

ПРИЧИННЫЙ АНАЛИЗ КВАНТОВЫХ ЗАПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ. Ч. 2

Показана роль асимметрии состояний в передаче квантовой информации. Для кубитов в неоднородном магнитном поле исследована нетривиальная роль этой неоднородности и температуры для причинной связи подсистем.

E-mail: korotaev@igemi.troitsk.ru; riot_ek@mail.ru

Ключевые слова: квантовая информация, причинность, запутанные состояния.

5. Асимметричные состояния. В этом разделе мы рассматриваем примеры асимметричных состояний, для которых применение причинного анализа действительно содержательно. Примеры рассматриваются в порядке нарастания нетривиальности результата. В расчетах c_2 будем полагать $k = 1$ до последнего примера, где разберем влияние переменного k .

5.1. Асимметричная диссипация. Рассмотрим третий возможный путь декогеренции — диссипацию таким же образом, как в п. 4.4 и 4.5: диссипации подвергается только одна частица (B) из двух. В этом будет заключаться отличие от симметричной диссипации, рассмотренной в п. 4.6–4.8.

Процесс диссипации сводится к следующему преобразованию в матричных элементах при степени декогеренции p [1, 2]:

$$\begin{aligned} |0 \rangle \langle 0| &\rightarrow |0 \rangle \langle 0|, \\ |1 \rangle \langle 1| &\rightarrow (1 - p)|1 \rangle \langle 1| + p|0 \rangle \langle 0|, \\ |1 \rangle \langle 0| &\rightarrow \sqrt{1 - p}|1 \rangle \langle 0|, \\ |0 \rangle \langle 1| &\rightarrow \sqrt{1 - p}|0 \rangle \langle 1|. \end{aligned} \tag{59}$$

Так же, как в п. 4.4 и 4.5, примем за исходное состояние синглет (26); тогда диссипированная плотность

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = \frac{1}{2} [&p|00 \rangle \langle 00| + (1 - p)|01 \rangle \langle 01| - \sqrt{1 - p}|01 \rangle \langle 10| - \\ &- \sqrt{1 - p}|10 \rangle \langle 01| + |10 \rangle \langle 10|]; \end{aligned} \tag{60}$$

редуцированные плотности

$$\rho_A = \frac{1}{2} (|0 \rangle \langle 0| + |1 \rangle \langle 1|), \tag{61}$$

$$\rho_B = \frac{1}{2} [(1+p)|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|]; \quad (62)$$

энтропии

$$S(AB) = -\frac{p}{2} \log_2 \frac{p}{2} - \left(1 - \frac{p}{2}\right) \log_2 \left(1 - \frac{p}{2}\right), \quad (63)$$

$$S(A) = 1, \quad (64)$$

$$S(B) = -\frac{1+p}{2} \log_2 \frac{1+p}{2} - \frac{1-p}{2} \log_2 \frac{1-p}{2}; \quad (65)$$

функции независимости

$$i_{B|A} = \frac{S(AB) - 1}{S(B)}, \quad i_{A|B} = S(AB) - S(B); \quad (66)$$

согласованность

$$C = \sqrt{1-p}. \quad (67)$$

Из рис. 11 видно, что диссипация отличается от деполяризации и дефазирования большими значениями C во всем диапазоне p , а $i_{B|A}$ всюду отрицательна, подобно случаю дефазирования. Но основной интерес представляет рис. 12, на котором показано поведение c_2 и γ . Значение $c_2 > 0$, что соответствует причине в A и следствию в B в полном соответствии с интуитивным представлением — необратимой поток информации направлен в сторону диссипирующей частицы. Уменьшение c_2 при росте p также отвечает интуитивному представлению об усилении причинной связи с ростом степени диссипации. Применение же классического критерия причинности (по величине γ) при

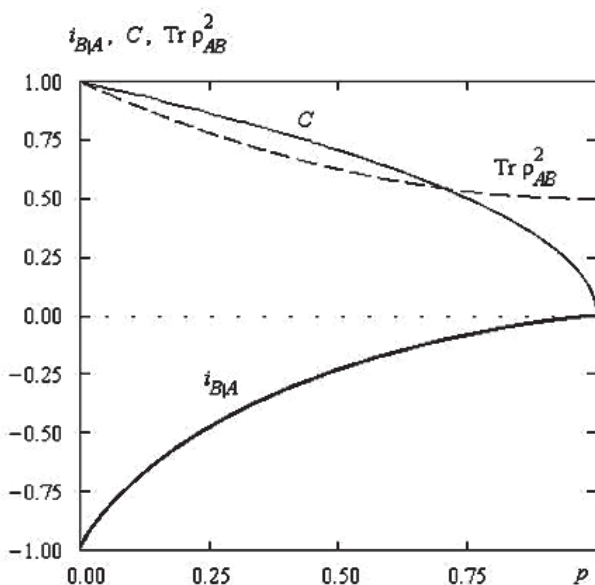


Рис. 11. Зависимости $i_{B|A}$, C и $\text{Tr } \rho_{AB}^2$ от степени диссипации p состояния (26) (см. Ч. 1)

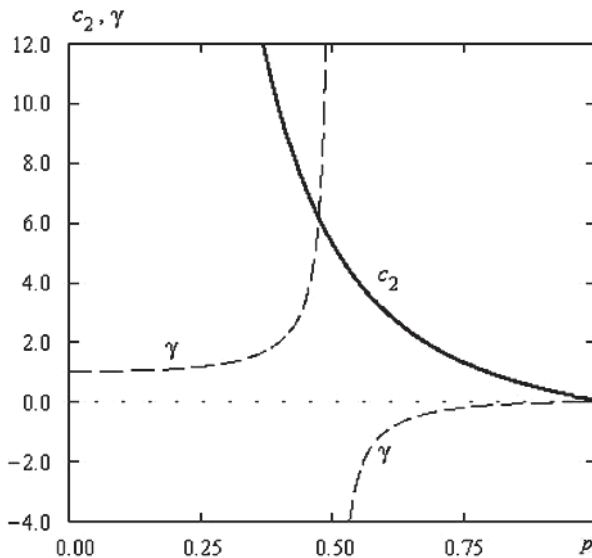


Рис. 12. Зависимости c_2 и γ от степени диссипации p состояния (26)

$0 < p < \frac{1}{2}$ привело бы к противоположному выводу о направленности причинной связи, а при $\frac{1}{2} < p < 1$ бессмысленно.

На энтропийной диаграмме (см. Ч. 1, рис. 2) состояние (60) соответствует областям IQ (при $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$) и ПIQ (при $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$). Переход между областями не нарушает гладкости $c_2(p)$.

