\varphi-\varphi_T), \tag{27}$$

где $\varphi_T$ — математическое ожидание фазы $\varphi$; $\rho$ — когерентность; $L$ — число независимых наблюдений, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $F(\cdot)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Плотность распределения вероятностей (27) наблюдаемой интерферометрической фазы является периодической функцией с периодом $2\pi$ радиан. Поэтому ее можно рассматривать как плотность распределения вероятностей абсолютной интерферометрической фазы $\psi$ на отрезке $[\psi_T-\pi;\psi_T+\pi)$, заменив аргумент $\varphi\in[-\pi;\pi)$ аргументом $\psi\in[\psi_T-\pi;\psi_T+\pi)$, а параметр $\varphi_T$ параметром $\psi_T$. Среднеквадратическое отклонение $\sigma_\Phi(\rho,L)$ наблюдаемой фазы $\varphi$ от действительного значения $\varphi_T$ по определению выражается формулой (рис. 5)

$$\sigma_\Phi(\rho,L) = \left(\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\varphi-\varphi_0)^2\,p_\Phi(\varphi|\rho,\varphi_0,L)\,d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_0 = 0. \tag{28}$$

**Фазовые разности.** Введем обозначения: $\delta$ — относительная фазовая разность; $\Delta$ – абсолютная фазовая разность; $\Delta_T$ — физическая фазовая разность; $\delta_N$ — шумовая фазовая разность. Введенные фазо-

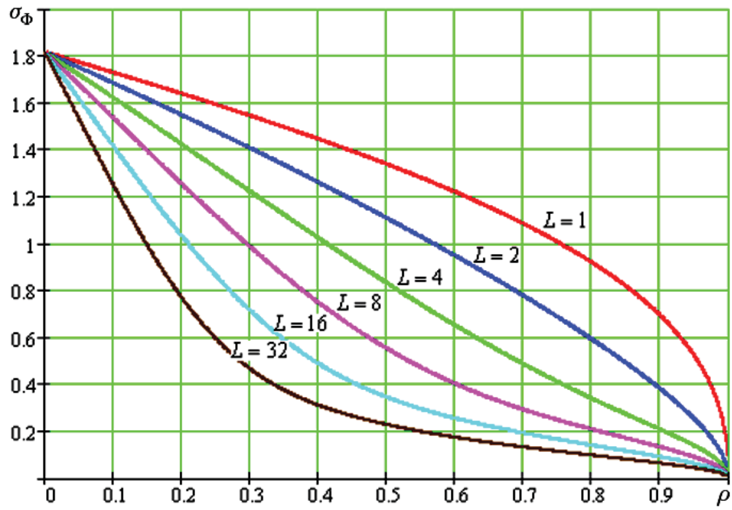


**Рис. 5. Зависимость среднеквадратического отклонения $\sigma_\Phi$ наблюдаемой интерферометрической фазы $\varphi$ от когерентности $\rho$ при разных значениях параметра накопления $L$**

вые разности связаны между собой соотношениями

$$\delta = W\left[\Delta\right], \quad \Delta = \Delta_T + \delta_N;$$

$$\delta \in \left[-\pi; \pi\right), \ \delta_N \in \left(-2\pi; 2\pi\right), \ \Delta_T \in \mathbb{R}, \ \Delta \in \left(\Delta_T - 2\pi; \Delta_T + 2\pi\right) \subset \mathbb{R}.$$

Из четырех фазовых разностей непосредственно наблюдаемой является лишь относительная фазовая разность, представляющая собой конечную разность главного значения фазы, свернутую в интервал $\left[-\pi; \pi\right)$:

$$\delta_Y\left(m, n\right) = W\left[\varphi_{m+1,n} - \varphi_{mn}\right], \quad \delta_X\left(m, n\right) = W\left[\varphi_{m,n+1} - \varphi_{mn}\right].$$

Абсолютная фазовая разность $\Delta$ представляет собой сумму детерминированной компоненты $\Delta_T$ и случайной компоненты $\delta_N$. Она является конечной разностью абсолютной фазы

$$\Delta_X\left(m, n\right) = \psi_{m,n+1} - \psi_{mn}, \quad \Delta_Y\left(m, n\right) = \psi_{m+1,n} - \psi_{mn}.$$

Физическая фазовая разность $\Delta_T$ является детерминированной функцией топографии подстилающей поверхности и параметров съемки. В приложениях именно она несет полезную информацию об объекте интерферометрических измерений. Интерферометрические измерения стремятся организовать так, чтобы физическая разность в каждой точке интерферограммы не превышала по модулю $\pi$ радиан, но это удается не всегда. Шумовая фазовая разность $\delta_N$ является случайной величиной, закон распределения вероятностей которой не зависит от величины $\Delta_T$.

