

И. К. Марчевский, В. С. Морева

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ СИСТЕМЫ ПРОФИЛЕЙ МЕТОДОМ ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

*Предложен подход, позволяющий повысить точность моделирования течений вязкой несжимаемой среды методом вихревых элементов. Эффективность применения описанного метода показана на примере задачи об обтекании одиночного кругового профиля. Рассмотрена задача об обтекании пары круговых профилей при их различном взаимном расположении. Приведены характерные структуры вихревых следов, образующихся за профилями, и вычислены значения стационарных аэродинамических коэффициентов, удовлетворительно согласующиеся с результатами экспериментов и результатами расчетов других авторов.*

**E-mail: [iliamarchevsky@mail.ru](mailto:iliamarchevsky@mail.ru); [morevavs@rambler.ru](mailto:morevavs@rambler.ru)**

**Ключевые слова:** метод вихревых элементов, аэродинамические коэффициенты, круговой профиль, система профилей.

Метод вихревых элементов — один из эффективных численных методов моделирования двумерных течений. Он позволяет при сравнительно низких затратах вычислительных ресурсов рассчитывать нагрузки, действующие на профиль со стороны потока несжимаемой среды. Однако в ряде случаев достигаемой точности оказывается недостаточно, в частности при моделировании обтекания профилей при невысоких значениях числа Рейнольдса, а также при моделировании обтекания системы профилей. Отметим, что во втором случае решающее значение имеет точность моделирования вихревого следа за первым (наветренным) профилем, поскольку именно воздействие следа на подветренный профиль во многом определяет действующие на него аэродинамические нагрузки.

Из ряда практически важных задач в качестве модельной можно выделить задачу о моделировании обтекания пары круговых профилей, произвольно ориентированных по отношению к набегающему потоку: поперек потока, тандемом, под углом выноса. Исследованию таких конфигураций посвящено большое число экспериментальных и расчетных работ [1–4].

В настоящей работе предлагается подход, позволяющий повысить точность моделирования течений методом вихревых элементов и качественно верно решить задачу о моделировании обтекания круговых профилей.

Численный метод вихревых элементов и его модификации, в частности метод вязких вихревых доменов (ВВД), описаны в монографии [5]. Этот метод относится к классу бессеточных лагранжевых

методов, в котором распределение завихренности в области течения моделируется большим числом изолированных вихревых элементов. Движение вихревых элементов, моделирующее эволюцию вихревого следа, описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, точность решения которой во многом определяет правильность расчета в целом. В большинстве работ по методу вихревых элементов для решения этой системы используется явный метод Эйлера первого порядка точности; в то же время в работах [6, 7] указывается на возможность применения методов более высокого порядка. Однако эти идеи широкого распространения не получили. Авторы работы [6] в начале 1970-х годов располагали весьма скромными вычислительными ресурсами, а основной объект исследования в монографии [7] — спутные следы за самолетом, для моделирования которых точности метода Эйлера достаточно. В настоящей работе представлена общая схема расчета обтекания профиля и отмечены особенности использования метода Рунге–Кутты второго порядка точности.

Рассмотрим внешнее обтекание системы неподвижных профилей потоком вязкой несжимаемой среды. Течение описывается уравнениями неразрывности и Навье–Стокса; на бесконечном удалении от профилей задается условие затухания возмущений, на границе профилей — условие прилипания.

При расчете методом вихревых элементов на каждом шаге по времени выполнение граничного условия на бесконечности и уравнения неразрывности происходит автоматически, граничное условие прилипания обеспечивается генерацией новых вихревых элементов на границах профилей, а течение вязкой жидкости моделируется движением имеющихся вихревых элементов.

Для двумерных течений вязкой несжимаемой среды справедлив аналог теоремы Томсона [5]: завихренность внутри замкнутого контура будет сохраняться, если каждая точка этого контура движется со скоростью  $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ , где  $\mathbf{V}$  — скорость жидкости,  $\mathbf{W}$  — диффузионная скорость, пропорциональная коэффициенту кинематической вязкости. Отсюда следует, что вихревые элементы, моделирующие завихренность, движутся со скоростью  $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ . Тогда движение вихревых элементов описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt} = \mathbf{V}(t, \mathbf{r}_i) + \mathbf{W}(t, \mathbf{r}_i). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, задающий положение  $i$ -го вихревого элемента;  $\mathbf{V}(t, \mathbf{r}_i)$  — скорость среды в точке его расположения в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{W}(t, \mathbf{r}_i)$  — диффузионная скорость вихревого элемента.

