

## СПЕКТР ФУРЬЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В АВТОНОМНЫХ АВТОСТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С МНОГОСЕГМЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрены свойства частотного спектра хаотических колебаний в автономных автостохастических системах с многосегментной нелинейностью. Выделена составляющая колебаний, определяющая их зависимость от числа сегментов нелинейности. Показано, что частотная функция спектра Фурье этой составляющей соответствует зависимости  $1/f$  и может быть аппроксимирована спектром многоступенчатой случайной импульсной функции.

E-mail: vadipro@yandex.ru

**Ключевые слова:** автономные системы, хаотические колебания, нелинейность, спектр Фурье, импульсная функция.

Возможность перестройки параметров хаотического сигнала путем изменения числа сегментов многосегментной нелинейной функции [1] делает необходимым изучение зависимости характеристик этих сигналов от числа сегментов.

Одной из таких характеристик является спектр Фурье. Рассмотрим его зависимость от числа сегментов в случае регулярной многосегментной нелинейности [2] (рис. 1):

$$S(\xi) = b\xi + (a-b) \left\{ \sum_{m=0}^M [P(\xi + mc) - 1] + \sum_{n=0}^N [P(\xi - nc) + 1] - P(\xi) \right\}, \quad (1)$$

где  $P(\xi) = \frac{|\xi + 1| - |\xi - 1|}{2}$ , т.е. такой нелинейной функции, в со-

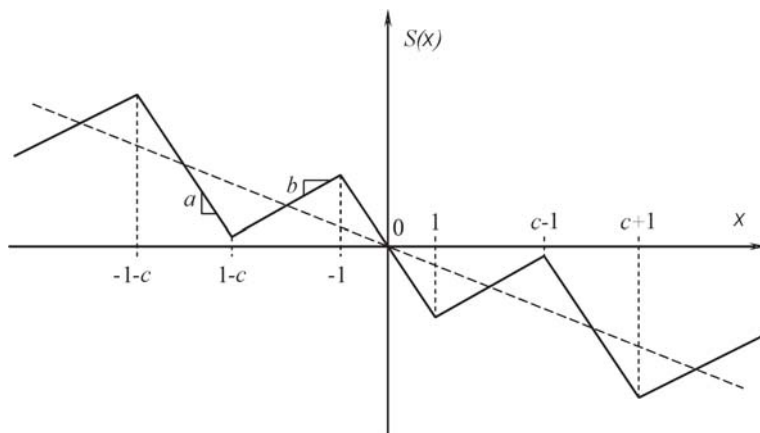


Рис. 1. Регулярная многосегментная нелинейная функция

став которой входит только два типа сегментов, расположенных через одинаковые интервалы.

На рис.2 показано изменение спектра хаотических колебаний трех автономных автостохастических систем, описываемых системами уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = A[y - x - S(x)]; \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z; \\ \frac{dz}{d\tau} = -By, \end{cases} \quad c = 2\frac{b-a}{b+1}; \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -AS(y-x); \\ \frac{dy}{d\tau} = -S(y-x) - z; \\ \frac{dz}{d\tau} = By, \end{cases} \quad c = 2\left(1 + \frac{1}{b}\right); \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y; \\ \frac{dy}{d\tau} = -AS(y-z) - x; \\ \frac{dz}{d\tau} = B[S(y-z) + z], \end{cases} \quad c = 2\frac{b-a}{b-1}; \quad (4)$$

