УДК 536.2:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ. Ч. 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Г.Н. Кувыркин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
e-mail: fn2@bmstu.ru

На основе соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов с внутренними параметрами состояния предложена математическая модель сплошной среды с учетом эффектов нелокальности и вращательных степеней свободы элементов структуры.

Ключевые слова: нелокальная среда, внутренние параметры состояния, законы термодинамики, необратимый процесс, энтропия, свободная энергия.

MATHEMATICAL MODEL OF NON-LOCAL THERMAL VISCOELASTIC MEDIUM. PART 1. DETERMINING EQUATIONS

G.N. Kuvyrkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow
e-mail: fn2@bmstu.ru

Based on relationships of rational thermodynamics of irreversible processes with internal state parameters, the mathematical model of continuum is proposed taking into account the effects of nonlocality and rotational degrees of freedom of structure elements.

Keywords: nonlocal continuum, internal state parameters, laws of thermodynamics, irreversible process, entropy, free energy.

Современные конструкционные и функциональные материалы, представляющие собой совокупность микро- и наноструктурных элементов, часто называют структурно-чувствительными материалами. К таким материалам в чистом виде неприменима методология континуума. Тем не менее бывает допустимым распространение методов и математических моделей классической механики сплошной среды на нано- и микроуровень. Такой прием распространения взглядов классической механики сплошной среды на среду с микро- и наноструктурой называют методом непрерывной аппроксимации [1]. Область науки, в которой поведение материалов с микро- и наноструктурой изучают с использованием метода непрерывной аппроксимации, иногда называют обобщенной механикой сплошной среды [1]. В методе непрерывной аппроксимации используют такие понятия, как полярность (микрополярность) и нелокальность.

Важный этап в создании и использовании рассматриваемого класса материалов — построение математических моделей, позволяющих описать поведение этих материалов в широком диапазоне изменения внешних воздействий. Однако общая методология построения таких моделей еще далека от завершения.

В статье предложена термомеханическая модель материалов с малоразмерной структурой, учитывающая временны́е эффекты при аккумуляции и распространении теплоты и деформировании, а также эффекты пространственной нелокальности.

Для получения определяющих уравнений воспользуемся соотношениями, полученными в [2] для микрополярной среды с внутренними параметрами состояния. Достаточно полный обзор по микрополярной теории упругости приведен в работах [3, 4], авторы которых, однако, или не упоминают о влиянии температуры на напряженно-деформированное состояние, или учитывают это влияние в классической постановке [5]. В настоящей работе дано обобщение и распространение полученных ранее результатов по построению математических моделей сплошной среды с внутренними параметрами состояния на микрополярную нелокальную среду с внутренним трением.

Определяющие уравнения нелокальной среды с внутренними параметрами состояния можно получить в рамках теории малой деформации, используя закон сохранения энергии [5–7]:

$$\rho\dot{u} = \sigma_{jk}\,\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} - e_{jkm}\sigma_{km}\dot{\varphi}_j + m_{jk}\frac{\partial\dot{\varphi}_k}{\partial x_j} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + q_V\,, \quad i,j,k,m = 1,2,3, \tag{1}$$

где ρ — плотность материала; u — массовая плотность внутренней энергии; $\dot{(\ )} = \dfrac{\partial(\ )}{\partial t}$, t — время; $\sigma_{jk} \neq \sigma_{kj}$ — компоненты тензора напряжений; u_k — проекции вектора перемещения на оси $O\mathrm{x}_k$ прямоугольной системы координат; x_j — декартовы координаты; e_{jkm} — символы Леви-Чивиты; φ_j — проекции вектора микроповорота; m_{jk} — компоненты тензора моментных напряжений; q_k — проекции вектора плотности теплового потока; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников (стоков) теплоты. После использования преобразования Лежандра [7]

$$u = A + Th\,,$$

где A, h — массовые плотности свободной энергии Гельмгольца и энтропии, T — абсолютная температура, уравнение (1) принимает вид

$$\rho T\dot{h} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + q_V + \delta_D, \tag{2}$$

где $\delta_D = \sigma_{jk}\dfrac{\partial\dot{u}_k}{\partial x_j} - e_{jkm}\sigma_{km}\dot{\varphi}_j + m_{jk}\dfrac{\partial\dot{\varphi}_k}{\partial x_j} - \rho(\dot{A} + \dot{T}h)$ — диссипативная функция.