Рассмотрим теперь законы распределения вероятностей случайных величин $\Delta$ и $\delta$. Конечные разности $\Delta_X$ и $\Delta_Y$ являются случайными величинами, распределенными на отрезках $(\Delta_{TX} - 2\pi; \Delta_{TX} + 2\pi)$ и $(\Delta_{TY} - 2\pi; \Delta_{TY} + 2\pi)$ соответственно. Плотности распределения вероятностей фазовых разностей на этих отрезках даются сверткой (рис. 6):

$$p_{\Delta X}\left(\Delta_X|\Delta_{TX}\right) = \\ = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{-\pi-(\Delta_X-\Delta_{TX})}^{\pi} \tilde{p}_\Phi\left(\Delta_X-\Delta_{TX}+\varphi\right)\tilde{p}_\Phi\left(\varphi\right)d\varphi, & \Delta_X\in\left(\Delta_{TX}-2\pi; \Delta_{TX}\right); \\ \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi-(\Delta_X-\Delta_{TX})} \tilde{p}_\Phi\left(\Delta_X-\Delta_{TX}+\varphi\right)\tilde{p}_\Phi\left(\varphi\right)d\varphi, & \Delta_X\in\left[\Delta_{TX}; \Delta_{TX}+2\pi\right); \end{cases} \tag{29}$$

$$p_{\Delta Y}\left(\Delta_Y|\Delta_{TY}\right) = \\ = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{-\pi-(\Delta_Y-\Delta_{TY})}^{\pi} \tilde{p}_\Phi\left(\Delta_Y-\Delta_{TY}+\varphi\right)\tilde{p}_\Phi\left(\varphi\right)d\varphi, & \Delta_Y\in\left(\Delta_{TY}-2\pi; \Delta_{TY}\right); \\ \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi-(\Delta_Y-\Delta_{TY})} \tilde{p}_\Phi\left(\Delta_Y-\Delta_{TY}+\varphi\right)\tilde{p}_\Phi\left(\varphi\right)d\varphi, & \Delta_Y\in\left[\Delta_{TY}; \Delta_{TY}+2\pi\right). \end{cases} \tag{30}$$

Здесь введена вспомогательная функция $\tilde{p}_\Phi(\varphi) = p_\Phi(\varphi + \varphi_T)$ и использовано определение физической фазовой разности, как разности топографических абсолютных фаз:

$$\Delta_{TX}(m,n) = (\psi_T)_{m,n+1} - (\psi_T)_{mn}; \quad \Delta_{TY}(m,n) = (\psi_T)_{m+1,n} - (\psi_T)_{mn}.$$

Плотности распределения вероятностей относительных фазовых разностей $\delta_X$ и $\delta_Y$ выражаются формулами (рис. 7)

$$p\left(\delta_X|\Delta_{TX}\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{\Delta X}\left(\delta_X + 2\pi k|\Delta_{TX}\right), & \delta_X\in[-\pi;\pi); \\ 0, & \delta_X \notin [-\pi;\pi), \end{cases} \tag{31}$$

$$p\left(\delta_Y|\Delta_{TY}\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{\Delta Y}\left(\delta_Y + 2\pi k|\Delta_{TY}\right), & \delta_Y\in[-\pi;\pi); \\ 0, & \delta_Y \notin [-\pi;\pi). \end{cases} \tag{32}$$

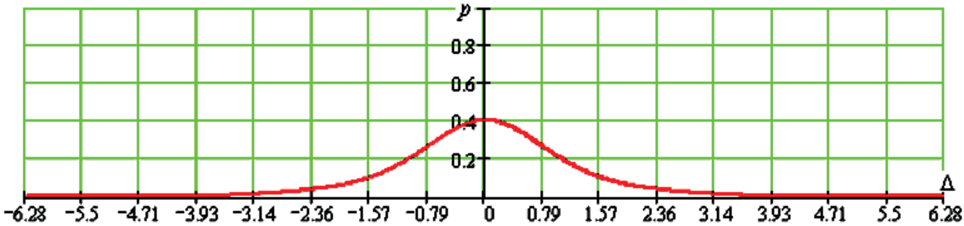


**Рис. 6. Плотность распределения вероятностей абсолютной фазовой разности $\boldsymbol{\Delta}$ на отрезке $(-2\pi; 2\pi)$ при $\rho = 0{,}5$, $L = 4$, $\Delta_T = 0$**

