УДК 517.9

О. А. Агапов

НАХОЖДЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Найдено точное решение нелинейного операторного уравнения вида $\partial u(r,t)/\partial t = A[u(r,t)]$, $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, при условии $u(r,0) = \varphi(r)$ для бесконечно дифференцируемого по Фреше оператора A. Приведены примеры решения задач Коши для уравнений теплопроводности, переноса, обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и уравнения Кортевега–де Фриза.

E-mail: stealth333@yandex.ru

Ключевые слова: операторные уравнения, дифференциальные уравнения, нелинейные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных.

Нахождение точного решения операторного уравнения. Пусть оператор $A[f]$ является отображением из множества X в множество Y функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, определенным на множестве $O \subset X$, таким, что существуют и являются равномерно непрерывными на множестве O операторы $A^{(k)}[f]$, $k = 1, 2, \ldots)$ [1]. Для этого случая найдем точное решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial t} = A\left[u(\vec{r},t)\right], \quad t > 0; \\ u(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}), \quad t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad \bar{r} \in \mathbb{R}^m, \quad u : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}.$$

Здесь $\varphi(\vec{r})$ — некоторая функция, принадлежащая множеству O.

Для нахождения точного решения задачи (1) зафиксируем некоторое значение t и определим последовательность $n+1$ равноотстоящих значений t_k от 0 до t, отличающихся друг от друга на величину τ:

$$t_k = \tau k, \quad \tau = t/n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Предположим, что функция $u(x,\eta)$, удовлетворяющая решению задачи (1), принадлежит множеству O для любого $\eta \in [0,t]$ и, кроме того, бесконечно дифференцируема по переменной η на этом отрезке. В этом случае можно представить первое уравнение задачи (1) в виде

$$u_n(\vec{r}) = u_{n-1}(\vec{r}) + \tau A\left[u_{n-1}(\vec{r})\right] + O\left(\tau^2\right), \tag{3}$$

где $u_k(\vec{r}) = u(\vec{r}, t_k)$. Учитывая аналогичную зависимость функций $u_{n-1}(\vec{r})$ и $u_{n-2}(\vec{r})$, можно записать выражение для функции $u_n(\vec{r})$

через $u_{n-2}(\vec{r})$ в виде

$$u_n(\vec{r}) = u_{n-2}(\vec{r}) + \tau A\left[u_{n-2}(\vec{r})\right] + \\ + \tau A\left[u_{n-2}(\vec{r}) + \tau A\left[u_{n-2}(\vec{r})\right] + O\left(\tau^2\right)\right] + O\left(\tau^2\right). \quad (4)$$

Представим оператор A из третьего слагаемого соотношения (4) в виде ряда по формуле Тейлора [2] относительно функции $u_{n-2}(\vec{r})$. В этом случае выражение (4) примет вид

$$u_n(\vec{r}) = u_{n-2}(\vec{r}) + 2\tau A\left[u_{n-2}(\vec{r})\right] + \\ + \tau^2 A'\left[u_{n-2}(\vec{r})\right] A\left[u_{n-2}(\vec{r})\right] + R_2\left(\vec{r}, \tau\right). \quad (5)$$

Здесь штрих у оператора A означает производную по Фреше этого оператора [1]. Функция $R_2\left(\vec{r}, \tau\right)$ представляет собой бесконечно малую величину второго порядка при $\tau \to 0$ и включает в себя третье и последующие слагаемые ряда формулы Тейлора разложения оператора A, а также слагаемые, связанные с погрешностью аппроксимации производной по переменной t конечной разностью. Индекс 2 означает, что остаточный член соответствует выражению $u_n(\vec{r})$ через $u_{n-2}(\vec{r})$. Аналогично можно записать выражение $u_n(\vec{r})$ через $u_{n-3}(\vec{r})$:

$$u_n(\vec{r}) = u_{n-3}(\vec{r}) + 3\tau A\left[u_{n-3}(\vec{r})\right] + 3\tau^2 A'\left[u_{n-3}(\vec{r})\right] A\left[u_{n-3}(\vec{r})\right] + \\ + \tau^3\left\{A''\left[u_{n-3}(\vec{r})\right] A\left[u_{n-3}(\vec{r})\right] + A'\left[u_{n-3}(\vec{r})\right] A'\left[u_{n-3}(\vec{r})\right]\right\} A\left[u_{n-3}(\vec{r})\right] + \\ + R_3\left(\vec{r}, \tau\right). \quad (6)$$