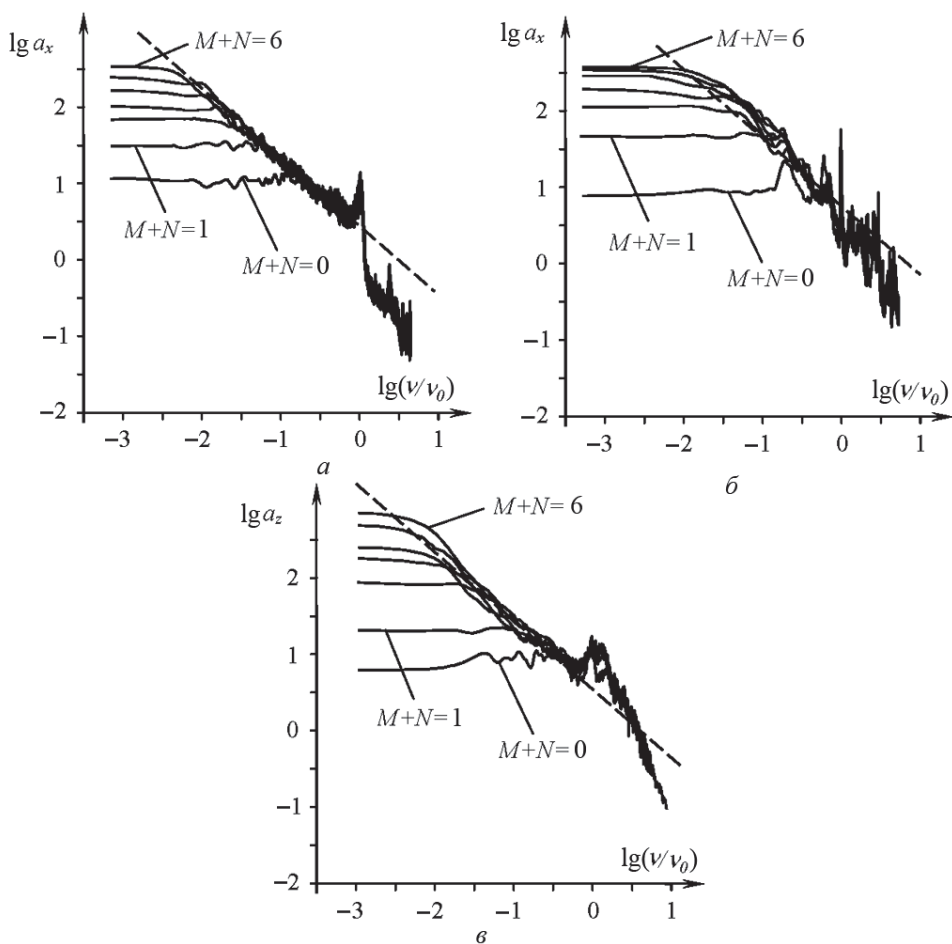
в зависимости от числа сегментов нелинейной функции (1).

Эти уравнения описывают динамику электронных генераторов непериодических колебаний, существенно различающихся по механизму возникновения и основным параметрам хаотических колебаний [3–5].

Тем не менее, как видно на рис. 2, спектры колебаний всех указанных систем имеют характерную общую отличительную особенность, которая демонстрирует одинаковую зависимость от числа сегментов.

Так, приведенные на рис. 2 спектры содержат интенсивную избыточную  $1/f$ -составляющую, которая локализована в пределах ограниченного интервала частот. В сторону верхних частот данный интервал простирается приблизительно до резонансной линии, соответствующей наименьшей собственной частоте колебательной системы генератора; в сторону нижних частот — до горизонтального участка спектра.

При увеличении числа сегментов происходит расширение частотного интервала, на котором наблюдается избыточная  $1/f$ -составляющая спектра. При этом его верхняя граница остается неизменной, а нижняя



**Рис. 2. Видоизменение частотных спектров хаотических колебаний в зависимости от числа сегментов при изменении  $M + N$  от 0 до 6:**

$a$  – спектр Фурье переменной  $x$  в системе (2) при  $A = 10, B = 15, a = -1,18, b = -0,735$ ;  $б$  – спектр Фурье переменной  $x$  в системе (3) при  $A = 10, B = 10, a = 1, b = -0,667$ ;  $в$  – спектр Фурье переменной  $z$  в системе (4) при  $A = 7, B = 12, a = 0,7, b = 1,2$ ;  $a_\xi$  – спектральная плотность функции  $\xi, \nu_0$  – основная частота колебательной системы генератора

смещается вниз за счет уменьшения протяженности горизонтального участка спектра, причем профиль избыточной  $1/f$ -составляющей спектра сохраняется.

Чтобы объяснить такое поведение спектра при изменении числа сегментов, проанализируем структуру хаотических колебаний рассматриваемых генераторов.