5.2. Одна частица запутана с несколькими другими. Рассмотрим простейший случай, когда одна частица A запутана одинаково и максимально с двумя другими — B и C . Этот случай отвечает трехсоставному состоянию [3]

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{1}{2}(|001\rangle + |010\rangle). \quad (68)$$

Рассмотрим пару AB :

редуцированные плотности

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = & \frac{1}{4}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|10\rangle\langle 10| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}}|10\rangle\langle 01| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle\langle 10| + \frac{1}{4}|01\rangle\langle 01|, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|), \quad (70)$$

$$\rho_B = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|; \quad (71)$$

$$S(AB) = S(B) = -\frac{3}{4} \log_2 \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \approx 0,811, \quad (72)$$

$$S(A) = 1; \quad (73)$$

независимость

$$i_{B|A} \approx -0,233, \quad i_{A|B} = 0; \quad (74)$$

меры причинности

$$\gamma = -\infty, \quad c_2 \approx 5,299; \quad (75)$$

согласованность

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (76)$$

Согласно квантовой мере c_2 A – причина, B – следствие, классическая мера γ не имеет смысла (область IIIQ на энтропийной диаграмме). В паре AC результат тот же, и, таким образом, A является общей причиной для B и C . Классическая интуиция в этом случае была бы бессильна отличить общую причину от общего следствия.

Интуиция дает лишь справедливый (в силу симметрии) ответ об отсутствии причинной связи B и C . Подобные выкладки для этой пары дают: $i_{B|C} = i_{C|B} \approx 0,233$, $\gamma = 1$, $|c_2| = \infty$, $C = \frac{1}{2}$. Частицы B и C запутаны, и классически коррелированы благодаря наличию общей причины. Отметим, что согласно обеим мерам смешанность в парах AB (AC) меньше, чем в паре BC : $S(AB) \approx 0,811$, $\text{Tr}\rho_{AB}^2 \approx 0,625$; $S(BC) = 1$, $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = \frac{1}{2}$.

5.3. Состояния WRr. В работах [4, 5] исследованы различные трех-составные состояния, связанные преобразованиями симметрии, частными случаями которых являются ГХЦ- и W-состояния. В частности, получен дуплет

$$|WRr\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|001\rangle + |010\rangle - 2|100\rangle). \quad (77)$$

По распределению запутанности это состояние отличается от рассмотренного в п.4.3 симметричного W -состояния, для которого $C_{AB} = C_{AC} = C_{BC} = \frac{1}{3}$, и рассмотренного в п.5.2 асимметричного состояния, для которого $C_{AB} = C_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C_{BC} = \frac{1}{2}$. Для состояния (77) $C_{AB} = C_{AC} = \frac{2}{3}$, $C_{BC} = \frac{1}{3}$ [4, 5], т.е. у пары BC запутанность вдвое слабее, чем у двух других пар.

Для состояния (77)

$$\rho_{AB} = \frac{1}{6}(4|10 \rangle \langle 10| - 2|10 \rangle \langle 01| - 2|01 \rangle \langle 10| + |01 \rangle \langle 01| + |00 \rangle \langle 00|), \quad (78)$$

$$S(AB) = S(B) = -\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \log_2 \frac{5}{6} \approx 0,651, \quad (79)$$

$$S(A) = -\frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \log_2 \frac{2}{3} \approx 0,918, \quad (80)$$

$$i_{B|A} \approx -0,412, \quad i_{A|B} = 0, \quad (81)$$

$$\gamma = -\infty, \quad c_2 \approx 3,43. \quad (82)$$

То же верно для пары AC . При этом $\text{Tr} \rho_{AB}^2 = \text{Tr} \rho_{AC}^2 \approx 0,722$.

Так же, как и в п. 5.2, A является причиной для B и C и только квантовая мера причинности имеет смысл (см. Ч. 1, область ПҚ на рис. 2). Количественная разница заключается в том, что согласно обоим мерам смешанности в причинных звеньях (77) она меньше, чем в (68), и хотя согласованность меньше, функция независимости $i_{B|A} = i_{C|A} < 0$ ниже, т.е. квантовые корреляции сильнее и c_2 — ниже, т.е. причинная связь сильнее выражена.

Для частиц B и C в состоянии (77) имеем: $S(BC) \approx 0,918$, $\text{Tr} \rho_{BC}^2 \approx 0,556$, $i_{B|C} = i_{C|B} \approx 0,412$, $\gamma = 1$, $|c_2| = \infty$, $C = \frac{1}{3}$. Как и в случае состояния (68), причинность в паре BC отсутствует, и хотя смешанность ниже, но запутанность и классическая ($i_{B|C} = i_{C|B} > 0$) коррелированность слабее.

5.4. Асимметричные “квантово-классические” состояния. Вопрос об особенностях поведения асимметричных систем был впервые поставлен как проблема квантовой информации в работе [6], где рассмотрен случай “квантово-классических” двухсоставных состояний. Квантовой именуется подсистема A , для которой $S(A) > S(AB)$, классической — подсистема B , для которой $S(B) \leq S(AB)$. Было обнаружено, что, как ни странно, декогеренция может идти быстрее при взаимодействии окружения с классической подсистемой. Этот контринтуитивный эффект назван “аномальным распадом запутанности”. В итоге был сформулирован ряд открытых вопросов о нетривиальном поведении открытых систем, в том числе об асимметрии передачи информации в направлениях $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$.

В работе [6] рассмотрено асимметричное состояние

$$\rho_{AB} = q|\Psi_1 \rangle \langle \Psi_1| + (1 - q)|\Psi_2 \rangle \langle \Psi_2|, \quad 0 < q < 1, \quad (83)$$

с нормализованными $|\Psi_1\rangle = a|00\rangle + \sqrt{1-a^2}|11\rangle$ и $|\Psi_2\rangle = a|10\rangle + \sqrt{1-a^2}|01\rangle$ с $0 < a < 1$. Из (83) видно, что смешанность зависит только от q , запутанность — от q и a . Формула (83) в развернутом виде выглядит так:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} qa^2 & 0 & 0 & qa\sqrt{1-a^2} \\ 0 & (1-q)(1-a^2) & (1-q)a\sqrt{1-a^2} & 0 \\ 0 & (1-q)a\sqrt{1-a^2} & (1-q)a^2 & 0 \\ qa\sqrt{1-a^2} & 0 & 0 & q(1-a^2) \end{pmatrix}. \quad (83a)$$