Комбинируя (2) с неравенством Клаузиуса–Дюгема [7]

$$\rho T\dot{h} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \frac{q_k}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k} - q_V \geqslant 0 \qquad (3)$$

и принимая в качестве реактивных переменных тензор микродеформации с компонентами

$$e_{kl} = \varepsilon_{kl} + e_{klm}\left(\omega_m - \varphi_m\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + e_{lkm}\varphi_m, \quad k, l, m = 1, 2, 3,$$

где $\varepsilon_{kl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ — компоненты симметричного тензора малой деформации, градиент вектора микроповорота с компонентами $\zeta_{kl} = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}$, абсолютную температуру T и ее градиент с проекциями $\vartheta_k = \dfrac{\partial T}{\partial x_k}$, а также внутренние параметры термодинамического состояния: скалярный κ, векторный с проекциями κ_k и два тензорных с компонентами $\kappa_{kl}^{(1)}$ и $\kappa_{kl}^{(2)}$, получаем

$$\sigma_{jk} = \rho\,\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\,, \; m_{jk} = \rho\,\frac{\partial A}{\partial \zeta_{kj}}\,, \; h = -\frac{\partial A}{\partial T}\,, \; \frac{\partial A}{\partial\left(\partial T/\partial x_k\right)} = 0 \qquad (4)$$

и вместо (3) —

$$-\frac{q_k}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \delta_D \geqslant 0, \;\; \delta_D = -\rho\left(\frac{\partial A}{\partial \kappa}\dot{\kappa} + \frac{\partial A}{\partial \kappa_k}\dot{\kappa}_k + \frac{\partial A}{\partial \kappa_{jk}^{(1)}}\dot{\kappa}_{jk}^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \kappa_{jk}^{(2)}}\dot{\kappa}_{jk}^{(2)}\right).$$

Так как в дальнейшем рассматриваем геометрически линейную среду, то $|e_{ij}| \ll 1$, $|\zeta_{ij}|^{-1} \ll L$, где L — характерный размер рассматриваемого тела. Положим также, что κ — термодинамическая температура, ассоциированная с локально неравновесными процессами аккумуляции теплоты; κ_k — проекции вектора, характеризующего распространение теплоты и ассоциированного с решеточным (фононным) или другим преобладающим физическим процессом теплопроводности, $|\kappa_k| \ll 1$; $\kappa_{jk}^{(1)}$ и $\kappa_{jk}^{(2)}$ — компоненты тензоров, определяющих на микроуровне эффекты вязкости, $|\kappa_{jk}^{(1)}| \ll 1$ и $|\kappa_{jk}^{(2)}| \ll 1$.

Зададим объемную плотность свободной энергии в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности нулевых значений аргументов e_{ij}, ζ_{ij}, $\kappa_{ij}^{(1)}$ и $\kappa_{ij}^{(2)}$ при температуре $T = T_0$ естественного состояния, а также примем $\partial A/\partial \kappa_i = 0$. Тогда для окрестности точки с радиусом–вектором $\boldsymbol{x}$, принадлежащей области V, занимаемой элементом микро- или наноструктуры, получаем

$$
\begin{aligned}
&\rho A(e_{kl},\zeta_{kl},\kappa_{kl}^{(1)},\kappa_{kl}^{(2)},T,\kappa)=\rho A_0+\\
&\qquad+\int\limits_V\Big(\tilde{B}_{ji}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')e_{ij}(\boldsymbol{x}')+\tilde{D}_{ji}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\zeta_{ij}(\boldsymbol{x}')\Big)dV(\boldsymbol{x}')+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V\Big(\tilde{C}_{jikl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')e_{kl}(\boldsymbol{x}')e_{ij}(\boldsymbol{x}'')+\\
&+\tilde{G}_{jikl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')\zeta_{ij}(\boldsymbol{x}'')+\tilde{R}_{jikl}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\kappa_{kl}^{(1)}(\boldsymbol{x}')\kappa_{ij}^{(1)}(\boldsymbol{x}'')+\\
&+\tilde{R}_{jikl}^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\kappa_{kl}^{(2)}(\boldsymbol{x}')\kappa_{ij}^{(2)}(\boldsymbol{x}'')+2\tilde{F}_{jikl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')e_{ij}(\boldsymbol{x}'')+\\
&+2\tilde{F}_{jikl}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\,\kappa_{kl}^{(1)}(\boldsymbol{x}')\,e_{ij}(\boldsymbol{x}'')+2\tilde{F}_{jikl}^{(1)}\kappa_{kl}^{(2)}(\boldsymbol{x}')\zeta_{ij}(\boldsymbol{x}'')+\\
&+2\tilde{R}_{jikl}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\kappa_{kl}^{(1)}(\boldsymbol{x}')\kappa_{ij}^{(2)}(\boldsymbol{x}'')-2\tilde{C}_{jikl}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}')e_{ij}(\boldsymbol{x}'')-\\
&-2\tilde{H}_{jikl}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')e_{kl}^{(\kappa)}(\boldsymbol{x}')\,e_{ij}(\boldsymbol{x}'')\Big)dV(\boldsymbol{x}'')+\rho\,(T-T_0)\,B_0(\kappa), \quad (5)
\end{aligned}
$$