На рис. 2 приведены спектры только той из трех независимых переменных каждой системы, которая показывает наиболее сильную зависимость от числа сегментов. Остальные переменные в общем случае могут демонстрировать менее выраженную зависимость от числа сегментов или ее отсутствие. Это хорошо видно на рис. 3, где приве-

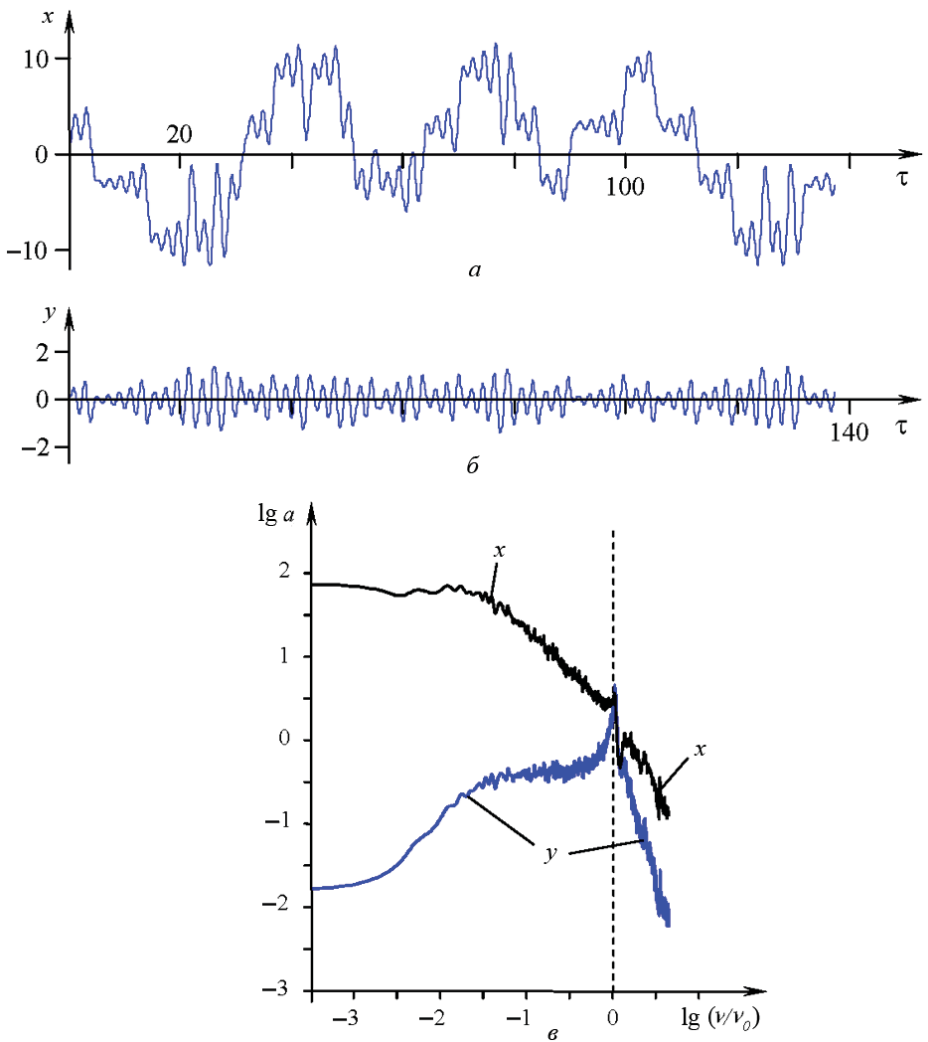


Рис. 3. Сравнение временных зависимостей ( $a$ ,  $b$ ) и спектров ( $c$ ) колебаний переменных  $x$  и  $y$  в уравнениях (2) при  $M = N = 1$

дены примеры временных реализаций переменных  $x$  и  $y$  в системе уравнений (2), а также совмещенные спектры этих переменных при  $M = N = 1$ . Видно, что временная зависимость переменной  $y$  не показывает никакой выраженной зависимости от числа сегментов в составе нелинейной функции  $S(x)$ , а ее спектр не содержит избыточной  $1/f$ -составляющей. Хаотический характер колебаний этой переменной “выдает” только наличие горизонтального участка спектра в интервале частот, соответствующем избыточной  $1/f$ -составляющей в спектре переменной  $x$ . Причем интенсивность спектра переменной  $y$  в этом интервале частот намного меньше интенсивности спектра переменной  $x$ . В системе (3) аналогичными свойствами обладают переменные  $y$  и  $z$ , в системе (4) — переменная  $y$ .

