УДК 530+551.5081

В. О. Гладышев, П. С. Тиунов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СИНХРОННОЙ РЕГИСТРАЦИИ СИГНАЛОВ ДЕТЕКТОРАМИ, ДВИЖУЩИМИСЯ В РАЗНЫХ КВАЗИИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Получены пространственно-временные преобразования независимых переменных, которые могут быть использованы при описании процесса синхронной регистрации сигналов детекторами, движущимися в произвольных инерциальных системах отсчета. Теоретический подход открывает путь для моделирования процессов передачи данных в квазиинерциальных системах отсчета при нерелятивистских скоростях движения.

E-mail: vgladyshev@mail.ru

Ключевые слова: преобразования пространства-времени, инвариантность, синхронизация, группа Лоренца, преобразования Меллера.

Развитие техники астрономических оптических наблюдений стимулировало в последние годы проведение теоретических и экспериментальных работ, направленных на описание электродинамических процессов с учетом влияния земной атмосферы. Интерес к детальному описанию процесса распространения электромагнитного излучения также связан с развитием спутниковых систем навигации типа ГЛОНАСС, GPS, обеспечивающих определение местоположения и кинематических характеристик летательных аппаратов с высокой точностью [1–4].

Работоспособность космических лазерных интерференционных гравитационных антенн или спутниковых систем, основанных на процедуре обмена электромагнитными сигналами, обеспечивается высокой стабильностью часов, источников и приемников сигналов, а также учетом при вычислениях эффектов, связанных с движением в различных системах отсчета, влияния атмосферы, наличия земного гравитационного потенциала и др.

В связи с большими расстояниями и скоростями летательных аппаратов в подобных экспериментах могут становиться реальными эффекты замедления времени, сокращения длины, сдвига частоты электромагнитного излучения, асинхронизации работы часов и т.п., что обусловливает необходимость рассмотрения методов транспортировки часов и методов связи через геостационарный ИСЗ с учетом релятивистских эффектов [5–7].

Для адекватного описания работы подобных измерительных систем необходим выбор удобной системы отсчета и построение преобразований пространства–времени в форме, которая наиболее точно соответствует используемым метрологическим процедурам.

В настоящей работе получены пространственно-временные преобразования независимых переменных, которые могут использоваться при описании процесса синхронной регистрации сигналов детекторами, движущимися в произвольных инерциальных системах отсчета (ИСО). Теоретический подход открывает путь для моделирования процессов передачи данных в квазиинерциальных системах отсчета при нерелятивистских скоростях движения, а также для моделирования процессов передачи данных в системе спутник–Земля в реальном масштабе времени с учетом влияния трехмерного поля скоростей движения атмосферы, т.е. с учетом пространственного эффекта Физо.

Обработка данных глобальных навигационных сетей с использованием математического моделирования процессов синхронной регистрации сигналов детекторами, движущимися в различных квазиинерциальных системах отсчета, может дать основу для проверки фундаментальных положений специальной теории относительности и электродинамики, а также более точную проверку принципа эквивалентности всех ИСО [1].

В настоящее время широко обсуждается вопрос об анизотропии пространства. По некоторым данным значение анизотропии для Солнечной системы, движущейся относительно центра Галактики, равно 10^{-12}, для Земли относительно Солнца — $4 \cdot 10^{-16}$ [8]. В работах [9, 10] отмечено, что наиболее надежной верхней границей анизотропии следует считать значение 10^{-10}, полученное путем измерения поперечного эффекта Доплера с помощью эффекта Мессбауэра [11, 12].

К важным экспериментальным предпосылкам возможного отличия реального пространства-времени от геометрии Минковского можно отнести результаты наблюдений за астрономическими объектами на космологических расстояниях, которые демонстрируют анизотропию свойств, характерную для финслеровых пространств. Среди работ, выявляющих анизотропию в масштабе Вселенной, можно отметить исследования закономерностей в распределении собственных окружных движений квазаров [13], обнаружение неравноправности направлений в распределении параметра Хаббла по небосводу [14], а также открытие анизотропии реликтового космического микроволнового излучения (программа “Реликт” в Институте космических исследований РАН [15] и серия экспериментов на спутниках COBE [16] и WMAP [17], выполненных NASA).

В настоящей работе полагается, что расширение формы пространственно-временных преобразований в будущем позволит учесть анизотропию пространства, оценить ее влияние на результаты фундаментальных физических экспериментов, использовать в задачах локации и навигации.

Построение общих 4-мерных преобразований. Введем некоторое физическое пространство (ФП) четырех независимых переменных с множеством покоящихся в нем ИСО, в которых скорость c света в общем случае находится из решения соответствующих дисперсионных уравнений для конкретного распределения среды и ее скорости. Относительно этих ИСО можно задать бесконечное множество движущихся ИСО, переход к которым при отсутствии среды осуществляется преобразованиями Лоренца с соответствующими частными дифференциалами координат и времени. В силу точной компенсации эффекта замедления времени и кинематического эффекта изменения интервала времени распространения светового сигнала между часами произвольно движущихся ИСО измеряемая скорость распространения фундаментальных взаимодействий в движущихся ИСО без учета движущейся среды также равна c.

