УДК 539.121.4

М. Б. Челноков

О СПИНЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Спин фундаментальных частиц рассмотрен как собственное значение операторного инварианта тензора моментов. Показано, что спиновое квантовое число таких частиц может быть равным только 1/2 и этому числу соответствуют два значения спинового момента импульса — общеизвестное вещественное и не известное ранее, равное ему по модулю мнимое.

E-mail: l-chelnok@yandex.ru

Ключевые слова: фундаментальные частицы, спин, момент импульса, тензор моментов, инвариант.

1. В настоящее время известно, что многие "элементарные" (по старой устоявшейся терминологии) частицы вовсе не элементарны. Например, нуклоны имеют партонную структуру и, вообще, адроны состоят из кварков. Для бесструктурных частиц, не имеющих никаких внутренних составляющих, в литературе начинают использовать два термина — истинно элементарные и фундаментальные. Остановимся на втором термине, как более коротком. В настоящее время общепринято, следуя Вигнеру, определять фундаментальную частицу как объект, описываемый неприводимым представлением группы Пуанкаре [1–4].

В этой группе оператор $\hat{p}^\mu$ является генератором сдвига вдоль оси x^μ, а оператор $\hat{M}^{\mu\nu}$ — генератором четырехмерного вращения в плоскости $x^\mu x^\nu$. Эти генераторы задаются коммутационными соотношениями. В одночастичной квантовой теории генераторы $\hat{p}^\mu$ и $\hat{M}^{\mu\nu}$ отождествляются соответственно с операторами импульса и момента импульса. Известно, что в представлении группы Пуанкаре существуют только два независимых инвариантных оператора P и W (скалярных), которые коммутируют со всеми генераторами группы $\hat{p}^\mu$ и $\hat{M}^{\mu\nu}$:

$$P = \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu, \tag{1}$$

$$W = -\hat{w}^\mu \hat{w}_\mu = \frac{1}{2}\hat{M}_{\mu\nu}\hat{M}^{\mu\nu}\hat{p}_\sigma\hat{p}^\sigma - \hat{M}_{\mu\sigma}\hat{M}^{\nu\sigma}\hat{p}^\mu\hat{p}_\nu. \tag{2}$$

Собственные значения P и W (последний принято называть оператором Паули–Любаньского) используются для классификации неприводимых представлений группы Пуанкаре и, соответственно, фундаментальных частиц по массе и спину.

2. Такое описание фундаментальных частиц (будем говорить сейчас о спине и, соответственно, об операторе Паули–Любаньского) представляется, однако, не вполне корректным. Сомнения в корректности этого подхода связаны со следующими четырьмя обстоятельствами.

• Процитируем Швебера [3]: “Заметим, что в рамки данного определения укладываются и составные системы, такие как, например, атом гелия в основном состоянии, или α-частица”. Итак, нет взаимно-однозначного соответствия между фундаментальной (бесструктурной) частицей и неприводимым представлением группы Пуанкаре.

• Поскольку как оператор Паули–Любаньского является пуанкаре-инвариантным, в том числе инвариантным и относительно трансляций, то, по существу, рассматривается не собственный момент (спин), а полный момент относительно произвольного начала отсчета. В произвольной системе отсчета, где частица движется, это очевидно.

Обычно для исследования спинового спектра картина рассматривается в системе покоя, так что вопрос о начале отсчета вроде бы снимается. Но это не спасает положения, ибо здесь не исключается вариант с предельным переходом $p \to 0$, $r \to \infty$ (с фиксированным углом α между r и p), что в зависимости от способа предельного перехода может дать любое значение момента. Например, зададим p в виде $p = \dfrac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{r\sin\alpha}$, тогда

$$\lim_{r\to\infty,p\to 0} |\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}.$$