где $e_{kl}^{(T)}$, $e_{kl}^{(\kappa)}$ — компоненты тензора температурной микродеформации и тензора, зависящего только от термодинамической температуры, $|e_{kl}^{(T)}|\ll 1$ и $|e_{kl}^{(\kappa)}|\ll 1$; в естественном состоянии $A_0=0$, $B_0=0$. Положим также, что

$$
\begin{gathered}
\tilde{B}_{ji}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=B_{ji}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|),\quad \tilde{D}_{ji}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=D_{ji}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|),\\
\tilde{C}_{jikl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')=C_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|),\ldots,\\
\tilde{H}_{jikl}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')=H_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|),
\end{gathered}
$$

где $\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)$, $\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|$ — функции влияния, определяющие эффект пространственной “памяти”, и

$$
\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')=\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}'')=1,
$$

а также $\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\neq 0$ только при $(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\in V(\boldsymbol{x}')$ и $\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|)\neq 0$ только при $(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|)\in V(\boldsymbol{x}'')$.

Тогда в силу первого и второго равенств из (4) имеем

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ji}=B_{ji}+\int\limits_V C_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\big(e_{kl}(\boldsymbol{x}')-e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}')\big)dV(\boldsymbol{x}')+\\
+\int\limits_V F_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')+\int\limits_V E_{jikl}^{(1)}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\kappa_{kl}^{(1)}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')-\\
-\int\limits_V H_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)e_{kl}^{(\kappa)}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}'), \quad (6)
\end{aligned}
$$

$$m_{ji} = D_{ji} + \int\limits_V G_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}') +$$
$$+ \int\limits_V F_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)e_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}') + \int\limits_V E^{(2)}_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\kappa^{(2)}_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}').$$

Так как массовую плотность энтропии определяет третье равенство из (4), то, используя (5), получаем

$$h = \frac{1}{\rho}\int\limits_V C_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}|)\frac{\partial e^{(T)}_{kl}(\boldsymbol{x})}{\partial T}e_{ij}(\boldsymbol{x}'')dV(\boldsymbol{x}'') - B_0(\kappa). \qquad (7)$$

Соотношения (6) являются достаточно общими, поэтому необходимо установить ограничения на коэффициенты B_{ji}, C_{jikl}, F_{jikl}, $E^{(1)}_{jikl}$, D_{ji}, G_{jikl} и $E^{(2)}_{jikl}$. Объемная плотность свободной энергии инвариантна к выбору направлений осей принятой системы координат, поэтому при изменении направления любой из осей координат на противоположное компоненты ζ_{kl} градиента вектора микроповорота в силу равенства $\zeta_{kl} = \partial\varphi_k/\partial x_l$ изменяют знак на противоположный. Поэтому изменяется и величина ρA. Следовательно, $D_{ji} = 0$, $F_{jikl} = 0$. Кроме того, в силу очевидных равенств для дважды непрерывно дифференцируемой функции A

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 A}{\partial e_{kl}\partial e_{ij}}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_{ij}\partial \zeta_{kl}} = \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_{kl}\partial \zeta_{ij}},$$
$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial \kappa^{(1)}_{kl}} = \frac{\partial^2 A}{\partial \kappa^{(1)}_{ij}\partial e_{kl}}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_{ij}\partial \kappa^{(2)}_{kl}} = \frac{\partial^2 A}{\partial \kappa^{(2)}_{ij}\partial \zeta_{kl}}$$