При построении общих 4-мерных преобразований для произвольного пространственного движения двух ИСО в ФП будем использовать метод, позволяющий строить преобразования, дающие правильные соотношения для частных дифференциалов, с одной стороны, и удовлетворяющие лоренц-инвариантности, с другой [18–21].

Указанному случаю соответствует расположение ИСО$_i$ относительно ИСО, покоящейся в ФП. Любое событие S может быть задано радиус-вектором $\vec{r}$ и временем t в ИСО, покоящейся в ФП. В двух ИСО$_i$ этому событию будут соответствовать $\vec{r}_{1,2}$ и $t_{1,2}$ (рисунок). Так как диэлектрические и магнитные характеристики среды принято задавать в системе отсчета, где среда покоится, будем для определенности считать, что такой системой отсчета является ИСО в ФП.

Согласно методу Меллера можно записать преобразования $\vec{r}$ и t для ИСО, движущейся произвольным образом относительно ФП [22]. Будем считать, что переменные $\vec{r}, t$ соответствуют ИСО, покоящейся в ФП, а $\vec{r}_{1,2}$ и $t_{1,2}$ — двум произвольным движущимся ИСО. Тогда, объединив преобразования между исходной ИСО и двумя ИСО$_i$, можно записать

$$\vec{r} = D_i^{-1}\vec{r}_i - \vec{V}_i\left[\frac{\alpha_i}{V_i^2}\left(\vec{r}_i, \vec{V}_i\right) - \gamma_i t_i\right]; \qquad (1)$$

$$t = \gamma_i t_i - \gamma_i \frac{\left(\vec{r}_i, \vec{V}_i\right)}{c^2}, \qquad (2)$$

где $\alpha_i = \gamma_i - 1$; $\gamma_i^{-2} = 1 - \beta_i^2$; $\beta_i = V_i/c$; $i = 1, 2$.

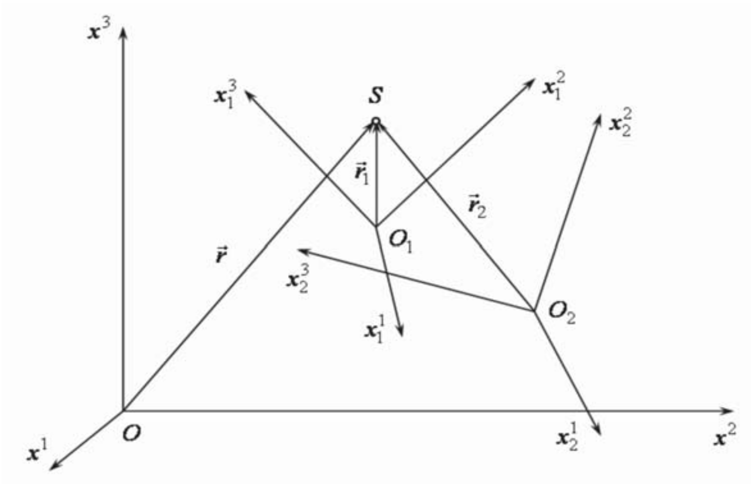

Схема движения ИСО$_i$:

ИСО$_i$ совершают прямолинейное равномерное движение относительно ИСО; любое событие S может быть задано радиус-вектором $\vec{\boldsymbol{r}}$ и временем $\boldsymbol{t}$ в ИСО, покоящейся в ФП

Данные преобразования соответствуют группе Лоренца и обладают инвариантными свойствами для полных дифференциалов. В нее входят скорости V_i, которые связаны формулой преобразования скорости

$$\vec{\beta}_2 = a\vec{\beta}_0 + b\vec{\beta}_1, \tag{3}$$

где $a = \dfrac{\sqrt{1-\beta_1^2}}{1+\left(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_0\right)}$; $b = \dfrac{\left(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_0\right)\left(1-\sqrt{1-\beta_1^2}\right)+1}{1+\left(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_0\right)}$; $\beta_0 = V_0/c$; V_0 — относительная скорость ИСО$_1$ и ИСО$_2$.

Для нахождения преобразований с учетом неинвариантных свойств частных дифференциалов будем оперировать с дифференциалами величин, входящих в преобразования (1)–(2), так как частные производные для выражений полных дифференциалов определяют независимый вклад дифференциалов независимых переменных.

Найдем соотношения для частных дифференциалов пространственных координат.

Получим дифференциал $d\vec{r}$ для (1) при $i = 1, 2$ и приравняем правые части полученных выражений, оставив только пространственные координаты:

$$D_1^{-1} d\vec{r}_1 - \vec{V}_1 \frac{\alpha_1}{V_1^2}\left(d\vec{r}_1, \vec{V}_1\right) = D_2^{-1} d\vec{r}_2 - \vec{V}_2 \frac{\alpha_2}{V_2^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_2\right). \tag{4}$$

Уравнение (4) позволяет найти частные производные искомых преобразований перед дифференциалами пространственных координат.