• В конечном счете спиновый спектр определяется из оператора $\hat{w}_\sigma = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}\hat{M}^{\mu\nu}\hat{p}^\lambda$ [3], квадрат которого и дает оператор Паули–Любаньского (2). При этом весьма настораживающим является то обстоятельство, что в операторе $\hat{w}^\mu$, записанном в системе покоя (откуда обычно и определяется спиновый спектр), вообще пропадает половина компонент тензора моментов (бивектора), а именно из двух входящих в этот бивектор трехмерных векторов $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ и $\hat{\boldsymbol{N}} = \dfrac{r}{c^2}\hat{\boldsymbol{E}} - t\hat{\boldsymbol{p}}$ остается оператор орбитального момента $\hat{\boldsymbol{L}}$ и пропадает оператор лоренцева момента $\hat{\boldsymbol{N}}$. Как известно, четырехмерный антисимметричный тензор второго ранга имеет два независимых инварианта, в данном случае $\boldsymbol{LN}$ и $L^2 - c^2N^2$. Непосредственная проверка показывает, что $\boldsymbol{LN} = 0$, причем это равенство имеет место как в классической форме, так и в операторной.

Что же касается оператора $\hat{L}^2 - c^2\hat{N}^2$, то нет никаких оснований для отбрасывания $\hat{N}^2$, как это делается сейчас в литературе. Таким образом, общепринятое исключение из анализа оператора $\hat{N}^2$ не дает возможности надеяться на получение правильной и полной информации.

• Весьма настораживает также и следующее обстоятельство. Спин — внутренняя степень свободы, а получается он при исследовании неприводимых представлений группы Пуанкаре, которая является пространственно-временной группой.

3. Идея настоящей работы состоит в том, чтобы рассматривать спин как собственное значение инварианта тензора моментов

$$M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = L^2 - c^2N^2, \tag{3}$$

взятого в операторной форме. Исследование этого оператора должно дать необходимые (но не достаточные) условия того, что частица является бесструктурной, фундаментальной.

В инварианте (3) возможны оба знака: "+" и "–". Пусть L_s^2 — собственное значение этого оператора. Обозначим $\lambda = \pm\left(\frac{L_s}{\hbar}\right)^2$. В сферической системе координат уравнение на собственные значения инварианта (3), взятого в операторной форме, принимает вид

$$\frac{r^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + c^2t^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + 2rt\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial t} + 3t\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \\ + r\left(\frac{2c^2t^2}{r^2} + 1\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \operatorname{ctg}\theta\left(\frac{c^2t^2}{r^2} - 1\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \left(\frac{c^2t^2}{r^2} - 1\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \\ + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{c^2t^2}{r^2} - 1\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} = \lambda\Psi, \tag{4}$$

где Ψ — собственная функция исследуемого оператора.

4. Инвариант (3) и соответствующий оператор давно известны в литературе, однако собственные значения этого оператора никто не исследовал по той причине, что оператор считался трансляционно неинвариантным, т.е. полагалось, что отсутствует полная релятивистская пуанкаре-инвариантность. По нашему мнению, такая точка зрения связана с определенной фетишизацией математического формализма, при которой анализ физической стороны дела страдает неполнотой. Рассмотрим это подробнее.

Классическая картина. Рассмотрим некоторый протяженный объект, например систему материальных точек (частиц), одна из которых находится в точке B, центр инерции — в A, а начало отсчета выбирается в произвольной точке O или в любой другой точке O' (рис. 1).

Если рассматривается момент импульса частицы, находящейся в точке B, относительно начала O или любого другого O' (а после суммирования также и момент импульса всего объекта), то он будет неинвариантен относительно сдвига начала отсчета O, трансляционная инвариантность здесь отсутствует. Но этот момент и не является собственным, он будет полным моментом. Собственным момент будет, только если рассматривать его относительно центра инерции A, а не относительно произвольного начала, т.е.

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i (\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_{0i}) \times \boldsymbol{p}_i. \tag{5}$$

При сдвиге начала отсчета $O \to O'$ вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0$ не изменяется. При этом не изменяется и собственный момент.