имеем

$$C_{jikl} = C_{klji}, \quad G_{jikl} = G_{klji}, \quad E^{(1)}_{jikl} = E^{(1)}_{klji}, \quad E^{(2)}_{jikl} = E^{(2)}_{klji},$$

и число компонент C_{jikl}, G_{jikl}, $E^{(1)}_{jikl}$ и $E^{(2)}_{jikl}$ составляет 45; компонент B_{ji}, задающих начальные напряжения в недеформированном теле — девять. Таким образом,

$$\sigma_{ji} = B_{ji} + \int\limits_V C_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\big(e_{kl}(\boldsymbol{x}') - e^{(T)}_{kl}(\boldsymbol{x}')\big)dV(\boldsymbol{x}') +$$
$$+ \int\limits_V E^{(1)}_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\kappa^{(1)}_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}') - \int\limits_V H_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)e^{(\kappa)}_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}'),$$
$$(8)$$
$$m_{ji} = \int\limits_V G_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}') + \int\limits_V E^{(2)}_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\kappa^{(2)}_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}').$$

Предположим, что вязкие свойства микрополярной среды проявляются только при ненулевых значениях градиента вектора микроповорота с компонентами ζ_{mn} и разности компонент тензоров линейного поворота $\omega_{mn} = e_{mnp}\omega_p$ $(p = 1, 2, 3)$ и линейного микроперемещения $\varphi_{mn} = e_{mnp}\varphi_p$ $(\omega_{mn} - \varphi_{mn} \neq 0)$. Кроме того, $\kappa_{kl}^{(1)}$ зависят только от разности $(\omega_{mn} - \varphi_{mn})$, а $\kappa_{kl}^{(2)}$ только от ζ_{kl}. Таким образом, вязкие свойства среды, определяемые этими параметрами, проявляются только при макро- и микроповоротах и наличии градиента вектора микроповорота. Для определения $\kappa_{kl}^{(1)}$ и $\kappa_{kl}^{(2)}$ зададим кинетические уравнения в виде

$$
\begin{gathered}
t_\sigma^* \dot{\kappa}_{kl}^{(1)} + \kappa_{kl}^{(1)} = \\
= \int_V K_{klmn}^{(1)} \varphi\left(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|\right)\bigl(\omega_{mn}(\boldsymbol{x}', t) - \varphi_{mn}(\boldsymbol{x}', t)\bigr) dV(\boldsymbol{x}'), \\
t_m^* \dot{\kappa}_{kl}^{(2)} + \kappa_{kl}^{(2)} = \int_V K_{klmn}^{(2)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\zeta_{mn}(\boldsymbol{x}', t) dV(\boldsymbol{x}'),
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где t_σ^*, t_m^* — времена релаксации параметров состояния.

Решения уравнений (9) при соответствующих начальных условиях $(t = 0,\ \omega_{mn} = \varphi_{mn} = 0,\ \zeta_{mn} = 0)$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
\kappa_{kl}^{(1)}(\boldsymbol{x}', t) = \int_V K_{klmn}^{(1)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\Biggl(\omega_{mn}(\boldsymbol{x}', t) - \varphi_{mn}(\boldsymbol{x}', t) - \\
- \int_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_\sigma^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'}\bigl(\omega_{mn}(\boldsymbol{x}', t') - \varphi_{mn}(\boldsymbol{x}', t')\bigr) dt'\Biggr) dV(\boldsymbol{x}'), \\
\kappa_{kl}^{(2)}(\boldsymbol{x}', t) = \int_V K_{klmn}^{(2)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\Biggl(\zeta_{mn}(\boldsymbol{x}', t) - \\
- \int_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_m^*}\right) \frac{\partial \zeta(\boldsymbol{x}', t')}{\partial t'} dt'\Biggr) dV(\boldsymbol{x}').
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Подставив (9) в первое и второе равенства (8) соответственно, получим