Для его решения относительно $d\vec{r}_i$ запишем систему трех линейных уравнений

$$D_1^{-1}dx_1^\mu - V_{1\mu}\frac{\alpha_1}{V_1^2}\left(d\vec{r}_1, \vec{V}_1\right) = D_2^{-1}dx_2^\mu - V_{2\mu}\frac{\alpha_2}{V_2^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_2\right). \quad (5)$$

В проекции на координатные оси x^μ решение имеет вид

$$dx_1^\mu = D_2^{-1}a_\nu^\mu dx_2^\nu - a_\nu^\mu V_{2\nu}\frac{\alpha_2}{V_2^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_2\right), \quad (6)$$

где

$$a_\nu^\mu = g\begin{pmatrix} \tau\bar{\tau} + \dfrac{D_1}{g}\left(\dfrac{V_{12}^2 k_2}{\kappa_2} + \dfrac{1}{\kappa_1}\right) & \sigma\bar{\tau} + D_1\dfrac{V_{12}k_2}{g\kappa_2} & \bar{\tau} \\ \sigma\tau + D_1\dfrac{V_{12}k_2}{g\kappa_2} & \sigma^2 + \dfrac{D_1}{g\kappa_2} & \sigma \\ \tau & \sigma & 1 \end{pmatrix};$$

$$g = (\lambda - p\sigma)^{-1}; \quad \tau = k_2(\sigma V_{12} - V_{13}); \quad \bar{\tau} = k_2(\sigma V_{12} + V_{13});$$

$$\sigma = \frac{p}{\kappa_2}; \quad p = V_{12}V_{13}p_0; \quad \lambda = 1 - V_{13}^2 p_0; \quad p_0 = k_1 + \kappa_1 k_2^2;$$

$$k_1 = \frac{\alpha_1 D_1}{V_1^2}; \quad k_2 = \frac{k_1 V_{11}}{\kappa_1}; \quad \kappa_1 = 1 - k_1 V_{11}^2; \quad \kappa_2 = 1 - V_{12}^2 p_0.$$

Приведенные выражения связывают мгновенные значения приращений координат в различных движущихся ИСО.

Для того чтобы получить выражения полных дифференциалов, включая временную координату, запишем искомый результат в виде

$$dx_1^\mu = a_\nu^\mu \rho^\nu + \hat{\beta}_\mu V_{0\mu}\frac{dx_2^4}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \quad (7)$$

Здесь $\rho^\nu = D_2^{-1}dx_2^\nu - V_2^\nu\dfrac{\alpha_2}{V_2^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_2\right)$; $dx_2^4 = dt_2$; $V_{0\mu}$ — проекция относительной скорости ИСО$_i$ на координатную ось x^μ; $\hat{\beta}_\mu$ — неизвестное выражение, которое можно найти из условия инвариантности полного дифференциала dx_1^μ. Следовательно, условие, достаточное для определения $\hat{\beta}_\mu$, имеет вид

$$a_\nu^\mu\rho^\nu + \hat{\beta}_\mu V_{0\mu}\frac{dx_2^4}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = D_2^{-1}dx_2^\mu - V_{0\mu}\frac{\alpha_0}{V_0^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0\right) + V_{0\mu}\frac{dx_2^4}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \quad (8)$$

Для нахождения $\hat{\beta}_\mu$ выделим в левой части уравнения первые два члена, стоящие справа, и сократим их. Имеем для первого слагаемого в (6)

$$D_2^{-1}a_\nu^\mu dx_2^\nu = D_2^{-1}dx_2^\mu + D_2^{-1}\left(a_\nu^\mu dx_2^\nu - dx_2^\mu\right) = D_2^{-1}dx_2^\mu + D_2^{-1}\hat{a}_\nu^\mu dx_2^\nu, \quad (9)$$

где

$$\hat{a}^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} a^{\mu}_{\nu}, & \mu \neq \nu; \\ a^{\mu}_{\nu} - 1, & \mu = \nu. \end{cases}$$

Кроме того, для второго слагаемого в (6) с учетом (3) имеем:

$$a^{\mu}_{\nu} V_{2\nu} \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_2 \right) = V_{0\mu} \frac{\alpha_0}{V_0^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) + \\ + a^2 \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) \left(a^{\mu}_{\nu} V_{0\nu} - \frac{\alpha_0}{V_0^2} \frac{V_2^2}{a^2 \alpha_2} V_{0\mu} \right) + aba^{\mu}_{\nu} V_{0\nu} \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_1 \right) + \\ + aba^{\mu}_{\nu} V_{1\nu} \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) + b^2 a^{\mu}_{\nu} V_{1\nu} \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_1 \right). \quad (10)$$

Тогда с учетом (9) и (10) в левой части уравнения (8) можно произведение $a^{\mu}_{\nu} \rho^{\nu}$ записать в виде

$$a^{\mu}_{\nu} \rho^{\nu} = D_2^{-1} dx_2^{\mu} + D_2^{-1} \hat{a}^{\mu}_{\nu} dx_2^{\nu} - V_{0\mu} \frac{\alpha_0}{V_0^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) - \\ - a \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) \left[a \hat{a}^{0\mu}_{\nu} V_{0\nu} + ba^{\mu}_{\nu} V_{1\nu} \right] - \\ - ba^{\mu}_{\nu} \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_1 \right) \left[aV_{0\nu} + bV_{1\nu} \right], \quad (11)$$

где

$$\hat{a}^{0\mu}_{\nu} = \begin{cases} a^{\mu}_{\nu}, & \mu \neq \nu; \\ a^{\mu}_{\nu} - \dfrac{\alpha V_2^2}{\alpha_2 V^2 a^2}, & \mu = \nu. \end{cases}$$