Отсюда

$$S(AB) = -q \log_2 q - (1-q) \log_2(1-q), \quad (84)$$

$$S(A) = -(a^2 - 2qa^2 + q) \log_2(a^2 - 2qa^2 + q) - (1 - a^2 + 2qa^2 - q) \log_2(1 - a^2 + 2qa^2 - q), \quad (85)$$

$$S(B) = -a^2 \log_2 a^2 - (1 - a^2) \log_2(1 - a^2), \quad (86)$$

$$i_{B|A} = \frac{S(AB) - S(A)}{S(B)}, \quad i_{A|B} = \frac{S(AB) - S(B)}{S(A)}, \quad (87)$$

$$C = 2\sqrt{a^2(1-a^2)}|1-2q|. \quad (88)$$

Всегда $S(A) \geq S(AB)$; $S(B)$ может быть как больше, так и меньше $S(AB)$. Согласно определению [6] подсистема A почти всегда квантовая, подсистема B может быть и квантовой и классической. На рис. 13 показаны зависимости $i_{B|A}$, C и $\text{Tr}\rho_{AB}^2$ от q и a^2 , которые имеют ожидаемый вид. Нетривиальной является лишь зависимость $i_{B|A}$ от a^2 . Тот факт, что $i_{B|A}$ почти всегда отрицательна (кроме случая $q = \frac{1}{2}$), как раз отражает то, что подсистема A почти всегда квантовая. При максимальной смешанности, достигаемой при $q = \frac{1}{2}$, подсистема не запутана ($C = 0$), но классически максимально коррелирована ($i_{B|A} = 0$) при любом a^2 .

На рис. 14 показаны зависимости c_2 и γ от q и a^2 . Положительная величина c_2 показывает, что почти при всех q и a^2 A есть причина, B — следствие. Причинность исчезает ($c_2 = \infty$) только при $q = 0$ или 1 (чистое состояние) и $a^2 = \frac{1}{2}$ (симметричное состояние). Направление причинной связи $A \rightarrow B$ проясняет вывод [6] о большей хрупкости к декогеренции подсистемы B . Сток квантовой информации, т.е. переход запутанности к окружению, происходит преимущественно в более диссипативной подсистеме B .

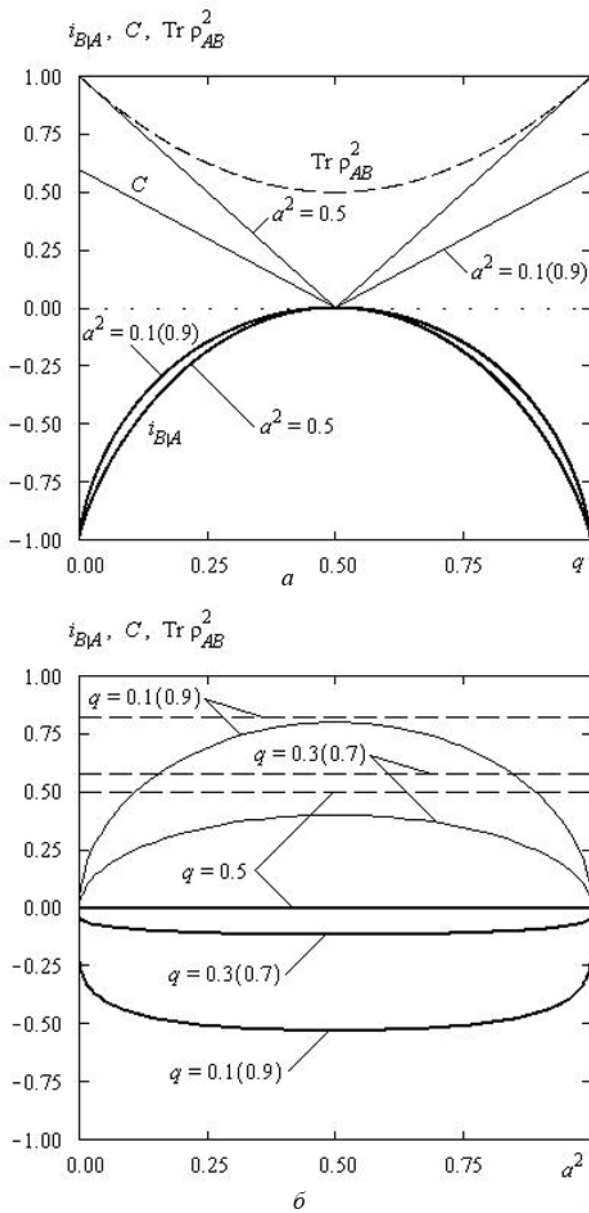


Рис. 13. Зависимости $i_{B|A}$ (—), C (---) и $\text{Tr } \rho_{AB}^2$ (---) от q (а) и a^2 (б) “квантово-классического” состояния (83)

Состояния соответствуют областям IQ и IIIQ (рис. 2, см. Ч. 1), следовательно, классическая мера причинности γ на рис. 14 либо показывает ошибочно обратное направление причинной связи, либо теряет смысл при отрицательных γ . Классическая причинность отсутствует ($\gamma = 1$) при $a^2 = q$ и $a^2 = 1 - q$. Отрицательные значения γ (область IIIQ) соответствуют положительным значениям функции независимости $i_{A|B}$ или классичности подсистемы B в формулировке авторов

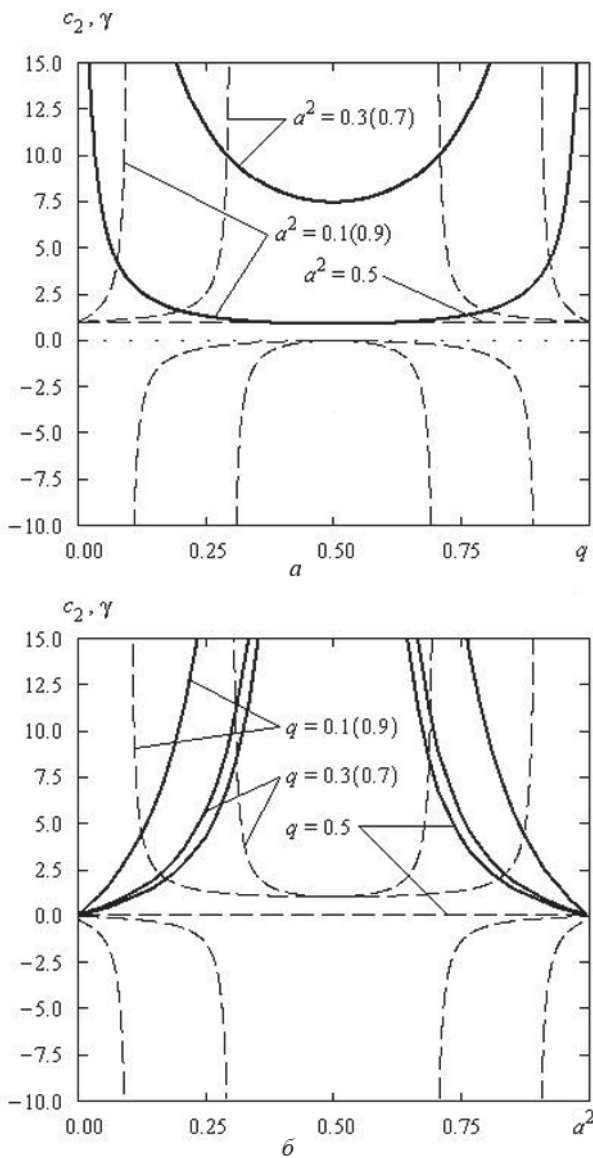


Рис. 14. Зависимости c_2 (—) и γ (---) от q (а) и a^2 (б) “квантово-классического” состояния (83)