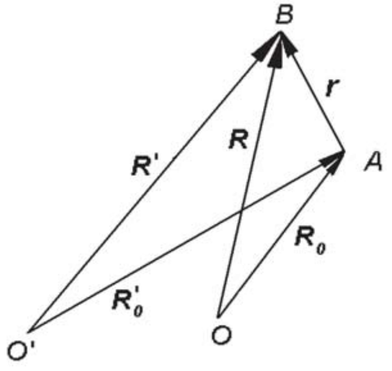

Рис. 1. К вопросу о трансляционной инвариантности инварианта тензора моментов

Квантовая картина (в координатном представлении). В классической картине в окрестности точки A (в точке B и в других) должен быть некоторый объект (частица, поле) с импульсом $\boldsymbol{p}$. В квантовой картине теряет смысл понятие строго локализованного объекта. Но и необходимость в наличии какого-то объекта в точке B отпадает, так как при переходе от классической картины к квантовой динамические переменные заменяются операторами. Таким образом, в окрестности точки A есть распределенная собственная функция оператора, на которую действует этот оператор.

Понятие центра инерции для квантовой частицы теряет смысл, но для нее можно совершенно аналогично (в случае массивной частицы) ввести понятие центра вероятности[1]

$$\boldsymbol{r}_c = \left(\sum_i \int \rho_i(\boldsymbol{r}) dV \right)^{-1} \sum_i \int \boldsymbol{r} \rho_i(\boldsymbol{r}) dV. \tag{6}$$

В формуле (6) $\rho_i(\boldsymbol{r})$ — обычная квантово-механическая плотность вероятности. Суммирование выполняется по всем возможным проекциям спина (как выясняется позже, конкретно по двум, т.е. $\pm 1/2$). Тот факт, что число их заранее неизвестно (так же, как и конкретное значение ρ, соответствующее уравнению Дирака или другому), несуществен, так как выражение для $\boldsymbol{r}_c$ используется не для решения задачи, а лишь для анализа вопроса о трансляционной инвариантности и конкретное выражение $\boldsymbol{r}_c$ не требуется для последующих исследований.

Стоит отметить, что есть одно исключение — свободная (дебройлевская) частица, для которой центр вероятности не существует. Но для абсолютно свободной частицы принципиально ничего невозможно определить экспериментально, она вообще никак себя не проявляет. В любой реальной экспериментальной ситуации, в которой определяется какой-то параметр, например спин частицы, эта частица никогда не является совершенно свободной.

[1] На необходимость введения этого понятия указывал Ю.М. Широков [5]

Таким образом, в квантовой картине точка A связывается с центром вероятности. В этой точке и выбирается начало отсчета сферической системы координат. Может возникнуть подозрение, что, фиксируя выделенную точку A, мы нарушаем однородность пространства, но это, конечно, не так, просто данная точка связывается, как уже говорилось, с положением центра вероятности частицы в пространстве, которое без частицы было однородным. Выделенная точка A аналогична, например, выделенному в изотропном пространстве направлению магнитного поля.

Итак, при сдвиге начала отсчета $O \to O'$ изменяются лишь начала радиусов-векторов $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}_0$, но их разность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0$, которая только и входит в исследуемый оператор, остается неизменной. Таким образом, при исследовании собственного (а не полного) момента импульса трансляционная инвариантность рассматриваемого оператора имеет место.

Трансляционная инвариантность во времени. Исходя из релятивистского равноправия всех компонент тензора моментов, следует ожидать, что трансляционная инвариантность во времени также имеет место. Физический смысл этого следующий. Пусть T и T_0 отсчитываются относительно произвольного начала, которое можно сдвигать. Пусть T_0 — момент начала какого-либо процесса с частицей, например измерения, взаимодействия. Тогда время t, входящее в исследуемый оператор, есть $t = T - T_0$ и оно инвариантно относительно сдвига начала отсчета времени.

Следует отметить, что вводимые здесь переменные $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0$ и $t = T - T_0$, возможно, в некоторой мере перекликаются с внутренними переменными, которые вводились в работах И.Е. Тамма и В.Л. Гинзбурга [6]. Но между этими двумя подходами существует и принципиальная разница. В работах Тамма–Гинзбурга это именно внутренние переменные, здесь же — разность координат в обычном мире Минковского.

5. Собственное значение оператора (3) отождествляем со спином, точнее, с квадратом спина бесструктурной фундаментальной частицы, что аргументировано следующим.