Видно, что выражения, стоящие при различных степенях τ в уравнении (6), с точностью до постоянного множителя связаны между собой соотношением

$$P_{s+1}\left[u\right] \equiv \left(P_s\left[u\right]\right)' A\left[u\right], \quad s = 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

где соответственно $P_1[u] \equiv u$, $P_2[u] \equiv A[u]$, $P_3[u] \equiv A'[u]A[u]$, $P_4[u] \equiv A''[u]A[u]A[u] + A'[u]A'[u]A[u]$[1]. Для упрощения записи уравнения (6) и последующих соотношений удобно ввести понятие *дифференциальной степени* оператора.

Определение. *Пусть задан оператор* B: $X_1 \to Y_1$, *определенный на множестве* $O_1 \subset X_1$, *такой, что существуют равномерно непрерывные на множестве* O_1 *его производные Фреше* $B^{(p)}[f] (p = 1, 2, 3, \ldots,\ f \in X_1)$. *Пусть* $F_k[f]$ — *последовательность операторов таких, что*

- $F_0[f] \equiv I[f]$ ($I[\,]$ — *тождественный оператор*),

[1]Здесь и далее тождество означает эквивалентность стоящих слева и справа операторов.

• $F_{k+1}[f] \equiv (F_k[f])' B[f] \quad (k = 0,1,2,\ldots)$. *Назовем* $F_m[f]$, $m \in Z_+$, *m-й дифференциальной степенью оператора* $B[f]$ *и обозначим* $B^{[m]}[f]$. *Число* m *назовем показателем дифференциальной степени оператора.*

Согласно определению дифференциальные степени оператора A связаны между собой рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} &A^{[k+1]}[u] \equiv \left(A^{[k]}[u]\right)' A[u], \quad k = 0,1,2,\ldots, \\ &A^{[0]} \equiv I[u] \equiv u. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, с учетом введенных обозначений уравнение (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_n(\vec{r}\,) = u_{n-3}(\vec{r}\,) + 3\tau A[u_{n-3}(\vec{r}\,)] + \\ + 3\tau^2 A^{[2]}[u_{n-3}(\vec{r}\,)] + \tau^3 A^{[3]}[u_{n-3}(\vec{r}\,)] + R_3\left(\vec{r},\tau\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Сравнивая уравнения (3), (5) и (9) можно предположить, что в общем случае, последовательно выражая функцию $u_n(\vec{r}\,)$через $u_{n-1}(\vec{r}\,)$, $u_{n-2}(\vec{r}\,)$,..., $u_{n-k}(\vec{r}\,)$ и учитывая на каждом шаге только два слагаемых ряда разложения по формуле Тейлора, можно получить зависимость $u_n(\vec{r}\,)$и $u_{n-k}(\vec{r}\,)$ в виде суммы биномиального ряда и некоторого слагаемого $R_k\left(\vec{r},\tau\right)$:

$$u_n(\vec{r}\,) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \tau^i A^{[i]}\left[u_{n-k}(\vec{r}\,)\right] + R_k\left(\vec{r},\tau\right), \tag{10}$$

где

$$C_i^k = \frac{k!}{i!\,(k-i)!}$$

— биномиальные коэффициенты. Действительно, пусть для некоторого $k < n$ уравнение (10) имеет место при указанной последовательности математических операций. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} u_n(\vec{r}\,) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \tau^i A^{[i]}\Big[u_{n-k-1}(\vec{r}\,) + \\ + \tau A\left[u_{n-k-1}(\vec{r}\,)\right] + O\left(\tau^2\right)\Big] + R_k\left(\vec{r},\tau\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Разлагая в ряд по формуле Тейлора оператор $A^{[i]}$ и удерживая первые два члена ряда, получаем

$$\begin{aligned} u_n(\vec{r}\,) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \tau^i A^{[i]}\left[u_{n-k-1}(\vec{r}\,)\right] + \\ + \sum_{i=0}^{k} C_i^k \tau^{i+1}\left(A^{[i]}\left[u_{n-k-1}(\vec{r}\,)\right]\right)' A\left[u_{n-k-1}(\vec{r}\,)\right] + R_{k+1}\left(\vec{r},\tau\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая свойство биномиальных коэффициентов $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$, а также рекуррентное соотношение (8), окончательно имеем

$$u_n(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{k+1} C_i^{k+1} \tau^i A^{[i]} \left[u_{n-k-1}(\vec{r})\right] + R_{k+1}\left(\vec{r}, \tau\right), \qquad (13)$$