работы [6]. Но поскольку $c_2 > 0$ и при отрицательных значениях $i_{A|B}$ в области IQ (т.е. тогда, когда подсистема B качественно такая же квантовая, как и A), то можно заключить, что аномальный эффект распада запутанности, обнаруженный в [6], является лишь частным случаем более общего и совершенно естественного явления большего стока информации в более диссипативной подсистеме. Аномальность эффекта, таким образом, отсутствует.

Нетривиальным количественным выводом (который нельзя сделать просто из вида состояния (83) или (83а)) является то, что максимально

смешанное состояние $q = \frac{1}{2}$ соответствует линии однозначных функций (см. Ч. 1, рис. 1). При любых a^2 здесь $\gamma = 0$ (см. рис. 13), что соответствует предельно необратимому переходу $A \Rightarrow B$. Эта однозначная зависимость B и A достигается при нулевой согласованности (см. рис. 12). При этом c_2 в зависимости от a^2 может иметь любое положительное значение (см. рис. 13). Иначе говоря, случаю предельно сильной классической причинности может соответствовать различная степень одинаково направленной квантовой причинности — от наиболее сильной для предельной асимметрии состояния ($a^2 \rightarrow 0$ или $a^2 \rightarrow 1$) до ее отсутствия при симметрии ($a^2 = \frac{1}{2}$).

5.5. Термально-запутанные состояния в неоднородном магнитном поле. Обычно считается, что рост как температуры, так и напряженности магнитного поля разрушает запутанность. Однако в работе [7] было показано, что неоднородное магнитное поле, напротив, играет конструктивную роль и запутанность поддерживается и при высокой температуре, и в сильном поле. Обнаружилось, что наибольший эффект в подавлении декогеренции оказывает именно асимметрично приложенное поле (противоположно направленное в подсистемах A и B). Поэтому применение причинного анализа к термально-запутанным состояниям в неоднородном магнитном поле представляет определенный интерес.

Согласно [7] будем рассматривать термальное запутывание двух кубитов — частиц со спином $\frac{1}{2}$, связанных XY -гейзенберговским взаимодействием. Модельный гамильтониан

$$H = J(S_A^x S_B^x + S_A^y S_B^y) + B_A S_A^z + B_B S_B^z, \quad (89)$$

где $S^j = \sigma^j/2$ ($j = x, y, z$) — спиновые операторы; J — константа гейзенберговского взаимодействия; B_A и B_B — внешнее магнитное поле, приложенное к частицам A и B . Собственные значения и собственные векторы гамильтониана (89) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} H|00\rangle &= -(B_A + B_B)|00\rangle, \\ H|11\rangle &= (B_A + B_B)|11\rangle, \\ H|\Psi^\pm\rangle &= \pm\sqrt{D}|\Psi^\pm\rangle, \end{aligned} \quad (90)$$

где

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{N_\pm} \left[|01\rangle + \frac{(B_A - B_B) \pm \sqrt{D}}{J} |10\rangle \right],$$

$$D = (B_A - B_B)^2 + J^2.$$

Матрица плотности термального состояния

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{(B_A+B_B)/(k_B T)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m+n & -s & 0 \\ 0 & -s & m-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-(B_A+B_B)/(k_B T)} \end{pmatrix}, \quad (91)$$

где

$$Z = \text{Tr} e^{-H/(k_B T)},$$

$$m = \text{ch} \frac{\sqrt{D}}{k_B T}, \quad n = \frac{B_A - B_B}{\sqrt{D}} \text{sh} \frac{\sqrt{D}}{k_B T}, \quad s = \frac{J \text{sh} \frac{\sqrt{D}}{k_B T}}{\sqrt{D}}.$$

В дальнейших расчетах принимается $k_B = J = 1$. Асимметрию состояний определяет величина n . Из (91) следует

$$\begin{aligned} S(AB) = & -\frac{m + \sqrt{n^2 + s^2}}{Z} \log_2 \frac{m + \sqrt{n^2 + s^2}}{Z} - \\ & -\frac{m - \sqrt{m^2 + s^2}}{Z} \log_2 \frac{m - \sqrt{m^2 + s^2}}{Z} - \\ & -\frac{\exp\left(\frac{B_A + B_B}{T}\right)}{Z} \log_2 \frac{\exp\left(\frac{B_A + B_B}{T}\right)}{Z} - \\ & -\frac{\exp\left(-\frac{B_A + B_B}{T}\right)}{Z} \log_2 \frac{\exp\left(-\frac{B_A + B_B}{T}\right)}{Z}, \quad (92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(A) = & -\frac{\exp\left(\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m + n}{Z} \log_2 \frac{\exp\left(\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m + n}{Z} - \\ & -\frac{\exp\left(-\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m - n}{Z} \log_2 \frac{\exp\left(-\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m - n}{Z}, \quad (93) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(B) = & -\frac{\exp\left(\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m - n}{Z} \log_2 \frac{\exp\left(\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m - n}{Z} - \\ & -\frac{\exp\left(-\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m + n}{Z} \log_2 \frac{\exp\left(-\frac{B_A + B_B}{T}\right) + m + n}{Z}. \quad (94) \end{aligned}$$

Функции независимости определяются общими формулами (87), согласованность

$$C = 2 \frac{s-1}{Z}. \quad (95)$$

Для исследования эффекта неоднородного поля примем сначала $T = 1$, $B_A = 5$, $B_B = 5p$.