• Инвариантная величина по самой своей сути не зависит от системы отсчета и, следовательно, характеризует некоторые параметры частицы, неразрывно с ней связанные, внутренние, собственные. Не зависящий от системы отсчета момент импульса — это есть собственный момент, т.е. спин. Размерность этого инварианта есть размерность квадрата момента импульса.

Можно провести аналогию с инвариантом четырехмерного импульса, физический смысл которого, как известно, — квадрат собственной энергии (массы) частицы.

• В исследуемом инварианте, в отличие от общепринятого подхода, учитываются оба трехмерных вектора $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{N}$ бивектора момента импульса. И именно учет обоих векторов, в особенности $\boldsymbol{N}$ (лоренцева момента), дает возможность получить спин. Таким образом, природа спина связана и с пространственными, и с временными компонентами тензора моментов.

• Тот факт, что рассматриваемая величина является спином, обосновывается также исследованием операторов проекции спина, которые получаются при извлечении корня из оператора квадрата спина. Это исследование будет рассмотрено в следующей работе, и оно приводит как к результатам, согласующимися с общепринятыми, так и к некоторым новым результатам.

• В предлагаемом подходе не закладывается никакая структура и есть только одна выделенная точка — центр вероятности, с которой связано начало сферической системы координат. Только одна выделенная точка (с математической точки зрения) может быть поставлена с физической точки зрения во взаимно-однозначное соответствие только с бесструктурной точечной фундаментальной (истинно элементарной) частицей. Поэтому результаты данного исследования определяют спин именно такой частицы (с ненулевой массой).

Итак, спин бесструктурных фундаментальных частиц может быть найден из уравнения (4).

Для этого уравнения можно вывести уравнение непрерывности, причем принцип вывода такой же, что и уравнения непрерывности для уравнения Клейна–Гордона, но только здесь сам вывод более громоздкий. В четырехмерных обозначениях искомое уравнение непрерывности имеет вид

$$-\partial_\mu(\bar{\Psi}\partial^\mu x_\nu x^\nu \Psi - \Psi\partial^\mu x_\nu x^\nu \bar{\Psi}) + \partial_\mu(\bar{\Psi}\partial^\nu x_\nu x^\mu \Psi - \Psi\partial^\nu x_\nu x^\mu \bar{\Psi}) = 0, \quad (7)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Отметим, что уравнение (7) можно умножать на любой постоянный множитель, внося его под знак производной, в том числе и на $\pm i$, что нам понадобится в дальнейшем.

Плотность сохраняющейся величины в трехмерных обозначениях в сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\rho = \frac{r^2}{c}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\right) + ctr\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \Psi\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial r}\right). \quad (8)$$

Физический смысл этой величины пока не ясен. Однако это не важно, так как для получения конечных результатов в данной работе без него можно обойтись.

7. В уравнении (4) угловые переменные отделяются от радиальной и временно́й переменных. Решение уравнения для угловых переменных приводит к сферической функции $Y_{nm}(\theta, \varphi)$, а для функции $f(t, r)$ временно́й и радиальной переменных получается уравнение

$$\frac{r^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + c^2 t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2rt\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} + 3t\frac{\partial f}{\partial t} +$$
$$+ r\left(\frac{2c^2t^2}{r^2} + 1\right)\frac{\partial f}{\partial r} - \left[\lambda + n(n+1)\left(\frac{c^2t^2}{r^2} - 1\right)\right] f = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{9}$$

Здесь переменные r и t не разделяются. Стоит отметить, что уравнение (9) при любых значениях переменных r и t — параболического типа. Если в выражение (8) для плотности сохраняющейся величины подставить функцию Ψ в виде $\Psi(t, r, \theta, \varphi) = f(t, r)\psi(\theta, \varphi)$ (аналогично и для $\bar{\Psi}$) и учесть величину элемента объема в сферических координатах, то для сферической функции, нормированной на единицу, количество сохраняющейся величины в шаровом слое r, $r + dr$ получается в виде

$$\left[\bar{f}\left(\frac{r^2}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + ctr\frac{\partial f}{\partial r}\right) - f\left(\frac{r^2}{c}\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + ctr\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\right)\right] r^2 dr. \tag{10}$$