После подстановки выражения (11) в (8) и сокращения подобных членов получим

$$\hat{\beta}_{\mu} V_{0\mu} \gamma_0 dx_2^4 + D_2^{-1} \hat{a}^{\mu}_{\nu} dx_2^{\nu} - a \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) \left[a \hat{a}^{0\mu}_{\nu} V_{0\nu} + ba^{\mu}_{\nu} V_{1\nu} \right] - \\ - ba^{\mu}_{\nu} \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_1 \right) \left[aV_{0\nu} + bV_{1\nu} \right] = V_{0\mu} \gamma_0 dx_2^4. \quad (12)$$

Выразим из (12) $\hat{\beta}_{\mu}$ как

$$\hat{\beta}_{\mu} = 1 - \frac{1}{V_{0\mu} \gamma_0 dx_2^4} \left\{ D_2^{-1} \hat{a}^{\mu}_{\nu} dx_2^{\nu} - a \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) \left[a \hat{a}^{0\mu}_{\nu} V_{0\nu} + ba^{\mu}_{\nu} V_{1\nu} \right] - \\ - ba^{\mu}_{\nu} \frac{\alpha_2}{V_2^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_1 \right) \left[aV_{0\nu} + bV_{1\nu} \right] \right\}. \quad (13)$$

Будем иметь в виду, что в $\hat{\beta}_{\mu}$ должны отсутствовать дифференциалы координат, так как этот коэффициент определяет вклад временной координаты, а следовательно, не должен зависеть от приращений координат. Учтем также, что $cdx_2^4 = |d\vec{r}_2|$ (рассматривается случай распространения излучения в вакууме).

Для оценки влияния среды с учетом ее движения представим скорость распространения электромагнитного излучения в i-м движущемся слое среды формулой

$$v_i = \frac{\omega_0}{k_{in}}.$$

Здесь v_i — фазовая скорость электромагнитной волны, которая равна групповой скорости для монохроматического цуга в каждом i-м слое среды, c — скорость света в вакууме. Величины v_i находятся из решения дисперсионного уравнения. В общем случае считаем $v = v(r,t)$ гладкой функцией пространственных и временных координат, $\beta_e = v/c$.

Тогда $v_i dx_2^4 = |d\vec{r}_2|$, и в пределе (для конечного времени распространения сигнала) получим

$$x_2^4 = \frac{1}{c}\int\limits_0^{|\vec{r}_2|} \frac{dr}{\beta_e(r,t)}.$$

Уравнение содержит показатель преломления $n = n(r,t) = \sqrt{\varepsilon\,(r,t)}$ атмосферы Земли (или межзвездной среды) или излучающей области астрофизического объекта в сопутствующей ИСО, т.е. в системе, где среда покоится. Показатель преломления зависит от t, так как среда изменяется во времени. (Детальное исследование вопроса о включении уравнений движения среды будет рассмотрено в продолжении данной работы.)

Введем обозначения

$$\hat{a}^\mu_\nu dx_2^\nu = (\hat{a}^\mu, dr_2)\,, \quad d\vec{r}_2^{\,n} = \frac{d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_2|}.$$

Тогда соотношение (13) примет вид

$$\hat{\beta}_\mu = 1 - \frac{1}{\beta_{0\mu}\gamma_0}\left\{D_2^{-1}\left(\hat{a}^\mu, d\vec{r}^{\,n}_2\right) - a\frac{\alpha_2}{V_2^2}\left(d\vec{r}^{\,n}_2, \vec{V}_0\right)\left[a\hat{a}^{0\mu}_\nu V_{0\nu} + b a^\mu_\nu V_{1\nu}\right] - \right.$$
$$\left. - b a^\mu_\nu \frac{\alpha_2 V_{2\nu}}{V_2^2}\left(d\vec{r}^{\,n}_2, \vec{V}_1\right)\left[aV_{0\nu} + bV_{1\nu}\right]\right\}. \quad (14)$$

В полученном соотношении присутствуют $\alpha_2,\ V_2,\ V_{2\nu}$, однако их выражения через $V_1,\ V_0$ всегда могут быть легко получены. Но, с другой стороны, это делает запись более громоздкой.

Присутствие нормированного радиус-вектора смещения $ИСО_2$ является следствием зависимости вклада временной координаты от направления перемещения $ИСО_2$ относительно $ИСО_1$, так как именно суммарный относительный поворот ИСО$_i$ в 4-мерном пространстве приводит к перемешиванию пространственной и временной координат.