Согласно методу математической индукции соотношение (10) имеет место для любого положительного k. В частности, при $k = n$ получим зависимость между функциями $u_n(\vec{r})$ и $u_0(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$

$$u_n(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \tau^i A^{[i]} \left[\varphi(\vec{r})\right] + R_n\left(\vec{r}, \tau\right). \qquad (14)$$

Рассмотрим предел функции $u_n(\vec{r})$ при $n \to \infty$. Для этого умножим и разделим каждую величину τ^i уравнения (14) на n^i:

$$u_n(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{C_i^n}{n^i} (n\tau)^i A^{[i]} \left[\varphi(\vec{r})\right] + R_n\left(\vec{r}, \tau\right). \qquad (15)$$

Предположим, что предел функции $R_n\left(\vec{r}, \tau\right)$ при $n \to \infty$ равен нулю (далее будет показано, что полученная таким образом функция $u(\vec{r}, t)$ представляет точное решение задачи (1)). Если предположение верно, учитывая соотношение $t_n = n\tau = t$, а также соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} C_i^n / n^i = 1/i!$, получаем точное решение задачи (1)

$$u(\vec{r}, t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} t^i A^{[i]} \left[\varphi(\vec{r})\right] = \exp(t\,A) \left[\varphi(\vec{r})\right]. \qquad (16)$$

Правая часть равенства (16) есть обозначение, введенное здесь для удобства. Действительно, ряд средней части равенства (16) подобен разложению экспоненты в ряд Тейлора, что делает оправданным введенное обозначение.

Функция $u(\vec{r}, t)$ в виде (16) удовлетворяет начальному условию задачи (1). Действительно, в силу того, что нулевая дифференциальная степень оператора A есть тождественный оператор $A^{[0]}[\varphi(\vec{r})] \equiv \varphi(\vec{r})$, а перед другими дифференциальными степенями стоит переменная t в соответствующих положительных степенях, то функция $u(\vec{r}, t)$ совпадает с $\varphi(\vec{r})$ при $t = 0$.

Доказательство совпадения предела с точным решением. Приведенное ниже доказательство строится на предположении, что функция (16) существует для любого t из некоторого отрезка $[0, T]$, $T > 0$, и принадлежит множеству O. В противном случае решение задачи (1) не может быть представлено в виде (16).

Чтобы проверить, является ли функция (16) решением задачи, достаточно доказать справедливость равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}=A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}. \tag{17}$$

Для этого разложим правую часть выражения (17) в ряд Тейлора по переменной t относительно $t=0$. Первым членом этого разложения будет функция

$$A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}\Big|_{t=0}=A\left[\varphi(\vec{r}\,)\right],$$

вторым —

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}\right)\Bigg|_{t=0}\cdot t&=\\ =A'\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}\Bigg|_{t=0}\cdot t&=\\ =t\,A'\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]A\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]=t\,A^{[2]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right].&\end{aligned}$$

Таким образом, можно предположить, что ряд Тейлора правой части соотношения (17) по переменной t будет иметь вид

$$A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^{n}A^{[n+1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]. \tag{18}$$

Чтобы доказать справедливость соотношения (18), представим правую часть (17) в виде разложения Тейлора относительно функции $\varphi(\vec{r}\,)$:

$$A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\left(\exp\left(tA\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]-\varphi(\vec{r}\,)\right)^{n} \tag{19}$$

или

$$A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k}A^{[k]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right)^{n}. \tag{20}$$

Соотношение (20) можно записать в другой форме:

$$\begin{aligned}A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\times\\ \times\sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!}&t^{k_1+k_2+\ldots+k_n}A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]A^{[k_2]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, можно записать m-ю ($m\geqslant 1$) производную по переменной t в точке $t=0$. В этом случае в правой части соотношения (21) останутся только слагаемые, в которых показатель степени переменной t равен m. Тогда

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right], \tag{22}$$

где суммирование ведется по всем k_i, таким что $k_1 + \ldots + k_n = m$. Предположим, что для некоторого m выполняется равенство