Нет никаких оснований приписывать этой величине ту или иную размерность, поэтому по аналогии с обычной квантовомеханической вероятностью будем считать эту величину безразмерной. Тогда решение уравнения (9) следует искать в виде

$$f(\sigma, \eta) = \eta\Phi(\sigma), \tag{11}$$

где $\eta = 1/(ct)^{2\alpha} r^{2-2\alpha}$; $\sigma = ct/r$ — безразмерная переменная. Так как мы переходим от независимых переменных t, r к двум другим независимым переменным η, σ, то, вообще говоря, α можно выбирать произвольно. Однако, подстановка выражения (11) в уравнение (9) и дальнейший анализ показывает, что переменные η, σ разделяются лишь при $\alpha = 0$, т.е. при $\eta = 1/r^2$. Таким образом, решение уравнения (9) ищем в виде $f(t, r) = \dfrac{1}{r^2}\Phi(\sigma)$. При подстановке функции этого вида в уравнение (9) получаем уравнение для функции $\Phi(\sigma)$:

$$(\sigma^2 - 1)^2\Phi'' + 4\sigma(\sigma^2 - 1)\Phi' + 2(\sigma^2 - 1)\Phi - [\lambda + n(n+1)(\sigma^2 - 1)]\Phi. \tag{12}$$

Если теперь применить подстановку $\Phi(\sigma) = \dfrac{u(\sigma)}{\sqrt{\pm(\sigma^2 - 1)}}$, то это уравнение сводится к уравнению Лежандра

$$(1 - \sigma^2)^2 u'' - 2\sigma(1 - \sigma^2)u' + [n(n + 1)(1 - \sigma^2) - (\lambda + 1)]u = 0. \tag{13}$$

Таким образом, решение исходного уравнения (4) может быть записано в виде

$$\Psi(t,r,\theta,\varphi) = \frac{Y_{nm}(\theta,\varphi)u_n^{\mu}(\sigma)}{r^2\sqrt{\pm(\sigma^2-1)}}, \tag{14}$$

где u_n^{μ} — присоединенная функция Лежандра первого (P_n^{μ}) или второго (Q_n^{μ}) рода. Мы употребляем здесь обозначение u_n^{μ}, имея в виду функцию любого рода. Индексы функции Лежандра: нижний $n = 0, 1, 2, \ldots$, верхний $\mu = \pm\sqrt{\lambda+1}$.

8. Свяжем величину λ, определяющую спиновый момент импульса, со спиновым квантовым числом s соотношением

$$\lambda = \pm\left(\frac{L_s}{\hbar}\right)^2 = \pm s(s+1). \tag{15}$$

В следующей работе, посвященной исследованию спина, будет показано, что именно при таком соотношении между λ и s число s определяет спиновую проекцию. Подставляя (15) в выражение для верхнего индекса функции Лежандра, получаем

$$\mu = \pm\sqrt{1 \pm s(s+1)}. \tag{16}$$

Верхний индекс функции Лежандра μ, вообще говоря, может быть комплексным $\mu = a + bi$. Будем искать его значения, при которых s вещественно. В этом случае оказывается, что μ может быть только вещественным или мнимым, т.е. либо $\mu = a$, либо $\mu = bi$. Выразим из формулы (16) a и b через спиновое квантовое число:

$$a = \pm\sqrt{1 \pm s(s+1)}; \tag{17}$$

$$b = \pm\sqrt{-1 + s(s+1)}. \tag{18}$$

Знак минус перед вторым слагаемым под корнем в формуле (18) следует отбросить, так как при этом b становится мнимым. Из формулы (17) следует, что при $s = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618$ величина a обращается в нуль. Интересно отметить, что число $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ совпадает с обратной величиной знаменитого золотого сечения или, что то же самое, с пределом последовательности отношений двух соседних чисел Фибоначчи. В диапазоне $0 \le s \le \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ функция $a(s)$ двузначна, при $s > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ — однозначна. При больших s функции $a(s)$ и $b(s)$ имеют асимптоты $\pm\left(s+\dfrac{1}{2}\right)$. Графики функций $a(s)$ и $b(s)$ приведены на рис. 2.