Из того факта, что различные переменные демонстрируют разную степень зависимости от числа сегментов нелинейности, следует, что колебания рассматриваемых автономных автостохастических систем содержат некоторую компоненту, отвечающую за их зависимость от числа сегментов нелинейной функции, которая по-разному представлена в составе различных переменных.

Сравнение временных реализаций различных переменных одной и той же системы уравнений позволяет предположить, что данная компонента в первом приближении входит в их состав аддитивно. Например, можно представить, что колебание, показанное на рис. 3, а, является суммой колебания, показанного на рис. 3, б, и некоторого приближения искомой компоненты.

Для того чтобы выделить ее, проанализируем изменение свойств линейной комбинации независимых переменных  $\psi = k_x x + k_y y + k_z z$ , где  $k_x + k_y + k_z = 1$  при вариации их весов  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  в составе комбинации.

Анализ уравнений (2)–(4) показывает, что для каждого из них можно найти три линейные комбинации независимых переменных, а именно  $\psi_0 = k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z$ ,  $\psi_1 = k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}z$  и  $\psi_2 = k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}z$ , одной из которых (допустим,  $\psi_0$ ) соответствует вырождение колебаний в некоторую многоуровневую случайную импульсную функцию со свойствами в максимальной степени зависящими от числа сегментов. А две другие комбинации ( $\psi_1$  и  $\psi_2$ ), наоборот, представляют собой случайные функции, характеристики которых обнаруживают минимальную корреляцию с числом сегментов.

Это объясняется особенностями строения хаотических аттракторов автостохастических систем рассматриваемого типа, а также тем, что функции  $\psi_0$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , обладающие названными свойствами, образуют новую систему координат (в общем случае неортогональную), в которой хаотический аттрактор имеет специальную пространственную ориентацию.

Хаотические аттракторы автостохастических систем рассматриваемого типа, имеющие нелинейность (1), состоят из нескольких взаимосвязанных бассейнов притяжения фазовых траекторий, внутри которых движение происходит вблизи некоторых двумерных поверхностей, которые в масштабе аттрактора мало отличаются от параллельных плоскостей [6]. При этом особые точки, отвечающие данным бассейнам, располагаются вдоль прямой линии  $W$ , являющейся осью симметрии мультиаттрактора [2].

Новая система координат строится так (рис. 4), чтобы ось  $\psi_0$  была ортогональна плоскостям, вблизи которых происходит движение внутри отдельных бассейнов притяжения фазовых траекторий, а одна из