Максимальная смешанность состояния как по критерию $\max S(AB)$, определяемому из (92), так и по критерию $\min \text{Tr} \rho_{AB}^2$

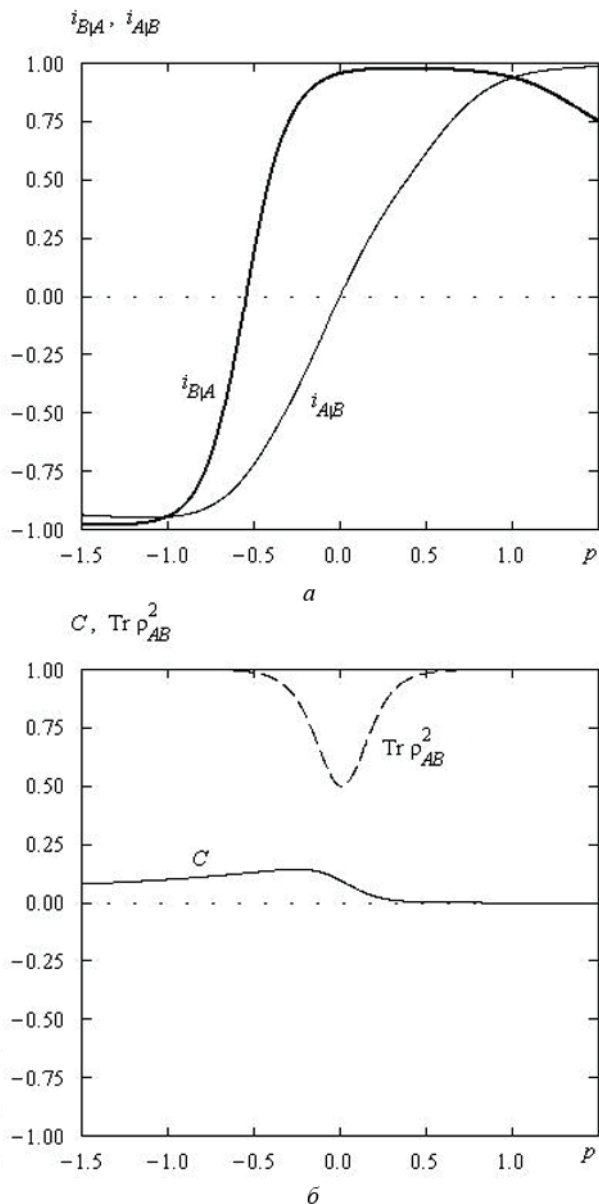


Рис. 15. Зависимости $i_{B|A}$ и $i_{A|B}$ (а), C и $\text{Tr} \rho_{AB}^2$ (б) от $p = B_B/B_A$ состояния (91) ($T = 1$)

(рис. 15) достигается при $p \approx 0,010$. Согласованность на рис. 15 демонстрирует отмеченную в (40) наибольшую запутанность при противоположно направленных полях в A и B , но максимум достигается не при точной антисимметрии ($p = -1$), как предположено в (40), а при $p \approx -0,253$. Отметим, что согласно (93) и (94) $\max S(A)$ ($p \approx -0,149$) близок по положению к $\max C$, а $\max S(B)$ — к $\min \text{Tr} \rho_{AB}^2$ ($p \approx 0,08$); при этом $\max \alpha \approx 26,5$ наблюдается при $p \approx 0,176$. Функция независимости $i_{B|A}$ на рис. 15 не демонстрирует подобия ни со смешанностью, ни с согласованностью; $i_{B|A} \rightarrow -1$, т.е. квантовые корреляции растут при глубоко отрицательных p , несмотря на уменьшение C . В интервале $-0,54 < p < 0,50$ $i_{B|A}$ классически положительна, несмотря на то что $C > 0$; $\max i_{B|A}$, т.е. наименьшая полная корреляция подсистем, наблюдается при $p \approx 0,379$, когда C еще конечна. При больших p $i_{B|A}$ снижается за счет классической корреляции в параллельных полях, причем это снижение становится резче при $p > 1$. На рис. 15 показана также функция независимости $i_{A|B}$. Хотя $i_{A|B} = 0$ при $p = 0$, полной антисимметрии по p нет, $\min i_{A|B}$ наблюдается при $p \approx -1,115$; $i_{A|B} \rightarrow 1$ при больших положительных p . Можно констатировать, что на интервале $0 < p < 0,5$ система запутана несмотря на классичность обеих i . Таким образом, функции независимости демонстрируют нетривиальное соотношение квантовых и классических корреляций подсистем, которые нельзя обнаружить из рассмотрения согласованности.

Рассмотрим причинную связь подсистем, при этом определим c_2 не только при $k = \Delta r / \delta t = 1$ в (12), но воспользовавшись собственными значениями гамильтониана (90) рассчитаем δt согласно (18). Положив $\Delta r = 1$, определим $c'_2 = c_2 / \delta t$. На рис. 16 показаны зависимости c_2 , c'_2 и γ от p ; первые две для удобства показаны в двух масштабах для разных p . Согласно всем трем мерам причинность отсутствует при $p = \pm 1$, т.е. в равных параллельных и антипараллельных полях в A и B . Интервал $p(-\infty, -1)$ соответствует области IQ; $p(-1, -0,54]$ — области IIQ; $p[-0,54, 0]$ — IVQ; $p(0, 1)$ — IIС; $p(1, \infty)$ — IC. Согласно обоим квантовым мерам при $|p| > 1$ A — причина, B — следствие, при $|p| < 1$ — наоборот. Иначе говоря, следствие всегда находится в области более сильного поля. Это может быть понято как эффект стабилизирующей поляризации кубита в сильном поле, в результате которого кубит становится в большей степени стоком информации, чем источником. При направленности причинной связи $A \rightarrow B$ причинность при $|p| \rightarrow \infty$ усиливается: $c_2 \rightarrow +0$, $c'_2 \rightarrow +0$. Но при направленности $B \rightarrow A$ $\min |c_2|$ и $\min |c'_2|$ наблюдаются не при $p = 0$, как можно было бы интуитивно полагать, а при конечных $p \approx 0,364$ для c_2 и $p \approx 0,266$ для c'_2 . Эти значения p определяются избранной