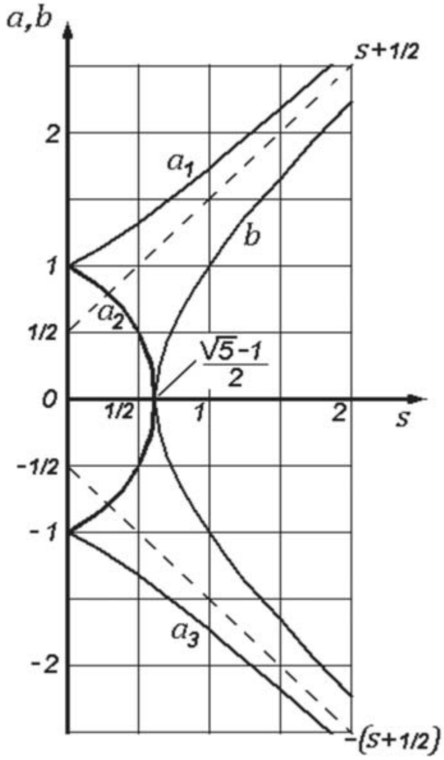

Рис. 2. Графическая интерпретация связи вещественной и мнимой частей верхнего индекса функции Лежандра со спиновым квантовым числом:
$a_1 = \sqrt{1+s(s+1)}$; $a_2 = \pm\sqrt{1-s(s+1)}$; $a_3 = -\sqrt{1+s(s+1)}$

9. Поставим в выражение (8) для плотности ρ сохраняющейся величины функцию Ψ в виде $\Psi = Y(\theta,\varphi)f(t,r)$, где в соответствии с формулой (14)

$$f(t,r) = \frac{u_n^\mu(\sigma)}{r^2\sqrt{\pm(\sigma^2-1)}}. \tag{19}$$

Обозначим $\rho_r = \rho/(Y\bar{Y})$, тогда из формулы (8) получаем

$$\rho_r = \bar{f}\left(\frac{r^2}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + ctr\frac{\partial f}{\partial r}\right) - f\left(\frac{r^2}{c}\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + ctr\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\right). \tag{20}$$

Используя формулу (19), из (20) после преобразований получаем

$$\rho_r = \frac{1}{r^3}(u\bar{u}' - \bar{u}u'). \tag{21}$$

И наконец, дифференцируя функцию Лежандра u [7], приходим к следующему:

при $\mu = a$

$$\rho_r = \frac{n(n+1)+a(1-a)}{r^3\sqrt{\sigma^2-1}}\left(\pm u_n^\mu \overline{u_n^{\mu-1}} - \overline{u_n^\mu} u_n^{\mu-1}\right); \tag{22}$$

при $\mu = bi$

$$\rho_r = \frac{1}{r^3(\sigma^2-1)}\Big\{\pm[n(n+1)+b^2-bi]\sqrt{\sigma^2-1}u_n^\mu\overline{u_n^{\mu-1}}-$$

$$-[n(n+1)+b^2+bi]\sqrt{\sigma^2-1}\overline{u_n^\mu}u_n^{\mu-1}+2bi\sigma u_n^\mu\overline{u_n^\mu}\Big\}. \quad (23)$$

В выражениях (22) и (23) верхний знак относится к $\sigma > 1$, нижний к $\sigma < 1$. Исследуем выражения для ρ_r. Так как n — целое, то удобно для функций Лежандра воспользоваться их представлениями через обрывающийся гипергеометрический ряд [7]. В дальнейших выкладках приходится возводить отрицательные числа в степень, что, как известно, приводит к многозначности, характеризуемой целым числом k оборотов 2π в показателе мнимой экспоненты. При этом оказывается, что если для u_n^μ и $\overline{u_n^\mu}$ брать функции одного рода (первого или второго) и одинаковые k, то всегда $\rho_r \equiv 0$. Однако при выводе уравнения непрерывности нигде не использовалось то обстоятельство, что Ψ и $\bar{\Psi}$ (соответственно f и $\bar{f}$, u и $\bar{u}$) — комплексно-сопряженные функции одного и того же решения. Оказывается, что вывод уравнения не меняется (и остается справедливым результат), если взять какое-либо решение Ψ_1 уравнения (4), а в качестве $\bar{\Psi}$ брать функцию, комплексно-сопряженную к другому решению Ψ_2. Эти решения могут отличаться, во-первых, числами k и, во-вторых, первым или вторым родом функций Лежандра.