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}\Big|_{t=0} = A^{[m+1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]. \tag{23}$$

Тогда в силу рекуррентного соотношения (8) имеем $\left(A^{[m+1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right)' \times \times A\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] = A^{[m+2]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]$ и должно выполняться равенство

$$\left\{\frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}\Big|_{t=0}\right\}' A\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] =$$

$$= \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}\Big|_{t=0}. \tag{24}$$

Действительно, представим левую часть (24) в виде

$$\left\{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\right\}' \times$$

$$\times A\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] \sum_{z=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \times$$

$$\times A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\ldots A^{[k_z+1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} A^{(n+1)}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]\ldots$$

$$\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r}\,)\right] A\left[\varphi(\vec{r}\,)\right]. \tag{25}$$

Умножим и разделим второе слагаемое выражения (25) на $n+1$ и учтем, что $(n+1)a = \sum\limits_{z=1}^{n+1} a$, где a — произвольная величина. Получим

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left[u(x,t)\right]\Bigg|_{t=0} \right\}' A\left[\varphi(\vec{r})\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \sum_{z=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \times$$

$$\times A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right] \ldots A^{[k_z+1]}\left[\varphi(\vec{r})\right] \ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(n+1)!} A^{(n+1)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \sum_{z=1}^{n+1} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \times$$

$$\times A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right] \ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right] A\left[\varphi(\vec{r})\right]. \quad (26)$$

Заменив $n+1$ на n во втором слагаемом, можно переписать уравнение (26) в виде

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left[u(x,t)\right]\Bigg|_{t=0} \right\}' A\left[\varphi(\vec{r})\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \sum_{z=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \times$$

$$\times A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right] \ldots A^{[k_z+1]}\left[\varphi(\vec{r})\right] \ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right] +$$

$$+ \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \sum_{z=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_{z-1},k_{z+1},\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_{z-1}!1!k_{z+1}!\ldots.k_n!} \times$$

$$\times A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right] \ldots A^{[k_{z-1}]}\left[\varphi(\vec{r})\right] A^{[1]}\left[\varphi(\vec{r})\right] A^{[k_{z+1}]}\left[\varphi(\vec{r})\right] \ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right]. \quad (27)$$

Здесь во втором слагаемом суммирование ведется по всем k_i, кроме k_z, удовлетворяющим равенству $k_1 + \ldots + k_{z-1} + k_{z+1} \ldots + k_n = m$.

Отметим, что сумма показателей дифференциальных степеней операторов A в первом слагаемом (27) равна теперь $m+1$. Кроме того, в этом слагаемом при $n > 1$ показатель k_z дифференциальной степени z-го оператора A при фиксированных показателях дифференциальных степеней других операторов пробегает все возможные значения, определяемые соотношением $k_1 + \ldots + (k_z + 1) + \ldots + k_n = m + 1$, кроме $m = 1$. Во втором же слагаемом показатель дифференциальной степени z-го оператора A равен единице. Таким образом, можно объединить первое и второе слагаемые уравнения (27) и записать

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left[u(x,t)\right]\Big|_{t=0} \right\}' A\left[\varphi(\vec{r})\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \sum_{z=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!}{k_1!\ldots(k_z-1)!\ldots k_n!} \times$$

$$\times A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots A^{[k_z]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right]. \quad (28)$$

В соотношении (28) сумма берется по всем k_i, удовлетворяющим условию $k_1 + \ldots + k_n = m + 1$. Если умножить и разделить множитель $m!$ на k_z, получим

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left[u(x,t)\right]\Big|_{t=0} \right\}' A\left[\varphi(\vec{r})\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \sum_{z=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!k_z}{k_1!\ldots k_n!} \times$$

$$\times A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots A^{[k_z]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right]$$

или, по-другому,

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial t^m} A\left[u(x,t)\right]\Big|_{t=0} \right\}' A\left[\varphi(\vec{r})\right] = \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \times$$

$$\times \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{m!\left(k_1+\ldots+k_n\right)}{k_1!\ldots k_n!} A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots A^{[k_z]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} A^{(n)}\left[\varphi(\vec{r})\right] \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{(m+1)!}{k_1!\ldots k_n!} A^{[k_1]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots$$

$$\ldots A^{[k_z]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\ldots A^{[k_n]}\left[\varphi(\vec{r})\right] = \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r})\right]\right\}\Big|_{t=0}. \quad (29)$$