При использовании метода Рунге–Кутты второго порядка точности для решения системы (1) новые положения вихревых элементов в момент времени  $t_{k+1}$  определяются по формуле

$$\mathbf{r}_i(t_{k+1}) = \mathbf{r}_i(t_k) + (\mathbf{V}^*(t_{k+1/2}, \mathbf{r}_i^*) + \mathbf{W}^*(t_{k+1/2}, \mathbf{r}_i^*))\Delta t, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i(t_k) + (\mathbf{V}(t_k, \mathbf{r}_i) + \mathbf{W}(t_k, \mathbf{r}_i))\frac{\Delta t}{2}; \quad (3)$$

$\mathbf{V}^*$  и  $\mathbf{W}^*$  — поле скоростей среды и поле диффузионных скоростей, вычисляемые в момент времени  $t = t_{k+1/2}$ .

Особенностью расчета является необходимость обеспечения в промежуточный момент времени выполнения граничного условия, т.е. поле скоростей  $\mathbf{V}^*(t_{k+1/2}, \mathbf{r})$  должно удовлетворять условию прилипания.

Поле скоростей  $\mathbf{V}$  определяется положениями вихревых элементов и их интенсивностями по закону Био–Савара, поэтому, даже если поле скоростей  $\mathbf{V}(t_k, \mathbf{r})$  в момент времени  $t_k$  удовлетворяет граничному условию, после смещения пелены “на полшага” по формуле (3) потребуется его коррекция. Ее можно осуществить, если учесть влияние завихренности, генерируемой на профиле за эту половину шага. Для этого необходимо определить интенсивность непрерывного вихревого слоя на профиле, обеспечивающего выполнение условия прилипания. В расчете этот вихревой слой моделируется системой вихревых элементов. Скорректированное поле скоростей  $\mathbf{V}^*$  определяется по формуле

$$\mathbf{V}^*(t_{k+1/2}, \mathbf{r}) = \mathbf{V}(t_{k+1/2}, \mathbf{r}) + \mathbf{U}(t_{k+1/2}, \mathbf{r}).$$

Здесь  $\mathbf{V}(t_{k+1/2}, \mathbf{r})$  — скорость, генерируемая вихревыми элементами, уже существовавшими к началу шага и смещенными по формуле (3),  $\mathbf{U}(t_{k+1/2}, \mathbf{r})$  — поправка от вновь генерируемых за половину шага вихрей, их влияние рассчитывается по закону Био–Савара. После коррекции поля скоростей эти вихревые элементы далее в расчете не используются и удаляются из расчетной схемы. Следует отметить, что в упомянутых работах [6, 7] такая коррекция поля скоростей не проводилась.

В ходе расчета происходит реструктуризация вихревых следов, образующихся за профилями [8]. При этом вихревые элементы, сблизившиеся на достаточно малое расстояние, объединяются в один элемент. Это позволяет существенно уменьшить число вихревых элементов, моделирующих след, а значит, и размерность системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1).

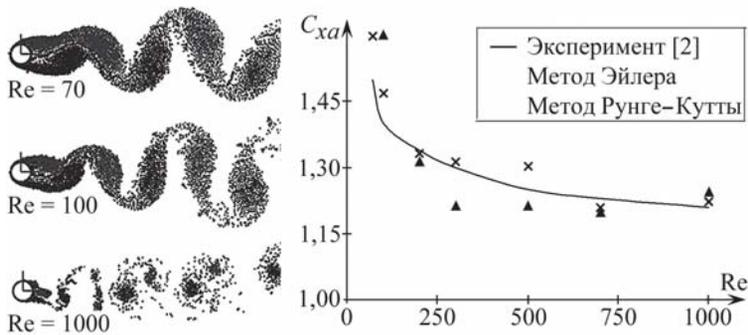


Рис. 1. Результаты моделирования обтекания кругового профиля

Аналог интеграла Коши–Лагранжа [5] позволяет вычислить давление в любой точке вихревого течения вязкой среды. Нагрузки, действующие на профили, находят по распределению давления и вязким напряжениям на поверхности.

В тестовом расчете моделировалось обтекание одиночного кругового профиля при различных значениях числа Рейнольдса. На рис. 1 приведены характерные структуры течения и вычисленные значения коэффициента лобового сопротивления. Здесь и далее все параметры расчетных схем считаются безразмерными.