Вообще говоря, при произвольных значениях спина и соответственно верхнего индекса функции Лежандра величина ρ_r (и соответственно ρ) будет комплексной. Наложим на нее условие вещественности (или мнимости), что равносильно, в связи с тем, что уравнение непрерывности и вместе с ним величину ρ можно умножать на $\pm i$. По существу, это эквивалентно условию, чтобы сохраняющаяся величина была одна (а не две, как в комплексном случае). Оказывается, что это условие приводит к квантованию верхнего индекса функции Лежандра (и спина), который входит в показатель мнимой экспоненты.

Конкретные выражения для функции Лежандра брались через обрывающийся гипергеометрический ряд [7]. С использованием выражений (22) и (23) был исследован ряд вариантов для ρ_r, соответствующих: 1) разным значениям n; 2) функциям Лежандра разного рода; 3) вещественному или мнимому верхнему индексу функции Лежандра μ; 4) разным диапазонам σ ($\sigma > 1$ и $\sigma < 1$).

Всего было исследовано 26 вариантов (с учетом подвариантов их число равно 53). Структура выражений для ρ во всех вариантах показывает, что дальнейшее исследование при бóльших n не даст новых результатов. Из результатов исследования следует, что мнимый верхний индекс функции Лежандра не приводит к квантованию, следовательно, нужно брать вещественные μ. Далее при вещественном $\mu = a$ функции Лежандра разного рода, различные $n = 0, 1, 2, \ldots$ и разные диапазоны изменения аргументов σ ($\sigma > 1$, $\sigma < 1$) приводят к одному результату, а именно из условия вещественности (или мнимости) плотности сохраняющейся величины ρ следует квантование верхнего индекса функции Лежандра $\mu = a = \pm\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\right)$.

Обратимся к графику функции $a(s)$ (см. рис. 2). При $|a| \geq 1$ значения a лежат на ветви $a = \pm\sqrt{1 + s(s+1)}$, и на этой ветви получаются физически бессмысленные значения спина. Например, $s = 0{,}7$ при $a = \frac{3}{2}$; $s = 1{,}3$ при $a = 2$ и т.п. (аналогично для отрицательных значений a). Видимо, это лишние решения. При $|a| \leq 1$ значения a лежат на другой ветви: $a = \pm\sqrt{1 - s(s+1)}$. Мы отбросим крайние точки $a = 1$ и $a = 0$ этой ветви, ибо, как это видно на графике, они лежат на других ветвях, с лишними решениями (впрочем, не исключено, что эти точки все же имеют какой-то смысл). При этом остается только $a = \pm\frac{1}{2}$, соответствующее спиновому квантовому числу $s = \frac{1}{2}$. Существенно, что лишние решения лежат на другой ветви.

Следует отметить, что постановка вопроса о полном количестве сохраняющейся величины с плотностью ρ, видимо, не имеет смысла (и, следовательно, бессмысленно говорить о нормировке). Дело в том, что при интегрировании ρ получаются расходящиеся интегралы. Приведем пример такого интегрирования. Для варианта: $n = 0$, функция Лежандра первого рода, $\sigma < 1$, $a = \frac{1}{2}$ интегрирование приводит к следующему выражению (без учета сферической функции с угловыми аргументами):

$$\frac{4}{\Gamma^2\left(-\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{d\sigma}{\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} = \frac{\ln 2 - \ln \varepsilon}{\pi}.$$

При $\varepsilon \to 0$ этот интеграл логарифмически расходится.