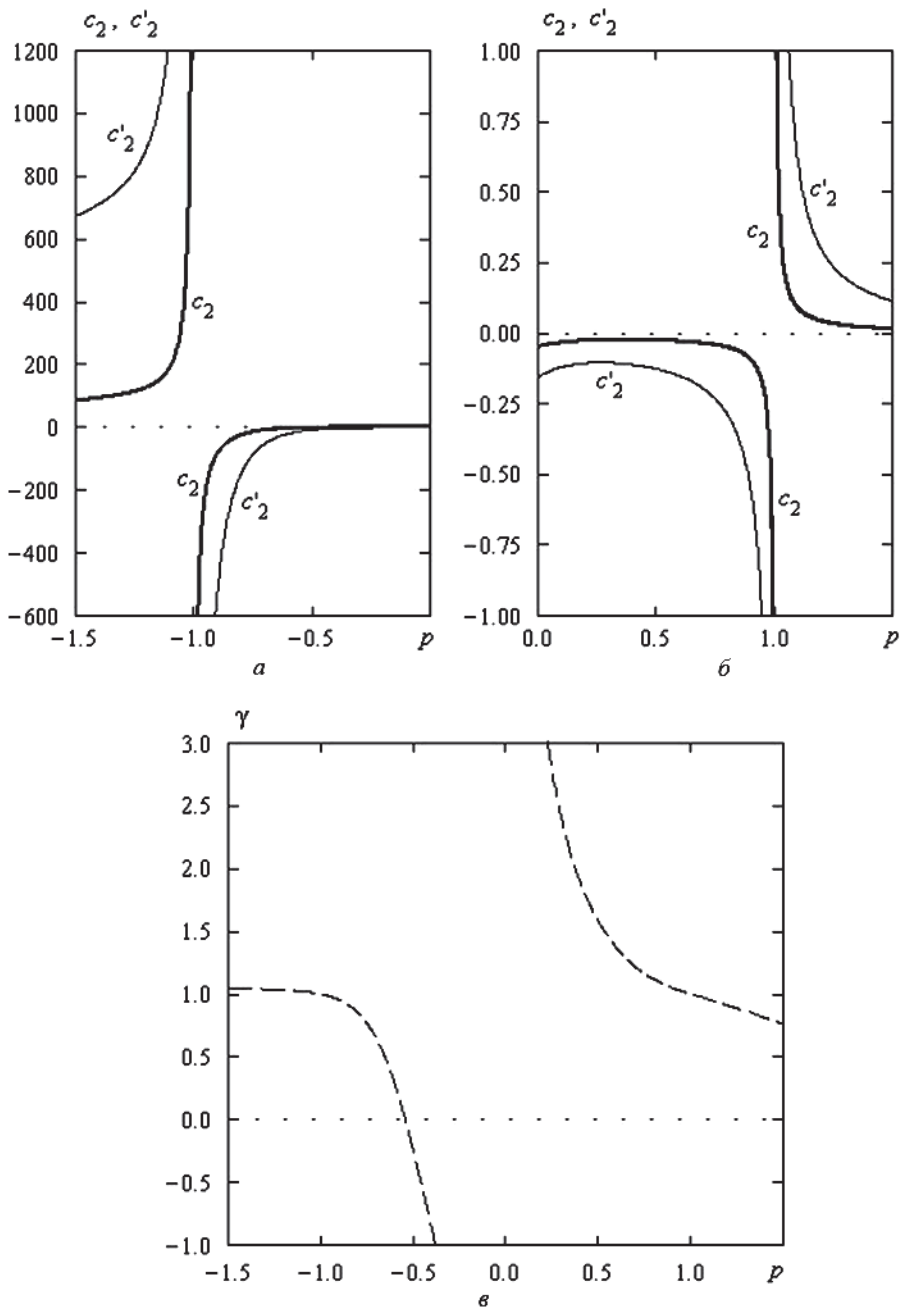


Рис. 16. Зависимости c_2 , c'_2 (а, б) и γ (в) от $p = B_B/B_A$ состояния (91) ($T = 1$)

температурой $T = 1$. Расчет показывает, что конкретное отношение полей p , при котором причинная связь наиболее сильна, уменьшается с повышением температуры. Функция причинности γ дает правильный ответ о направленности причинной связи только при $p > 0$; при $p \leq -0,54$ она дает неверную направленность, а при $-0,54 \leq p < 0$

не имеет классического смысла. На рис. 16 видно, что различие между поведением c_2 и c'_2 непринципиально.

Рассмотрим подробнее влияние температуры. Можно ожидать, что любые корреляции подсистем уменьшаются с ростом температуры. Вместе с тем именно конечная температура приводит к смешанности состояния, которая является необходимым условием причинной связи. Действительно, с ростом температуры $S(AB)$ возрастает, но возрастают и энтропии подсистем, причем по-иному, и можно ожидать нетривиального поведения энтропийных функций.

Из рис. 17 следует, что смешанность ожидаемо увеличивается с температурой, но магнитное поле в подсистеме B (практически независимо от направления) уменьшает влияние температуры. В полном соответствии с основным выводом работы [7] согласованность, показанная на рис. 18, при противоположно направленных полях в A и B остается конечной при высокой температуре. Однако наибольший эффект подавления декогеренции достигается не в антисимметричном случае ($p = -1$), а при более сильном отрицательном поле в B ($p = -1,5$). При $T \rightarrow 0$, напротив, наивысшая согласованность достигается при нулевом поле в B . При положительных p согласованность быстро исчезает в соответствии с обычным представлением о подавлении запутанности магнитным полем. Функция независимости $i_{B|A}$ (рис. 19) указывает на монотонное увеличение квантовых и классических корреляций подсистем при условии отрицательного поля в B от $p = 0$ до $p = -1,5$. При положительном p корреляции только классические и зависимость от температуры немонотонна — имеется минимум

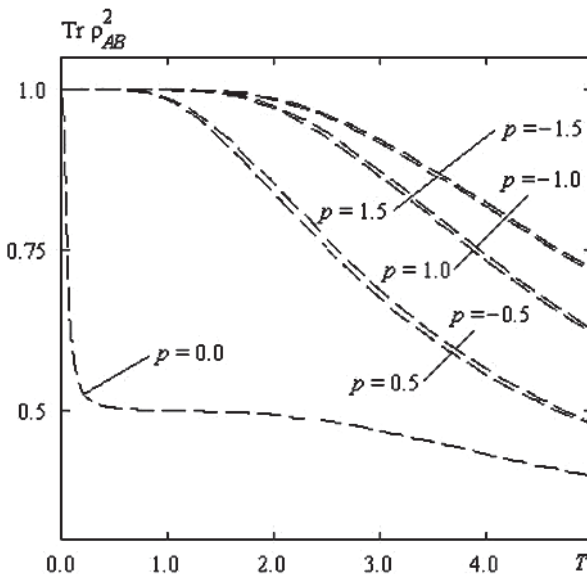


Рис. 17. Зависимость $\text{Tr} \rho_{AB}^2$ от T состояния (91)