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ji} = B_{ji} + \int_V C_{jikl} \varphi(\,|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\,|)\left(e_{kl}(\boldsymbol{x}') - e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}')\right) dV\,(\boldsymbol{x}') + \\
+ \int_V dV(\boldsymbol{x}') \int_V M_{jikl}^{(1)} \varphi(\,|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}|)\Biggl(\omega_{kl}(\boldsymbol{x}'', t) - \varphi_{kl}(\boldsymbol{x}'', t) -
\end{gathered}
$$

$$-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_\sigma^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\Big(\omega_{kl}(\boldsymbol{x}'',t')-\varphi_{kl}(\boldsymbol{x}'',t')\Big)dt'\Bigg)dV(\boldsymbol{x}'')- \qquad (11)$$

$$-\int\limits_V H_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)e_{kl}^{(\kappa)}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}'),$$

$$m_{ji}=\int\limits_V G_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')+\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V M_{jikl}^{(2)}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\times$$

$$\times\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|)\left(\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}'',t)-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_m^*}\right)\frac{\partial\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}'',t')}{\partial t'}\,dt'\right)dV(\boldsymbol{x}''),$$

где $M_{jikl}^{(1)}=E_{jimn}^{(1)}K_{mnkl}^{(1)},\ \ M_{jikl}^{(2)}=H_{jimn}^{(2)}K_{mnkl}^{(2)}$.

Соотношения (11) определяют математическую модель стандартной линейной нелокальной микрополярной среды с учетом температурной микродеформации $\left(e_{kl}^{(T)}\right)$ и деформации, обусловленной неравновесностью процесса аккумуляции теплоты $\left(e_{kl}^{(\kappa)}\right)$.

Положив в (11) $\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)$ и $\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}|)$ равными δ-функции Дирака с соответствующим аргументом, получим

$$\sigma_{ji}=B_{ji}+C_{jikl}(e_{kl}-e_{kl}^{(T)})+M_{jikl}^{(1)}\Bigg(\omega_{kl}-\varphi_{kl}-$$

$$-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_\sigma^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}(\omega_{kl}-\varphi_{kl})\,dt'\Bigg)-H_{jikl}e_{kl}^{(\kappa)},$$

$$m_{ji}=G_{jikl}\zeta_{kl}+M_{jikl}^{(2)}\left(\zeta_{kl}-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_m^*}\right)\frac{\partial\zeta_{kl}}{\partial t'}dt'\right). \qquad (12)$$

Такой же результат можно получить, если принять e_{kl}, $e_{kl}^{(T)}$, $e_{kl}^{(\kappa)}$, ω_{kl}, φ_{kl} и ζ_{kl} функциями $\boldsymbol{x}$ и t.

Если в материале определяющим является только один, фононный, процесс теплопроводности, то кинетические уравнения, описывающие изменение κ_i и термодинамической температуры κ во времени в линейном приближении, можно принять в виде [8, 9]

$$t_q^*\dot{\kappa}_i+A_{ij}\kappa_j=\bar{\kappa}_i\,,\ \ t_T^*\dot{\kappa}+A_{44}\kappa=\bar{\kappa}, \qquad (13)$$

где t_q^*, t_T^* — времена релаксации соответствующих параметров состояния; $\bar{\kappa}_i$, $\bar{\kappa}$ — функции, определяющие равновесные значения параметров состояния; $A_{ij} = A_{ji}$, $\det(A_{ij}) > 0$. Термодинамическую температуру определяет спектр частот и амплитуд колебаний атомов на свободной поверхности микро- и наноструктурных элементов.

Полученные выражения для массовой плотности энтропии (7) и компонент тензоров напряжений и моментных напряжений (11) дают возможность описать процессы переноса энергии, количества движения и его момента с учетом особенностей структуры исследуемого тела.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в микромеханику / Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К. и др. / Пер. с япон. – М.: Металлургия, 1987. – 280 с.
2. Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Математическая модель микрополярной среды с внутренними параметрами состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2011. – Спец. выпуск "Прикладная математика". – С. 51–62.
3. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. – Ереван: Гитутюн, 2010. – 136 с.
4. Кривцов А. М. Деформирование и разрушение твердых тел микроструктурой. – М.: Физматлит, 2007. – 304 с.
5. Эринген А. К. Теория микрополярной упругости / В кн. Разрушение. Т. 2. – М.: Мир, 1975. – С. 646–751.
6. Eringen A. C. Nonlocal continuum field theories. – New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – 393 pp.
7. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.
8. Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Математическая модель теплопроводности новых конструкционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. – № 3. – С. 72–85.
9. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Нелокальная математическая модель теплопроводности в твердых телах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2011. – № 3. – С. 20–30.

Статья поступила в редакцию 15.05.2012

Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой "Прикладная математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

G.N. Kuvyrkin — D. Sc. (Eng.), professor, head of "Applied Mathematics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.