10. Итак, из условия вещественности (или мнимости) сохраняющейся величины получается единственное значение верхнего индекса функции Лежандра $\mu = a = \pm\frac{1}{2}$, соответствующее спиновому квантовому числу $s = \frac{1}{2}$. При этом получаются два значения спинового момента импульса: одно — вещественное $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\frac{\sqrt{3}}{2}$,

другое — мнимое $L_s = i\hbar\sqrt{s(s+1)} = i\hbar\frac{\sqrt{3}}{2}$. Для пояснения этого запишем формулу (17) не через спиновое квантовое число s, а через спиновый момент L_s:

$$a = \pm\sqrt{1 \pm \left(\frac{L_s}{\hbar}\right)^2}. \tag{24}$$

Значение $a = \pm\frac{1}{2}$ соответствует отрицательному знаку перед модулем второго слагаемого под корнем. Поэтому при вещественном спиновом моменте ($L_s^2 > 0$) нужно взять нижний знак, а при мнимом ($L_s^2 < 0$) — верхний.

В связи с тем, что в уравнении (4) начало отсчета сферической системы координат выбрано в центре вероятности, полученный результат относится только к массивным частицам и не применим к безмассовым. Таким образом, массивная бесструктурная фундаментальная (истинно элементарная) частица может иметь спиновое квантовое число только $\frac{1}{2}$ (и соответствующие ему вещественный и мнимый спиновые моменты). Массивные частицы с иным спином в принципе могут быть только составными. Естественными кандидатами на роль фундаментальных частиц являются лептоны и кварки, спин которых как раз и равен $\frac{1}{2}$.

На первый взгляд, полученному результату не удовлетворяют промежуточные векторные бозоны. Поэтому мы рискнем высказать предположение, что они являются составными. Это согласуется с тем, что в ЦЕРНе были обнаружены аномальные распады Z^0 бозона $Z^0 \to e^+ + e^- + \gamma$ и $Z^0 \to \mu^+ + \mu^- + \gamma$ [8]. Экспериментально найденная вероятность таких распадов более чем на три порядка превышает предсказание стандартной модели. Как указывается в работе [8], это расхождение можно объяснить тем, что бозоны не являются элементарными, а имеют некоторую внутреннюю структуру.

Полученный в настоящей работе результат, что s равняется только $\frac{1}{2}$, отличается от результата, который следует из общепринятого анализа спина на основе неприводимых представлений группы Пуанкаре, где получается неограниченный ряд $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. Анализ недостатков этого подхода был дан выше.

Что касается полученного в данной работе необычного вывода о мнимом спине, то его физический смысл и вопрос об экспериментальном подтверждении его существования будет рассмотрен в следующей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W i g n e r E. P. Theoretical physics. Lectures presented at a seminar, Trieste, 16 July – 25 August 1962. Vienna: JAEA, 1963. – P. 59–82.
2. Р у м е р Ю. Б., Ф е т А. И. Теория групп и квантованные поля. – М.: Наука, 1977. – С. 176.
3. Ш в е б е р С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. – М.: ИЛ, 1963. – С. 57.
4. Б о р д о в и ц ы н В. А., Т е р н о в И. М. О пуанкаре-инвариантном представлении спина в квантовой теории // ТМФ. – 1982. – Т. 51. – С. 327–334.
5. Ш и р о к о в Ю. М. Множественные процессы и описание составной структуры адронов в трехмерной формулировке квантовой теории поля // ЖЭТФ. – 1951. – Т. 21. – С. 748–760.
6. Т а м м И. Е. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – С. 205–212.
7. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. Т. 1. – С. 125–162.
8. R e n a r d F. M. Tests of substructure of heavy quarks // Phys. Rev. Lett. – 1983. – V.D28. – P. 91.

Статья поступила в редакцию 18.01.2010

Михаил Борисович Челноков родился в 1938 г., окончил Московский авиационный институт в 1961 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 30 научных работ в области физики плазмы, спектроскопии, релятивистской электродинамики, квантовой механики.

M.B. Chelnokov (b. 1938) graduated from the Moscow Aviation Institute in 1961. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 30 publications in the field of plasma physics, spectroscopy, relativistic electrodynamics, quantum mechanics.