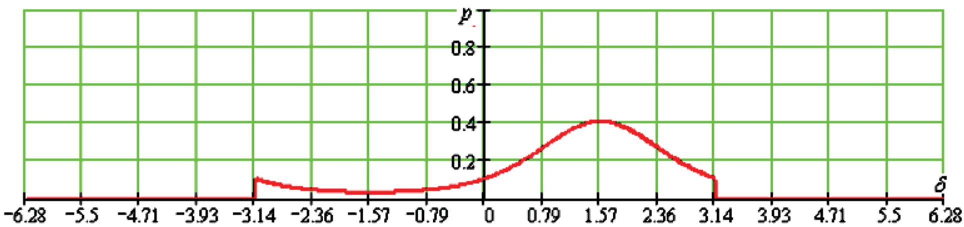


**Рис. 7. Плотность распределения вероятностей относительной фазовой разности $\boldsymbol{\delta}$ на отрезке $(-\pi; \pi)$ при $\rho = 0{,}5$, $L = 4$, $\Delta_T = 0{,}5\pi$**

Поскольку плотность распределения абсолютной фазовой разности $p_\Delta(\Delta|\Delta_T)$ отлична от нуля лишь на интервале $(\Delta_T - 2\pi; \Delta_T + 2\pi)$, то в формулах (31), (32) суммирование достаточно провести по конечному числу значений индекса $k$: от значения $k = k_{\min}$ до значения $k = k_{\max}$. Граничные значения определяются формулами

$$k_{\min} = \left[\frac{\Delta_T - \delta}{2\pi}\right], \quad k_{\max} = \left[\frac{\Delta_T - \delta}{2\pi}\right] + 1;$$

здесь $[\cdot]$ — оператор взятия целой части числа. Отметим, что в формулах (29)–(32) параметры $\rho$ (когерентность) и $L$ (число независимых наблюдений) для краткости записи опущены. Параметр $\Delta_T$ определяет положение максимума, а параметры $\rho$ и $L$ — дисперсию.

**Заключение.** Рассмотрена математическая модель формирования топографической интерферограммы поверхности Земли по данным съемок радиолокатора с синтезированной апертурой антенны из космоса. Исходя из геометрии съемки получены соотношения, связывающие локальные углы наклона топографического рельефа с фазовыми разностями на интерферограмме. Эти соотношения необходимы для вычисления совместного априорного распределения вероятностей фазовых разностей на основе априорного распределения вероятностей топографического градиента для включения радиометрической информации в постановку задачи обработки интерферограммы. Рассмотрено влияние на интерферограмму фазового шума. Получены формулы для распределений вероятностей основных видов фазовых разностей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. К о з а ч о к А. Г. Голографические методы исследования в экспериментальной механике. – М.: Машиностроение, 1984.
2. G r a h a m L. C. Synthetic interferometric radar for topographic mapping // Proceedings of the IEEE. – 1974. – Vol. 62. – P. 763–768.
3. Z e b k e r H. A., G o l d s t e i n R. M. Topographic mapping from interferometric SAR observations // J. Geophys. Res. – 1986. – Vol. 91. – P. 4993–4999.
4. B a m l e r R. Digital terrain models from radar interferometry // Photogrammetric week ’1997. Wichmann Verlag, Heidelberg, 1997. – P. 93–105.
5. R o s e n P., H e n s l e y S., J o u g h i n I., L i F., M a d s e n S., R o d r i g u e z E., G o l d s t e i n R. Synthetic aperture radar interferometry // Proc. of the IEEE. – 2009. – Vol. 88. – No. 3.
6. G u a r n i e r i A. M. SAR interferometry and statistical topography // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2002. – Vol. 40. – P. 2567–2581.
7. D a t c u M. Maximum entropy solution for interferometric SAR phase unwrapping // Proc. of the IGARSS ’96 Conference.
8. S t r a m a g l i a S., R e f i c e A., G u e r r i e r o L. Statistical mechanics approach to the phase unwrapping problem // Elsevier, Physics A. Vol. 276, No 3. 15 February 2000. – P. 521–534 (14).
9. L e e J. -S. et al. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric imagery // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 1994. – Vol. 32. – P. 1017–1028.
10. L e e J. -S. et al. A new technique for noise filtering of SAR interferometric phase images // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 1998. – Vol. 36. – P. 1456–1465.


Статья поступила в редакцию 5.03.2010

Роман Игоревич Шувалов родился в 1984 г., окончил в 2007 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант и ассистент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер ОАО “ВПК “НПО машиностроения”. Автор семи научных работ в области математического моделирования и обработки цифровых изображений Земли, получаемых космическими радиолокаторами с синтезированной апертурой антенны.

R.I. Shuvalov (b.1984) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2007. Post-graduate and assistant lecturer of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Engineer of NPO Mashinostroyenia. Author of 7 publications in the field of mathematical modeling for processing of digital images of Earth surface acquired by synthetic aperture radars.