Приведем преобразования (7) к виду, аналогичному (1). С учетом (6) имеем

$$dx_1^\mu = D_2^{-1} a_\nu^\mu dx_2^\nu - a_\nu^\mu \frac{\alpha_2 V_{2\nu}}{V_2^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_2\right) + \gamma_0 \hat{\beta}_\mu V_{0\mu} dx_2^4. \qquad (15)$$

Перейдем во втором слагаемом от V_2 к V_0 и V_1:

$$dx_1^\mu = D_2^{-1} a_\nu^\mu dx_2^\nu - a a_\nu^\mu \frac{\alpha_2 V_{2\nu}}{V_2^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0\right) - b a_\nu^\mu \frac{\alpha_2 V_{2\nu}}{V_2^2}\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_1\right) + \gamma_0 \hat{\beta}_\mu V_{0\mu} dx_2^4. \qquad (16)$$

Учтем, что $a_\nu^\mu dx_2^\nu = (\vec{a}^\mu, d\vec{r}_2)$, и скомбинируем 1-е и 3-е слагаемые:

$$dx_1^\mu = D_2^{-1}\left(\hat{\eta}_\mu, d\vec{r}_2\right) - \frac{\alpha_0 V_{0\mu}}{V_0^2}\hat{\tau}_\mu\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0\right) + \gamma_0 \hat{\beta}_\mu V_{0\mu} dx_2^4, \qquad (17)$$

где введены обозначения

$$\hat{\eta}_\mu = \vec{a}^\mu - \frac{b}{D_2^{-1}}\frac{\alpha_2}{V_2^2} a_\nu^\mu V_{2\nu} \vec{V}_1; \qquad \hat{\tau}_\mu = a\ a_\nu^\mu \frac{\alpha_2 V_0^2 V_{2\nu}}{\alpha_0 V_2^2 V_{0\mu}}. \qquad (18)$$

Для нахождения полного дифференциала временной координаты выполним аналогичные преобразования. Сначала получим соотношения мгновенных значений времени, измеряемого часами в ИСО$_1$ и ИСО$_2$. Для этого запишем дифференциал для временной координаты в (2):

$$dt = \gamma_i dt_i - \gamma_i \frac{\left(d\vec{r}_i, \vec{V}_i\right)}{c^2}. \qquad (19)$$

Исключим dt, считая неизменными пространственные координаты, и подставим коэффициенты a, b. В результате преобразований получим

$$dt_1 = \gamma_0 \lambda_1 dt_2 + \lambda_2 \frac{\gamma_0}{c}\left(d\vec{r}_2, \vec{\beta}_0\right), \qquad (20)$$

где

$$\lambda_1 = 1 + \left(\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1\right); \qquad \lambda_2 = 1 + \frac{\left(\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1\right)}{\left(d\vec{r}_2^{\,n}, \vec{\beta}_0\right)}. \qquad (21)$$

Видно, что полученные выражения имеют линейную форму, что позволяет перейти от дифференциалов переменных к самим переменным [12, 13].

Запишем общие 4-мерные преобразования и покажем их связь со специальными преобразованиями.

В рассматриваемом нами случае плоского пространства поворот ИСО$_i$ является постоянной величиной для любой области ФП, скорости ИСО являются постоянными, следовательно, dx_i^k — постоянные величины в любой точке выбранной ИСО ($k = 1, 2, 3, 4$). Направления $d\vec{r}_i$ совпадают с направлениями соответствующих осей $\vec{r}_i$, так как ищутся преобразования координат событий, имеющих фиксированные координаты в любой ИСО$_i$. Следовательно, преобразования координат будут иметь вид

$$x_1^\mu = D_2^{-1}\left(\hat{\eta}_\mu, \vec{r}_2\right) - \frac{\alpha_0 V_{0\mu}}{V_0^2}\hat{\tau}_\mu\left(\vec{r}_2, \vec{V}_0\right) + \gamma_0\hat{\beta}_\mu V_{0\mu}x_2^4; \tag{22}$$

$$t_1 = \gamma_0\lambda_1 t_2 + \lambda_2\frac{\gamma_0}{c}\left(\vec{r}_2, \vec{\beta}_0\right). \tag{23}$$

Несмотря на громоздкость записи коэффициентов, входящих в преобразования, не составляет большого труда переход к более частным случаям при решении конкретных задач. В качестве иллюстрации вычисления коэффициентов рассмотрим случай, когда $\beta_1 = 0$ и преобразования должны переходить в форму, аналогичную преобразованиям (1)–(2). Кроме того, положим $D = 1$, т.е. поворот ИСО$_1$ отсутствует.

Тогда $\gamma_1 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Вычислим коэффициенты в пределе, когда $\beta_1 \to 0$, поскольку параметр скорости встречается как в числителе, так и в знаменателе: $a = 1$, $b = 1$, $k_1 = \dfrac{1}{2c^2}$, $k_{2_{11}} = 0$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1$, $\sigma = 0$, $\tau = 0$, $g = \bar{g} = 1$.

Подставим найденные коэффициенты в $a_\nu^\mu, \hat{a}_\nu^\mu, \hat{a}_\nu^{0\mu}, \hat{\eta}_\mu, \hat{\tau}_\mu, \hat{\beta}_\mu$, учитывая, что $\lim\limits_{\beta_1 \to 0}\dfrac{\alpha_2}{V_2^2} = \dfrac{\alpha_0}{V_0^2}$.