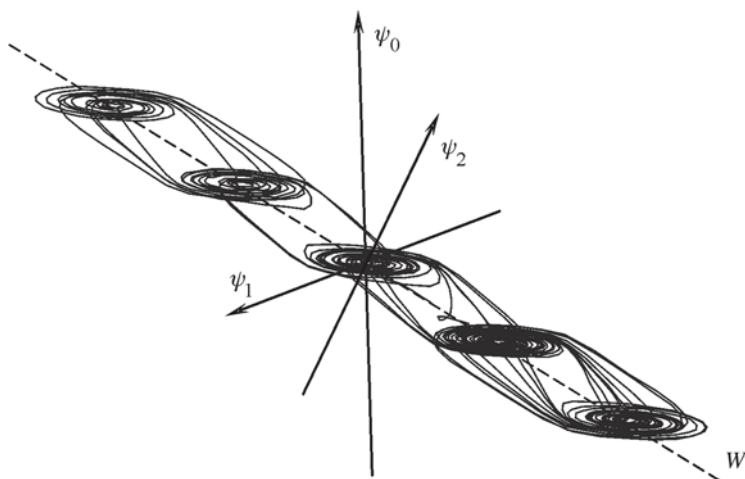


Рис. 4. Построение системы координат  $(\psi_0, \psi_1, \psi_2)$

осей  $\psi_1$  или  $\psi_2$  (допустим,  $\psi_1$ ) была им параллельна и одновременно ортогональна оси симметрии аттрактора  $W$ . Координатная ось  $\psi_2$  выбирается ортогонально осям  $\psi_1$  и  $W$ . Таким образом, ось  $\psi_1$  ортогональна плоскости  $(\psi_0, W)$ , в которой лежат оси  $\psi_0$  и  $\psi_2$ .

В новой координатной системе переходы между бассейнами притяжения фазовых траекторий происходят преимущественно по оси  $\psi_0$  (рис. 5, а, в), а движение внутри бассейнов преимущественно по осям  $\psi_1$  и  $\psi_2$  (рис. 5, б, г, д). Это и обуславливает качественное различие между функцией  $\psi_0$  и функциями  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

Наиболее наглядно отмеченное различие выявляется при рассмотрении амплитудного распределения плотности значений функций  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  (рис. 6). Если взять значения функции через некоторые малые одинаковые интервалы времени и построить зависимость их числа от значения функции (гистограмму), становится ясно, что значения функции  $\psi_0$  концентрируются вблизи нескольких дискретных уровней, каждый из которых отвечает одному из бассейнов притяжения фазовых траекторий (количество которых задается числом сегментов в составе нелинейной функции). Аналогичная, хотя и менее выраженная, концентрация значений наблюдается у переменных, в состав которых входит  $\psi_0$ , например у переменных  $x$  и  $z$  в системе (2), переменной  $x$  в системе (3) и переменной  $z$  в системе (4), но она полностью отсутствует у функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

Полагая функцию  $\psi_0$  приближением искомой компоненты, представим каждую независимую переменную как линейную комбинацию функций  $\psi_0, \psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{0x} & k_{1x} & k_{2x} \\ k_{0y} & k_{1y} & k_{2y} \\ k_{0z} & k_{1z} & k_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