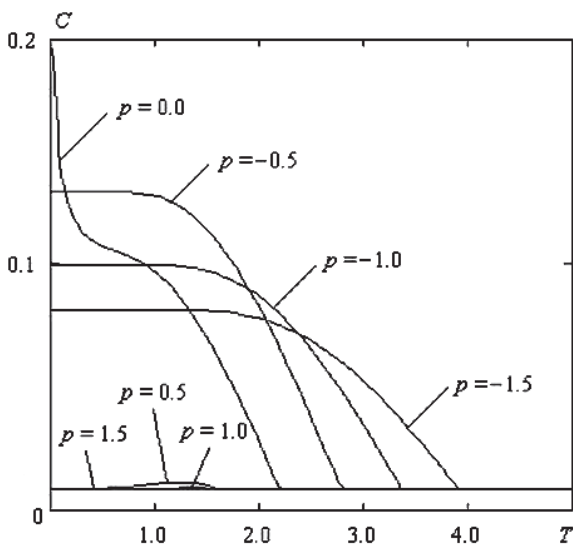


Рис. 18. Зависимость C от T состояния (91)

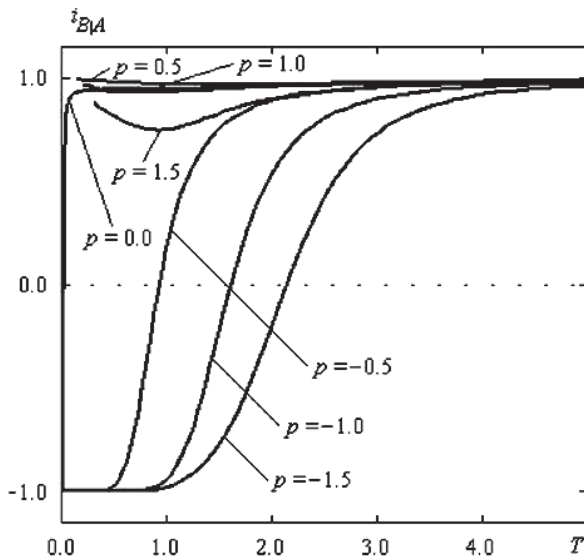


Рис. 19. Зависимость $i_{B|A}$ от T состояния (91)

положительной $i_{B|A}$ (максимум классической корреляции) при конечной температуре. При $p > 1$ всякая коррелированность подсистем практически исчезает. Обратная функция независимости $i_{A|B}$ (рис. 20) отличается от прямой значительно меньшей чувствительностью температурного хода к величине p , когда последняя отрицательна. При положительных p качественного различия в температурных кривых $i_{A|B}$ и $i_{B|A}$ не наблюдается. Но при $p = 0$ качественное различие велико — кривая $i_{A|B}(T)$ имеет точку перегиба (при $T \approx 0,8$), полностью отсутствующую в $i_{B|A}$; количественное различие также очень заметно.

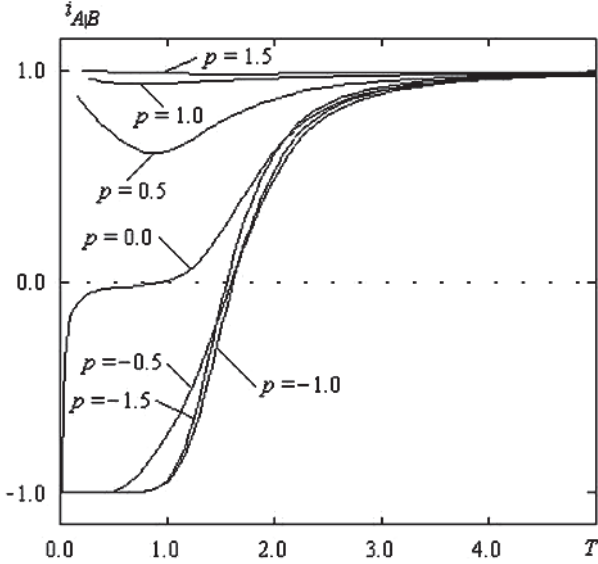


Рис. 20. Зависимость $i_{A|B}$ от T состояния (91)

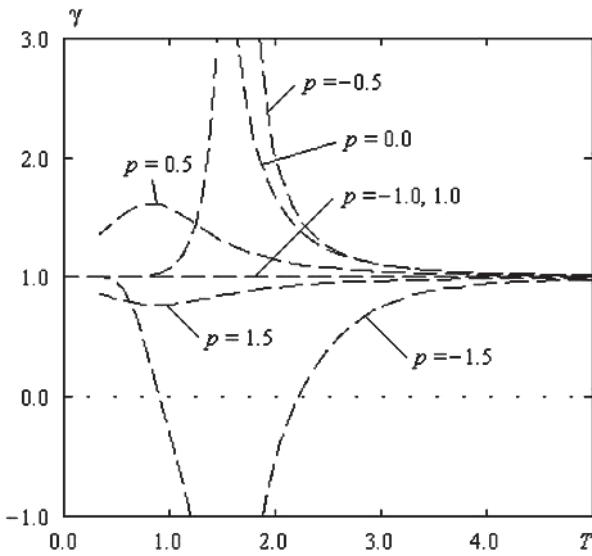


Рис. 21. Зависимость γ от T состояния (91)

Классическая мера причинности γ (рис. 21) демонстрирует, что в области ее корректного применения ($p > 0$) направленность причинной связи ожидаемо не зависит от температуры, можно заметить лишь слабое усиление причинной связи с $T \approx 0,9$. В области некорректного применения ($p < 0$) γ демонстрирует разрывы и смены направления причинной связи. На рис. 22 показано поведение c_2 и c'_2 в зависимости от температуры. Направление причинной связи при любом p от температуры не зависит, но ее величина меняется. При $p > 0$ причинность