Получим

$$a_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{a}_\nu^\mu = \hat{a}_\nu^{0\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\eta}_\mu = \vec{a}^\mu; \quad \left(\hat{\eta}_\mu, \vec{r}_2\right) = \vec{r}_2; \quad \hat{\tau}_\mu = 1; \quad \vec{\beta}_\mu = 1.$$

Как следует из выражений для коэффициентов $\hat{\eta}_\mu, \hat{\tau}_\mu, \hat{\beta}_\mu$, общие преобразования в рассматриваемом случае переходят в преобразования

$$\vec{r}_1 = D_2^{-1}\vec{r}_2 - \vec{V}_0\left[\frac{\alpha_0}{V_0^2}\left(\vec{r}_2, \vec{V}_0\right) - \gamma_0 t_2\right]; \tag{24}$$

$$t_1 = \gamma_0 t_2 - \gamma_0\frac{\left(\vec{r}_2, \vec{V}_0\right)}{c^2}; \tag{25}$$

$$\alpha_0 = \gamma_0 - 1; \quad \gamma_0^{-2} = 1 - \beta_0^2; \quad \beta_0 = V_0/c.$$

Данный подход был предложен в работе [18]. Выражения для коэффициентов, входящих в преобразования, могут иметь другую форму, что зависит от выбранного метода решения системы уравнений для дифференциалов координат.

Параметр β_1, входящий в преобразования, не является абсолютным, а изменяет свою величину в зависимости от семейства инерциальных систем отсчета, выбранных в качестве ФП.

Можно заметить, что при движении T_1 и T_2 вдоль OX $\left(\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1\right) = \beta_0\beta_1$ и тензор преобразований координат будет иметь вид

$$g_\mu^\nu = \begin{vmatrix} \gamma_0 \left(1 + \beta_1\beta_0\right) & 0 & 0 & \gamma_0 V_0 \left(1 - \beta_1\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_0 \dfrac{V_0}{c^2} \left(1 - \beta_1\right) & 0 & 0 & \gamma_0 \left(1 + \beta_1\beta_0\right) \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Используя формулу (26) и выражение для квадрата интервала

$$dS_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - c^2 dt_1^2,$$

можно обнаружить, что даже в частном случае при движении вдоль OX данное выражение не является форм-инвариантным:

$$dS_1^2 = \alpha_0 dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2 - c^2\alpha_0 dt_2^2,$$

где $\alpha_0 = \gamma_0 \left[\left(1 + \beta_1\beta_0\right)^2 - \beta_0^2 \left(1 - \beta_1\right)^2\right]$.

При $\beta_1 = 0$ выражение для интервала переходит в стандартную форму. Однако, при переходе к любой другой паре ИСО будут изменяться только β_1 и β_0, форма выражения для dS_1^2 изменяться не будет. Данное определение инвариантности можно назвать специальной инвариантностью интервала.

Полученные преобразования могут быть использованы при описании процедур регистрации астрофизических сигналов разнесенными детекторами, движущимися в различных ИСО. Благодаря заложенной процедуре синхронизации и учету неинвариантных свойств частных дифференциалов преобразования могут быть обобщены на произвольное число ИСО$_i$. Они могут быть расширены на случай распространения излучения в среде. Все измерения пространственно-временных характеристик физических процессов в данных ИСО будут являться синхронизованными.

При определенных условиях полученные преобразования могут быть использованы в случае неинерциального движения.

Интегральная форма преобразований. Неравномерное движение часов можно представить как непрерывный переход от одной мгновенно сопутствующей ИСО к другой. В результате время, прошедшее по часам T_2, движущимся относительно часов T_1 по заданному закону $v(t)$, будет определяться выражением

$$t_2 = \int\limits_0^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2(t_1)} dt_1.$$

В неинерциальных системах отсчета данная формула не может быть использована, и при рассмотрении хода движущихся часов надо учитывать ускорения, имеющиеся в системе отсчета. В общем случае неинерциальной системы отсчета формула для расчета времени, прошедшего по движущимся часам, имеет вид

$$t_2 = \frac{1}{c} \int\limits_0^{t_2} \sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}^i + g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\, dx^0.$$

Здесь g_{00}, g_{0i}, g_{ik} — компоненты метрического тензора, характеризующего систему отсчета, x^0 — временная координата, x^i, $\dot{x}^i$ — координаты и компоненты скорости движущихся часов.

Данная формула справедлива и при наличии полей тяготения, т.е. при необходимости применения общей теории относительности. При прямолинейном равноускоренном движении часов в отсутствие полей тяготения ненулевыми являются только диагональные компоненты метрического тензора и приведенное выражение приобретает вид

$$t_2 = \frac{1}{c} \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{00}} dx^0.$$

Если рассматриваемые преобразования связывают физически независимые переменные, то существует возможность обобщения преобразований на произвольный закон изменения относительной скорости ИСО$_{1,2}$.

Действительно, в случае произвольного закона $v_0(t_2)$ возможен переход к интегральной форме преобразований. При этом должно выполняться условие малости изменения v_0 по сравнению со скоростью света $\Delta v_0 \ll c$ на элементарном измеряемом интервале времени.

Пусть в рассматриваемых преобразованиях $\beta_1 = 0$ и в выражения (24)–(25) входят физически независимые переменные. Тогда членам преобразований можно поставить в соответствие следующий физический смысл. Первые два члена в правой части (24) задают координату события в движущейся со скоростью $v_0(t_2)$ ИСО$_2$ в каждый момент времени t_2. Третий член определяет время, которое потратит свет на преодоление расстояния, пройденного ИСО$_2$ от момента синхронизации ИСО$_{1,2}$ до события. Очевидно, что их сумма задает пространственную координату события в ИСО$_1$.