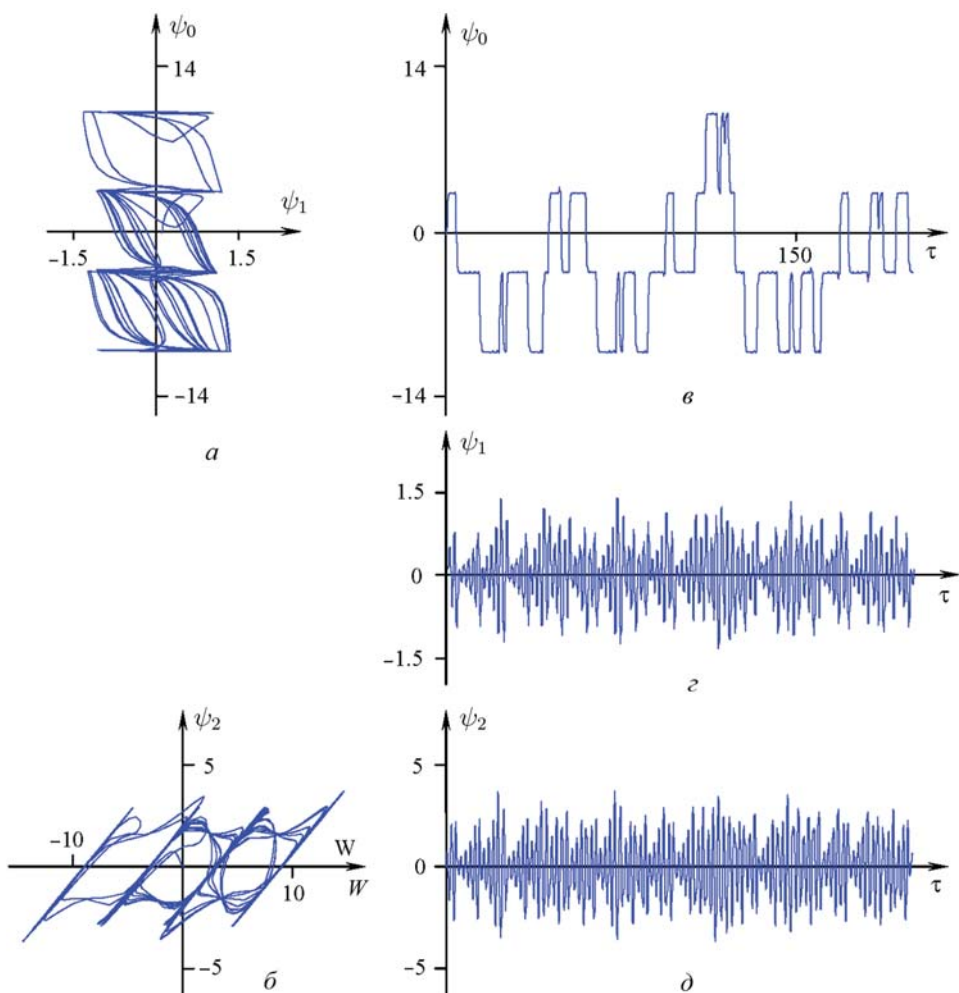
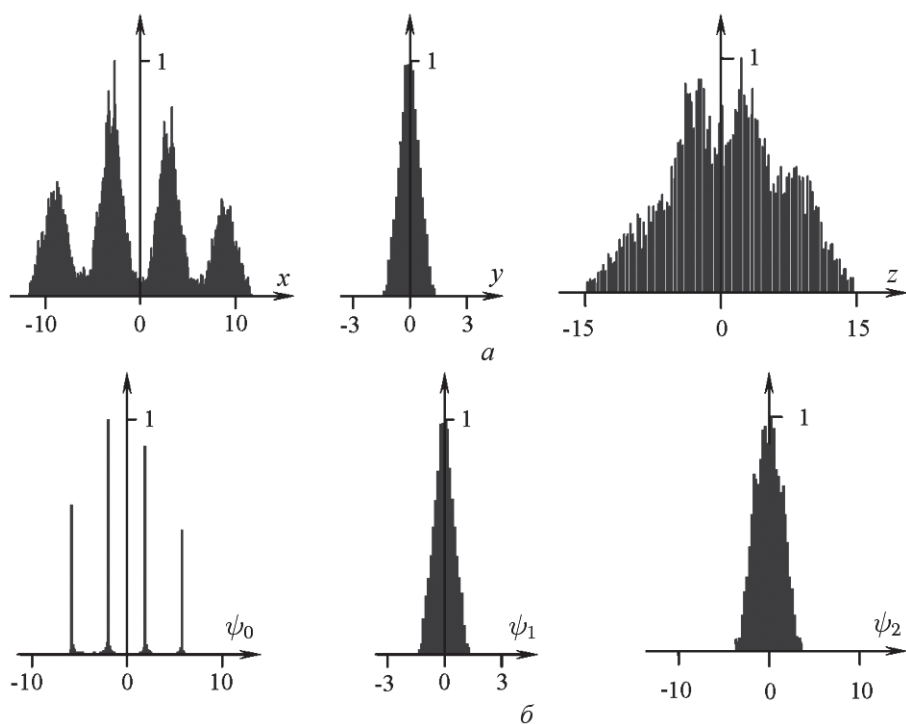


Рис. 5. Примеры проекций хаотического аттрактора системы (2) при  $M = N = 1$  на плоскость  $(\psi_0, \psi_1)$  (а) и плоскость  $(\psi_2, W)$  (б) и примеры временных зависимостей функций  $\psi_0$  (в),  $\psi_1$  (г),  $\psi_2$  (д)

Иными словами, в общем случае независимые переменные автостохастических систем рассматриваемого типа представляют собой некоторые линейные комбинации функций  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . И наоборот, каждая из функций  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  представляет собой линейную комбинацию независимых переменных:

$$\begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x0} & k_{y0} & k_{z0} \\ k_{x1} & k_{y1} & k_{z1} \\ k_{x2} & k_{y2} & k_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Коэффициенты матрицы  $K$  и обратной ей матрицы  $K^{-1}$  определяются параметрами уравнений (2–4), т.е. особенностями конкретной динамической системы и режимом колебаний.