Таким образом, соотношение (24) выполняется, что, в свою очередь, в силу метода математической индукции делает справедливым равенство (23) для любого m. В этом случае можно записать ряд Тейлора по степеням переменной t правой части (17)

$$A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r})\right]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^{[n+1]}\left[\varphi(\vec{r})\right]$$

или, по-другому,

$$A\left\{\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r})\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n A^{[n]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n A^{[n]}\left[\varphi(\vec{r})\right]\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\exp\left(t\,A\right)\left[\varphi(\vec{r})\right]\right). \quad (30)$$

Соотношение (30) показывает, что производная функции (16) по времени есть оператор A, действующий на эту функцию, что и требовалось доказать.

Примеры. ***Линейное параболическое уравнение.*** Получим точное решение задачи Коши для линейного параболического уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; t > 0; \\ u(x,t) = \varphi(x), \;\; t = 0. \end{cases} \quad (31)$$

В этом случае дифференциальные степени оператора A имеют вид

$$A^{[k]}\left[\varphi\right] \equiv a^{2k}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial x^{2k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ . \quad (32)$$

Действительно, первая степень этого отображения $A\left[\varphi\right] \equiv a^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, вторая — $A^{[2]}[\varphi] \equiv A'\left[\varphi\right]A\left[\varphi\right] \equiv a^4\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \equiv a^4\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}$ и т.д. Таким образом, учитывая соотношение (16), получаем точное решение задачи (31)

$$u(x,t) = \exp\left(t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\varphi(x)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^{2k}t^k\frac{\partial^{2k}\varphi(x)}{\partial x^{2k}}. \quad (33)$$

Покажем, что функцию (33) можно привести к известному решению [3] задачи Коши для уравнения теплопроводности. Представим функцию $\varphi(x)$ в виде интеграла Фурье:

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{ix\lambda}d\lambda. \quad (34)$$

Тогда соотношение (33) примет вид

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{ix\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-a^2t\lambda^2\right)^k}{k!}d\lambda. \quad (35)$$

Сумма, стоящая под интегралом выражения (35), представляет собой разложение экспоненты в ряд Тейлора, поэтому можно записать

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) \exp\left(ix\lambda - a^2 t\lambda^2\right) d\lambda. \qquad (36)$$

Используя обратное интегральное преобразование Фурье для функции $C(\lambda)$, можно переписать выражение (36) в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-iy\lambda} dy\right] \exp\left(-a^2 t\lambda^2 + ix\lambda\right) d\lambda. \qquad (37)$$

Изменив порядок интегрирования в соотношении (37), запишем

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)\varphi(y)dy, \qquad (38)$$

где

$$G(x,y,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a^2 t\lambda^2 + i(x-y)\lambda\right) d\lambda. \qquad (39)$$

Функция (39) эквивалентна функции [6]

$$G(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right]. \qquad (40)$$

Как известно [3], функция (40) представляет собой функцию Грина линейного параболического уравнения, а функция (38) является решением задачи Коши (31).

Обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Получим точное решение для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \exp(-u), \qquad (41)$$

при условии $u(\vec{r},t)\big|_{t=0} = \varphi(\vec{r})$.

Первая дифференциальная степень оператора экспоненты будет иметь вид $A[\varphi] \equiv \exp(-\varphi)$, вторая $A^{[2]}[\varphi] \equiv -\exp(-2\varphi)$. Для k-й степени запишем выражение

$$A^{[k]}[\varphi] \equiv (-1)^{k-1}(k-1)\exp(-k\varphi).$$

Таким образом, согласно (16) точное решение уравнения (41)

$$u(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)!t^k \exp\left[-k\varphi(\vec{r})\right] = \\ = \ln\left(\exp(\varphi(\vec{r})) + t\right). \qquad (42)$$

Выражение (42) совпадает с выражением, полученным непосредственным интегрированием уравнения (41).