В преобразованиях времени (25) первое слагаемое задает время события, а второе — дополнительное время, которое потребуется свету на прохождение пути, пройденного $ИСО_2$ от момента синхронизации $ИСО_{1,2}$ до события по часам в $ИСО_1$. Очевидно, что их сумма задает временную координату события в $ИСО_1$.

Так как пространственные и временные координаты независимы в случае произвольного закона $v_0(t_2)$ для события, имеющего координаты $\vec{r}_2, t_2$ в $ИСО_2$, получим

$$\vec{r}_1 = \int\limits_0^{\vec{r}_2} \left(D_2^{-1} d\vec{r}_2 - \vec{V}_0 \frac{\alpha_0}{V_0^2} \left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right) \right) - \int\limits_0^{t_2} \vec{V}_0 \gamma_0 dt_2; \tag{27}$$

$$t_1 = \int\limits_0^{t_2} \gamma_0 dt_2 - \int\limits_0^{\vec{r}_2} \gamma_0 \frac{\left(d\vec{r}_2, \vec{V}_0 \right)}{c^2}. \tag{28}$$

Первый интеграл в (27) и второй в (28) не зависят от пути интегрирования, так как подынтегральные выражения не зависят от $\vec{r}_2$, поэтому преобразования можно переписать в виде

$$\vec{r}_1 = D_2^{-1} \vec{r}_2(t_2) - \vec{V}_0 \frac{\alpha_0}{V_0^2} \left(\vec{r}_2(t_2), \vec{V}_0 \right) - \int\limits_0^{t_2} \vec{V}_0 \gamma_0 dt_2; \tag{29}$$

$$t_1 = \int\limits_0^{t_2} \gamma_0 dt_2 + \gamma_0 \frac{\left(\vec{r}_2(t_2), \vec{V}_0 \right)}{c^2}. \tag{30}$$

Здесь обозначение $\vec{r}_2(t_2)$ указывает, что пространственная координата события соответствует моменту времени t_2.

Отметим, что в случае зависимости переменных $\vec{r}_2, t_2$ потребовалось бы использование криволинейного интеграла, как и в случае наличия кривизны пространства-времени, так как в этом случае преобразования не могут быть представлены суммой независимых членов.

Оставшиеся интегралы являются результатом суммирования пройденного $ИСО_2$ расстояния на интервале $(0, t_2)$. Отметим, что момент t_2 соответствует приходу сигнала о событии в точку O_2, а t_1 — соответственно в O_1.

При $v_0 =$ const выражения (29)–(30) переходят в (24)–(25).

Аналогично можно построить интегральную форму общих преобразований из выражений (22) и (23):

$$x_1^\mu = D_2^{-1} \left(\hat{\eta}_\mu, \vec{r}_2(t_2) \right) - \frac{\alpha_0 V_{0\mu}}{V_0^2} \hat{\tau}_\mu \left(\vec{r}_2(t_2), \vec{V}_0 \right) + \int\limits_0^{t_2} \gamma_0 \hat{\beta}_\mu V_{0\mu} dt_2; \tag{31}$$

$$t_1 = \int_0^{t_2} \gamma_0 \lambda_1 dt_2 + \lambda_2 \frac{\gamma_0}{c} \left(\vec{r}_2(t_2), \vec{\beta}_0 \right). \tag{32}$$

В приведенных выражениях все коэффициенты, не входящие под знак интеграла, вычисляются в момент времени t_2.

Можно отметить, что данное утверждение при неравномерном движении вносит погрешность, связанную с тем, что момент регистрации сигнала в точке O_2 не является истинным моментом события. Данный вопрос относится к методу измерения времени, который принят при получении преобразований. Тот же вопрос можно отнести к определению координаты $\vec{r}_2$.

Знание измерительной процедуры позволяет рассчитать поправку к результату применения преобразований.

В заключение следует обратить внимание на то, что частично интегральная форма преобразований использовалась неоднократно. Например, формула для расчета времени равноускоренных часов, которая впервые была получена А. Эйнштейном, используется в [23]. Данный расчет является классическим примером использования группы Лоренца для случая неинерциального движения. Физическая интерпретация соотношений мгновенных значений интервалов времени в различных ИСО содержится в работах [24, 25].

Отметим, что в общем случае процедура синхронизации детекторов, движущихся в различных ИСО, должна осуществляться с учетом влияния на время распространения световых сигналов движущейся среды. В этом случае интервалы времени распространения световых сигналов в ФП должны рассчитываться на основе решения дисперсионных уравнений оптики движущихся сред, причем диэлектрические свойства среды и закон движения среды более удобно записывать в одной из ИСО ФП.

В перспективе разработанный подход может быть положен в основу модели синхронной регистрации сигналов в системе спутник–Земля в реальном масштабе времени с учетом влияния трехмерного поля скоростей движения атмосферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ashby N., Spilker J. J. (Jr.) Introduction to relativistic effects on the Global Positioning System // Global Positioning System: Theory and Applications. Washington, 1997. – P. 623–697.
2. О влиянии движения оптической среды при локации / В.П. Васильев, В.А. Гришмановский, Л.Ф. Плиев, Т.П. Старцев // Письма в ЖЭТФ. – 1992. – Т. 55, вып. 6. – С. 317–320.