**Рис. 6.** Амплитудное распределение плотности значений независимых переменных (а) и функций  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  (б) в системе (2). Обозначения и параметры системы – см. рис. 2

С помощью преобразования (6) уравнения (2)–(4) могут быть записаны относительно новых переменных  $\psi_0, \psi_1$  и  $\psi_2$ , что позволяет свести изучение спектральных свойств колебаний в подобных системах к исследованию спектров функций  $\psi_0, \psi_1$  и  $\psi_2$ .

В этом случае одна из переменных ( $\psi_0$ ) будет в максимальной степени отражать общую (интегральную) структуру движения, включая влияние числа сегментов в составе нелинейной функции, а остальные ( $\psi_1$  и  $\psi_2$ ) – его локальные особенности.

Это обусловлено тем, что первая описывает случайные переходы фазовых траекторий между бассейнами притяжения положений равновесия, а остальные – движение внутри этих бассейнов в окрестности положений равновесия. Вследствие этого в составе функции  $\psi_0$  подчеркнута “медленная”, или импульсная, составляющая колебаний и минимизирована быстроосциллирующая, или “быстрая”, составляющая (см. рис. 5, в), а в составе функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , наоборот, “медленная” составляющая (см. рис. 5, г, д).

В результате отчетливую зависимость от числа сегментов показывает только спектр функции  $\psi_0$ , в то время как спектры функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  практически не изменяются при вариации числа сегментов нелинейной функции.



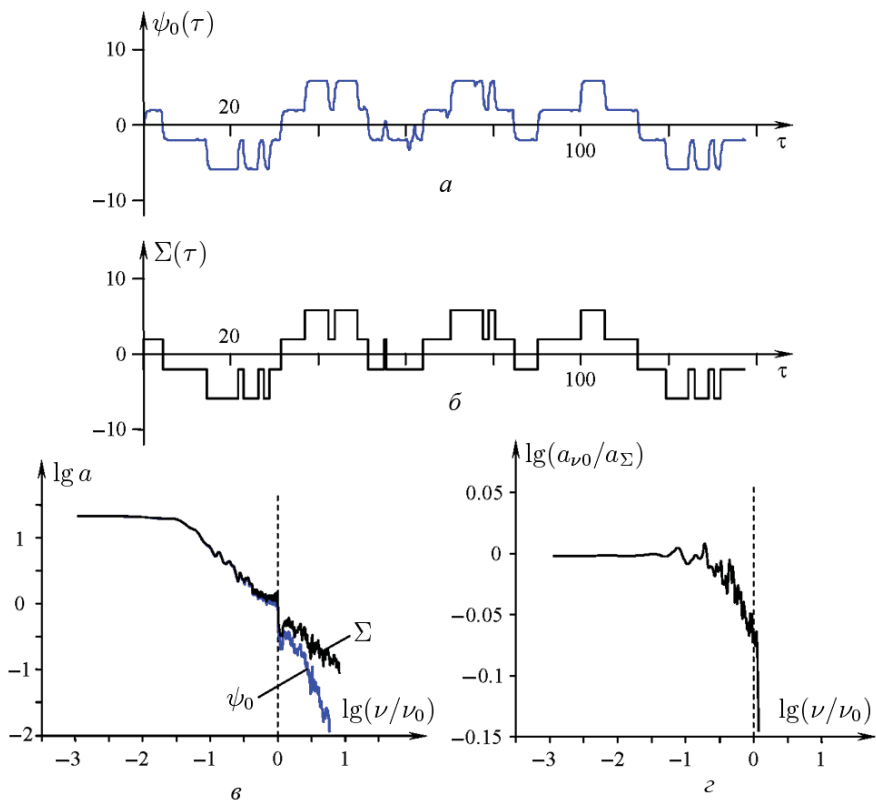


Рис. 7. Пример временных зависимостей функций  $\psi_0(\tau)$  (а) и  $\Sigma(\tau)$  (б), их спектры (в) в динамической системе (2) (при  $M = N = 1$ ,  $k_{0x} = 1$ ,  $k_{0y} = -1,5$ ,  $k_{0z} = 0,35$ ) и отношение спектральной плотности функции  $\psi_0(\tau)$  к спектральной плотности функции  $\Sigma(\tau)$  (г). Обозначения и параметры системы – см. рис. 2