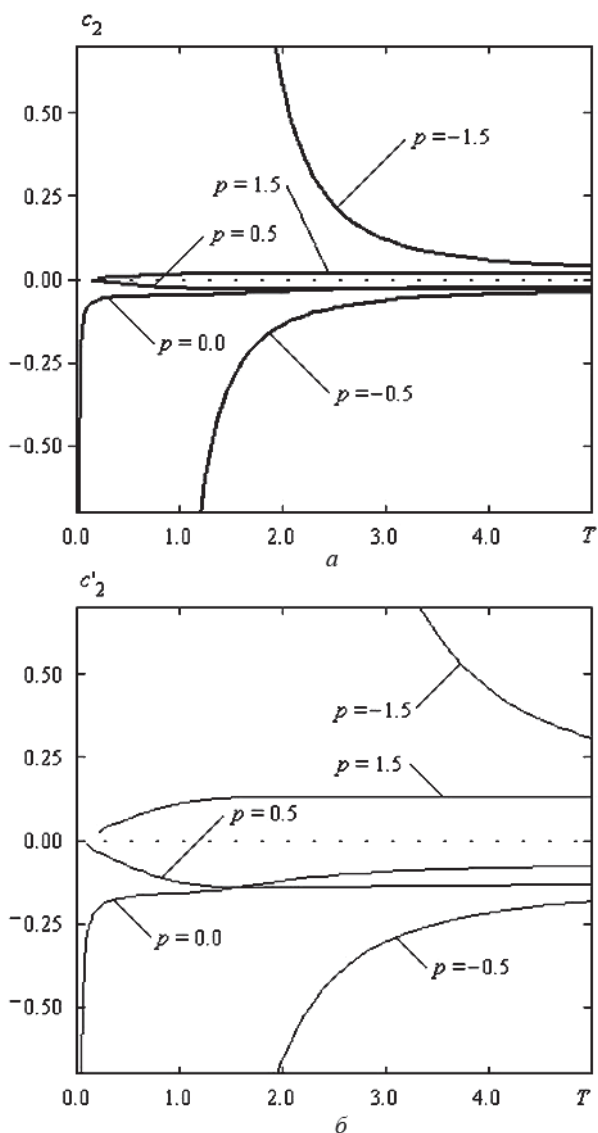


Рис. 22. Зависимости c_2 (а) и c'_2 (б) от T состояния (91)

резко увеличивается при низких температурах, оставаясь практически неизменной при $T > 1,3$ (при $p = 0,5$ наблюдается очень слабое усиление причинности при высокой температуре). При $p \leq 0$ причинность, напротив, резко усиливается в сторону высоких температур и тем резче, чем неоднороднее поле. Поскольку в расчетах было принято $J = 1$, $B_A = 5$, то отсюда следует, что гейзенберговское взаимодействие существенно для причинной связи в параллельных полях и становится несущественным в антипараллельных.

6. Выводы. Классический причинный анализ формализует интуитивное понимание причинности, что, во-первых, сделало возможным его применение для анализа сложных систем и, во-вторых, дало ко-

личественную меру причинной связи. Квантовое обобщение причинного анализа показало более богатую картину возможной причинной связи подсистем, где обычный интуитивный подход еще часто затруднителен. Направление причинной связи определяется направлением необратимого потока информации, а количественная мера причинной связи c_2 определяется как скорость такого потока. Отсутствие причинности соответствует $|c_2| \rightarrow \infty$, степень причинной связи подсистем обратна величине c_2 .

Используемые в причинном анализе функции независимости позволяют характеризовать квантовую и классическую коррелированность подсистем, и их применение представляет интерес в любых квантовых системах, в том числе и тех, где причинность отсутствует.

Возможности причинного анализа продемонстрированы на двух сериях примеров двухсоставных систем с двумя состояниями (кубитов). Примеры в обеих сериях расположены в порядке усложнения — от простейших к наименее тривиальным.

В первой серии примеров (раздел 4, Ч. 1) причинность отсутствует, выявляется лишь соотношение между функцией независимости и обычными мерами запутанности и смешанности состояний. Показано, что функция независимости часто, но не всегда определяется смешанностью состояния. Наиболее важно то, что в ряде случаев система может выглядеть классической в энтропийном смысле, и тем не менее является запутанной.

Во второй серии примеров (раздел 5) рассмотрены системы с конечной причинностью, начиная с простейшего примера с асимметричной диссипацией и кончая достаточно сложным случаем кубитов в неоднородном магнитном поле при различной температуре. В каждом случае квантовая мера причинности сопоставлена с классической и продемонстрировано, что классическая мера часто либо не имеет смысла, либо приводит даже к качественно неверному результату. Показано, каким образом распределение запутанности в трехсоставных системах ведет к парной причинной связи. Для случая асимметричных “квантово-классических” состояний получен положительный ответ на поставленный в [6] вопрос о наличии асимметрии передачи информации между подсистемами. Для случая кубитов в магнитном поле получены выводы о контроле направленности причинной связи неоднородностью поля, которые можно физически объяснить по результатам причинного анализа, но нельзя сделать без них. Показано, что изменение температуры не влияет на направленность причинной связи, но изменяет ее величину противоположным образом в параллельных и антипараллельных полях.

Применение причинного анализа к системам с числом состояния более двух само по себе не представляет затруднений, кроме обычного нарастания громоздкости вычисления собственных значений матриц плотности.

Обобщение на многосоставные системы требует некоторого усложнения математического аппарата, но, поскольку в классическом случае это обобщение было ранее успешно выполнено, можно надеяться, что и в квантовом случае не должно возникнуть принципиальных затруднений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J a n g S. S., C h e o n g Y. W., K i m J., L e e H. -W. Robustness of multiparty nonlocality to local decoherence // *Phys. Rev. A.* – 2006. – Vol. 74. – P.062112.
2. S o n g W., C h e n Z. -B. Invariant information and complementarity in high-dimensional states // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 76. – P.014307.
3. D ü r W. Multipartite entanglement that is robust against disposal of the particles // *Phys. Rev. A.* – 2001. – Vol. 63. – P.020303.
4. R a j a g o p a l A. K., R e n d e l l R. W. Robust and fragile entanglement of three qubits: Relation to permutation symmetry // *Phys. Rev. A.* – 2002. – Vol. 65. – P.032328.
5. R a j a g o p a l A. K., R e n d e l l R. W. Separability and correlation in composite states based on entropy methods // *Phys. Rev. A.* – 2002. – Vol. 66. – P.022104.
6. Z y c z k o w s k i K., H o r o d e c k i P., H o r o d e c k i M., H o r o d e c k i R. Dynamics of quantum entanglement // *Phys. Rev. A.* – 2001. – Vol. 65. – P.012101.
7. S u n Y., C h e n Y., C h e n H. Thermal entanglement in the two-qubit Heisenberg XY model under a nonuniform external magnetic field // *Phys. Rev. A.* – 2003. – Vol. 68. – P.044301.

Статья поступила в редакцию 09.06.2010

Сергей Маратович Коротаев родился в 1950 г., окончил ЛГМИ в 1972 г. Д-р. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией ЦГЭМИ ИФЗ РАН, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 180 научных работ в области физики необратимых процессов, физических приложений теории информации, электродинамики и геофизики.

S.M. Korotaev (b. 1950) graduated from the Leningrad Hydro-Meteorological Institute in 1972. D. Sc. (Phys.-Math.), head of laboratory of the Earth's Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 180 publications in the field of physics of irreversible processes, physical applications of theory of information, electrodynamics, and geophysics.

Евгений Олегович Киктенко родился в 1986 г., студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области физики квантовой информации.

Ye.O. Kiktenko (b. 1986) — student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of physics of quantum information.