В расчете использованы следующие параметры: диаметр профиля  $D = 1$ ; скорость набегающего потока  $V_\infty = 1,0$ ; число панелей на профиле  $N_p = 200$ ; шаг расчета по времени  $\Delta t = 0,03$ ; радиус вихревого элемента  $\varepsilon = 0,008$ . На рис. 1 показаны вихревые следы, полученные в расчетах с применением метода Рунге–Кутты второго порядка точности, а также зависимость безразмерного стационарного коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса, полученная при использовании методов первого и второго порядка точности.

Сопоставление с экспериментальными данными [2] показывает, что использование метода Рунге–Кутты второго порядка точности позволяет получать более точные результаты по сравнению с методом Эйлера. Вычисленные значения стационарного коэффициента лобового сопротивления  $C_{xa}$  хорошо согласуются с экспериментальными данными, поэтому в дальнейших расчетах используется метод второго порядка точности.

Рассмотрим задачу об обтекании пары круговых профилей (рис. 2). Вихревые следы, образующиеся за этими профилями, могут взаимодействовать друг с другом, изменяя общую картину течения и нагрузки, действующие на профили.

В ходе расчета определялись значения стационарных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы для значений числа Рейнольдса, вычисленных по диаметру профиля,  $Re = 100$  и

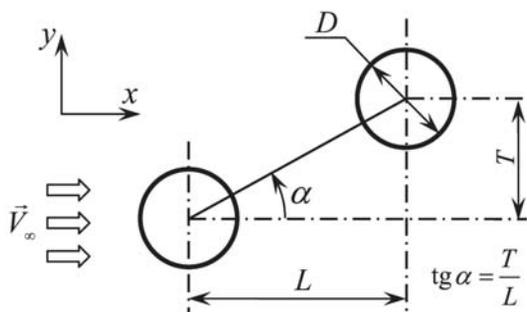


Рис. 2. Расчетная схема задачи

$Re = 5,3 \cdot 10^4$ . Известные результаты экспериментов и расчетов других авторов [3, 4] использованы для оценки точности вычисленных значений. Параметры расчета выбирали так же, как и в предыдущем случае.

*Профили, расположенные поперек потока при  $Re = 100$ .* На начальной стадии характер течения аналогичен случаю обтекания одиночного профиля, затем наблюдается интерференция вихревых следов. На рис. 3 показаны характерные вихревые следы за профилями для случая  $L/D = 0$ ,  $T/D = 4$  в различные моменты времени.

На рис. 4 представлены результаты расчетов стационарных коэффициентов аэродинамических сил, действующих на верхний профиль, в сравнении с результатом, полученным сеточным методом в работе [3].

*Профили, расположенные тандемом и под углом выноса при  $Re = 5,3 \cdot 10^4$ .* При расположении цилиндров тандемом (друг за другом, при  $T/D = 0$ ) в силу взаимного влияния профилей между ними образуется застойная область. При установлении режима обтекания за подветренным профилем образуется вихревой след, напоминающий вихревую дорожку Кармана (рис. 5).

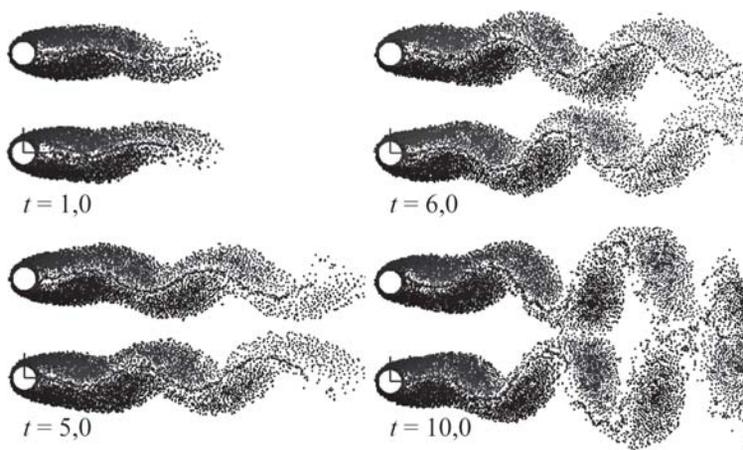


Рис. 3. Обтекание системы профилей при  $L/D = 0$ ,  $T/D = 4$

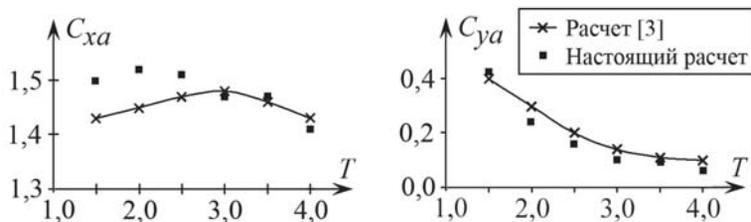


Рис. 4. Зависимость стационарных аэродинамических коэффициентов от конфигурации системы профилей при  $Re = 100$ ,  $L/D = 0$