Это означает, что при изменении числа сегментов характер движения в окрестностях положений равновесия в целом сохраняется, а изменения связаны с увеличением или уменьшением числа бассейнов притяжения положений равновесия и соответственно вариантов переходов между ними.

Таким образом, за изменение спектра в зависимости от числа сегментов отвечает присутствующая в составе колебаний рассматриваемых генераторов составляющая  $\psi_0$ .

Эта составляющая весьма близка к идеализированной случайной многоступенчатой импульсной функции  $\Sigma(\tau)$  (рис. 7, б) [7, 8]. Функцию  $\Sigma(\tau)$ , соответствующую данной функции  $\psi_0(\tau)$ , можно получить используя следующее выражение:

$$\Sigma(\tau) = \sum_{m=0}^M \left[ H(\psi_0(\tau) + md) - \frac{d}{2} \right] + \sum_{n=0}^N \left[ H(\psi_0(\tau) - nd) + \frac{d}{2} \right] - H(\psi_0(\tau)), \quad (7)$$

где  $H(\xi) = \begin{cases} \frac{d}{2} & \text{при } \xi > 0; \\ -\frac{d}{2} & \text{при } \xi \leq 0, \end{cases}$  а коэффициент  $d$  равен интервалу

между соседними уровнями концентрации значений функции  $\psi_0$  (т.е. он задает высоту ступеней функции  $\Sigma(\tau)$ ).

Особенностью функции  $\Sigma(\tau)$  является то, что ее спектр достаточно хорошо моделирует спектр функции  $\psi_0(\tau)$  на участке избыточной  $1/f$ -компоненты и на более низких частотах, где спектры этих функций практически идентичны (рис. 7, в, з).

Поэтому при исследовании зависимости спектра от числа сегментов нелинейной функции его моделью может служить данный участок спектра Фурье идеализированной случайной многоступенчатой импульсной функции  $\Sigma(\tau)$ , т.е. искомая зависимость спектра от числа сегментов определяется в основном свойствами этой функции.

Так как функция  $\Sigma(\tau)$  инвариантна конкретному построению генераторов, зависимость спектра колебаний от числа сегментов является одинаковой для любых автономных автостохастических систем рассматриваемого типа независимо от особенностей их физической реализации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прокопенко В. Г. Динамический аналог схемы Чуа с многосегментной нелинейностью // Докл. акад. наук. – 2004. – Т. 396. – № 3. – С. 317–323.
2. Прокопенко В. Г. Генераторы хаотических колебаний на основе полупроводниковых источников отрицательного сопротивления с многосегментной вольтамперной характеристикой. // Микроэлектроника. – 2004. – Т. 33. – № 6. – С. 468–478.
3. Прокопенко В. Г. Генератор хаотических колебаний. Пат. РФ 2174283. Оpubл. 2001, БИПМ № 27.
4. Прокопенко В. Г. Генератор хаотических колебаний. Пат. РФ 2168844. Оpubл. 2001, БИПМ № 16.
5. Прокопенко В. Г. Генератор хаотических колебаний. Пат. РФ 2168846. Оpubл. 2001, БИПМ № 16.
6. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.
7. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1968. – 464 с.
8. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 236 с.

Статья поступила в редакцию 30.09.2008



Вадим Георгиевич Прокопенко — ведущий конструктор НКБ “Миус” Таганрогского государственного радиотехнического университета, канд. техн. наук. Автор более 90 научных работ в области радиотехники, микроэлектроники и нелинейной динамики.

V.G. Prokopenko — Ph. D. (Eng.), leading designer of the design bureau “Mius” of the Taganrog State Radio Engineering University. Author of more than 90 publications in the field of radio engineering, micro-electronics and non-linear dynamics.