Одномерное уравнение переноса. Рассмотрим нахождение точного решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial u}{\partial x}, \;\; t > 0, \\ u(x,t) = \varphi(x), \;\; t = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Первая дифференциальная степень оператора A в уравнении (43)

$$A^{[1]}[u] \equiv c\frac{\partial u}{\partial x},$$

вторая —

$$A^{[2]}[u] \equiv A'[u]A[u] \equiv c^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \equiv c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

k-я дифференциальная степень

$$A^{[k]}[u] \equiv \underbrace{A'[u]\ldots A'[u]}_{k-1 \text{ раз}}A[u] \equiv c^k\frac{\partial^k u}{\partial x^k}.$$

Согласно (16) получаем точное решение задачи (43)

$$u(x,t) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}c^k\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}t^k = \varphi(x+ct). \tag{44}$$

Решение уравнения Кортевега–де Фриза в виде кноидальных волн. Найдем частное решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза [4] в виде кноидальных волн:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \;\; t > 0; \\ u(x,t) = \varphi(x), \;\;\; t = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Запишем три первые дифференциальные степени оператора A от функции φ:

$$A^{[1]}\left[\varphi\right] \equiv -\varphi\varphi_x - \beta\varphi_{xxx};$$

$$A^{[2]}\left[\varphi\right] = -\frac{d}{dx}\left[\varphi A^{[1]}\left[\varphi\right] + \beta A^{[1]}\left[\varphi\right]_{xx}\right];$$

$$A^{[3]}\left[\varphi\right] = -\frac{d}{dx}\left[\left(A^{[1]}\left[\varphi\right]\right)^2 + uA^{[2]}\left[\varphi\right] + \beta A^{[2]}\left[\varphi\right]_{xx}\right].$$

Согласно выражению (16) записываем решение задачи (45) (с точностью до четвертого члена)

$$u(x,t) = A^{[1]}[\varphi] - \frac{d}{dx}\left[\varphi A^{[1]}[\varphi] + \beta A^{[1]}[\varphi]_{xx}\right] t -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(A^{[1]}[\varphi]\right)^2 + \varphi A^{[2]}[\varphi] + \beta A^{[2]}[\varphi]_{xx}\right] t^2 + \ldots . \quad (46)$$

Покажем, что если функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = B + A\mathrm{cn}^2\left(x\sqrt{\frac{2A+3B-2v}{12\beta}},\ s\right), \quad (47)$$

где $\mathrm{cn}(\alpha,\chi)$ — эллиптическая функция Якоби [5], а A, B, v и s — константы, удовлетворяющие соотношениям

$$s = \frac{A}{2A+3B-2v}, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad 2A+3B-2v > 0,$$

то решение (46) представляет известный вид кноидальной волны. Как известно [4], функция (47) удовлетворяет уравнению

$$\varphi\varphi_x + \beta\varphi_{xxx} = -v\varphi_x. \quad (48)$$

В этом случае первая дифференциальная степень оператора A от φ будет

$$A^{[1]}[\varphi] \equiv -\varphi\varphi_x - \beta\varphi_{xxx} = v\varphi_x,$$

вторая —

$$A^{[2]}[\varphi] = -\frac{d}{dx}\left[\varphi\, v\varphi_x + v\beta\varphi_{xxx}\right] = v^2\varphi_{xx}.$$

Можно предположить, что n-я дифференциальная степень оператора A имеет вид

$$A^{[n]}[\varphi] = v^n\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}. \quad (49)$$

Действительно, $(n+1)$-я дифференциальная степень оператора A связана с n-й соотношением $A^{[n+1]}[\varphi] = \left(A^{[n]}[\varphi]\right)' A[\varphi]$. Учитывая соотношения (48) и (49), получаем выражение для $(n+1)$-й дифференциальной степени

$$A^{[n+1]}[\varphi] = \left(v^n\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\right)'(-\varphi\varphi_x - \beta\varphi_{xxx}) = v^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(v\varphi_x) = v^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^{n+1}},$$

и согласно методу математической индукции для любого n справедливо соотношение (49). Тогда в соответствии с выражением (16) точное решение задачи (45) при условии (46) есть

$$u(x,t) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x^{k+1}}v^k t^k = \varphi(x+vt). \quad (50)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
2. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
3. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
4. У и з е м Д ж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977.
5. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л ё ш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1964.
6. Б у д а к Б. М., Ф о м и н С. В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965.

Статья поступила в редакцию 20.05.2010

Олег Александрович Агапов родился в 1986 г, окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2009 г. Инженер НПК НИИ дальней радиосвязи (Москва). Специализируется в области исследования дифференциальных уравнений.

O.A. Agapov (b. 1986) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2009. Engineer of Research Institute for Far Radio-Communication. Specializes in the field of study of differential equations.