3. Э к с п е р и м е н т а л ь н а я проверка влияния эффекта Физо на направление отраженного светового луча при спутниковой лазерной дальнометрии / В.П. Васильев, Л.И. Гусев, Дж. Дж. Денган, В.Д. Шаргородский // Радиотехника. – 1966. – № 4. – С. 80–84.
4. Ф о м и ч е в А. А., Д м и т р и е в В. Г., К о л ч е в А.Б. Комплексная инерциально-спутниковая навигационная система на базе лазерных гироскопов для самолетов гражданской авиации // Вестник SPIE/RUS. – 1995. – № (5). – С. 28–31.
5. К л и о н е р С. А. Релятивистский аспект синхронизации наземных часов // Препринт АН СССР. Ин-т прикладной астрономии. – 1990. – № 25. – 52 с.
6. R e n s h a w C. The direct verification of length contraction and time dilation in modern satellite systems and cosmological studies // Proceedings PIRT-VI. – London, 1998. – P. 285–298.
7. R u y o n g W. From the triangle Sagnac experiment to a practical, crucial experiment of the constancy of the speed of light using atomic clocks on moving objects // Europhys. Lett. – 1998. – V. 43, No. 6. – P. 611–616.
8. M i z u s h i m a. Anisotropy of space // J. Phys. Soc. Jap. – 1992. – V. 61, No. 4. – P. 1125–1126.
9. E p s t e i n S. T., Nuovo Cimento, 1960. – V. 16. – P. 587.
10. B o g o s l o v s k y G. Y u. Nuovo Cimento, 1983. B 77. – P. 181.
11. C h a m p e n e y D. C., I s a a k G. R. and K h a n A. M. Phys. Lett., 1963. – V. 7. – P. 241.
12. I s a a k G. R. Phys. Bull., 1970. – V. 21. – P. 255.
13. M a c M i l l a n D. S. Quasar apparent proper motion observed by geodetic VLBI Networks. NVI, Inc., arXiv: astro-ph/0309826.
14. M c C l u r e M. L., D y e r C. C. Anisotropy in the Hubble constant as observed in the HST Extragalactic Distance Scale Key Project results., arXiv: astro-ph/0703516.
15. С т р у к о в И. А. и др. // Письма в Астрон. Журн. – 1992. – Т. 18. – С. 387.
16. S m o o t G. F. et.al. // Astrophys. J. – 1992. – V. 396, L1.
17. H i n s h a w G., N o l t a M. R., B e n n e t t C. L., B e a n R., D o r é O., G r e a s o n M. R., H a l p e r n M., et al. Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Temperature analysis // The Astrophysical Journal Supplement Series, Volume 170, Issue 2, p. 288–334.
18. G l a d y s h e v V. O. Special effects of relativity theory // Proceedings of British Society for the Philosophy of Science “Physical Interpretation of Relativity Theory”. – London, 1998. – P. 99–108.
19. G l a d y s h e v V. O. A possible explanation for the delay in detecting an astrophysical signal by using ground-based detectors // Journal of the Moscow Physical Society. – 1999. – V. 9, No. 1. – P. 23–29.
20. Г л а д ы ш е в В. О. Машина времени в пространстве с дипольной анизотропией // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2007. – Т. 4. – № 2 (8). – С. 167–176.
21. G l a d y s h e v V. O. Time machine in space with dipole anisotropy // Proceedings British Soc. Phil. Science “Phys. Interpr. Relativity Theory”. Imperial College. London. – Liverpool: PD Publications, 2008.
22. Т о н н е л а М. -А. Основы электромагнетизма и теории относительности. – М.: Изд-во ин. лит., 1962. – 483 с.
23. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
24. Э й н ш т е й н А. О принципе относительности и его следствиях. Собр. научн. трудов. – М.: Наука, 1965. Т. 1. – С. 65–114. (Einstein A. Uber das Relativitatsprinzip und die aus demselben gazogenen Folgerungen. Jahrb. Radioaktivitat Elektronik, 1907, V. 4. – P. 411–462.)

25. П а у л и В. Теория относительности. – М.: ОГИЗ. – 300 с. (Pauli W. Relativitatstheorie. Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften, 1921. Band V2 Heft IV Art. 19).

Статья поступила в редакцию 26.10.2010

Владимир Олегович Гладышев окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1989 г. Д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, генеральный директор НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике. Сопредседатель Международного оргкомитета конференции “Физические интерпретации теории относительности”. Автор 118 научных работ и двух монографий в области электродинамики движущихся сред и теории относительности.

V.O. Gladyshev graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1989. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University, general director of the Research Institute of Hyper Complex Systems in Geometry and Physics. Co-chairman of International organizing committee of conference “Physical interpretations of theory of relativity”. Author of 118 publications and 2 monographs in the field of electrodynamics of moving media and theory of relativity.

Тиунов Павел Сергеевич — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Получил степень бакалавра по направлению “Техническая физика” в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г. Сотрудник лаборатории математического моделирования НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике. Автор семи научных работ в области математического моделирования и обработки экспериментальных данных.

P.S. Tiunov — student of the Bauman Moscow State Technical University. Received the degree of Bachelor in the area of Technical Physics in 2008. Worker of laboratory for mathematical simulation of the Research Institute of Hyper Complex Systems in Geometry and Physics. Author of 7 publications in the field of mathematical simulation and processing of experimental data.