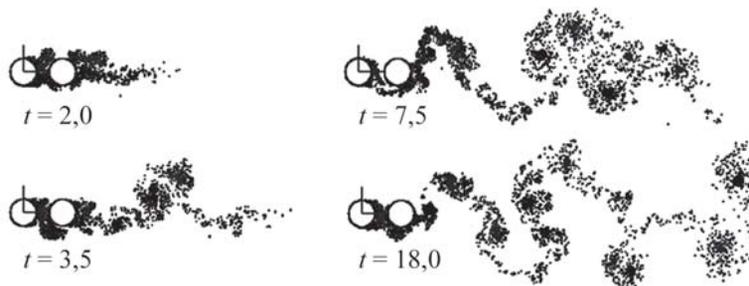


Рис. 5. Обтекание системы профилей при  $L/D = 1,5$ ;  $T/D = 0$

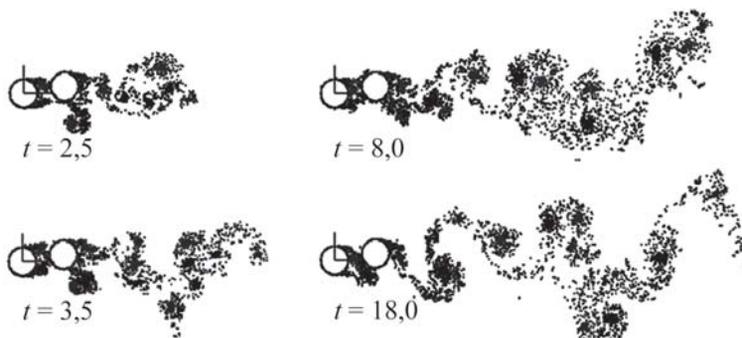


Рис. 6. Обтекание системы профилей при  $L/D = 1,5$ ;  $T/D = 0,25$

При близком расположении профилей под малым углом выноса ( $L/D = 1,5$ ;  $T/D = 0,25$ , что соответствует  $\alpha \approx 10^\circ$ ) наблюдается эффект “вытеснения” следа наветренного профиля подветренным (рис. 6). При этом вихревые следы от профилей перемешиваются и образуют общий вихревой след.

При расположении цилиндров на большем расстоянии друг от друга и большем угле выноса ( $L/D = 1,5$ ;  $T/D = 2,0$ , что соответствует  $\alpha \approx 53^\circ$ ) вихревые следы взаимодействуют в меньшей степени, и за системой профилей можно различить вихревые следы каждого профиля (рис. 7).

Сила лобового сопротивления, действующая на наветренный профиль, при малых углах выноса несколько меньше, чем для случая

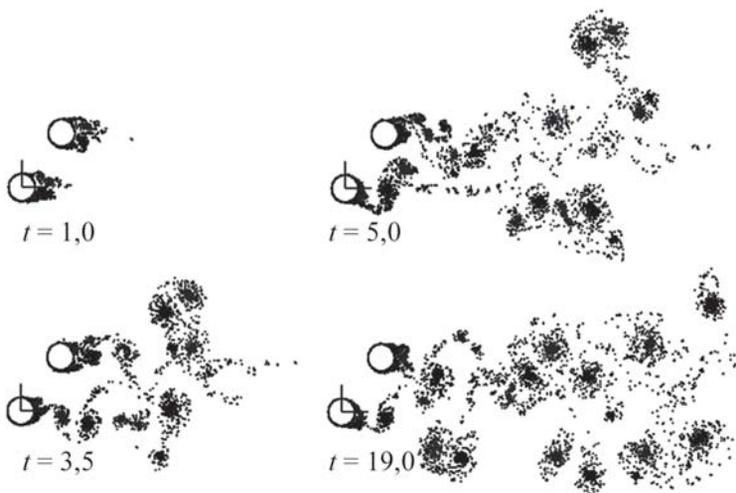


Рис. 7. Обтекание системы профилей при  $L/D = 1,5$ ;  $T/D = 2$

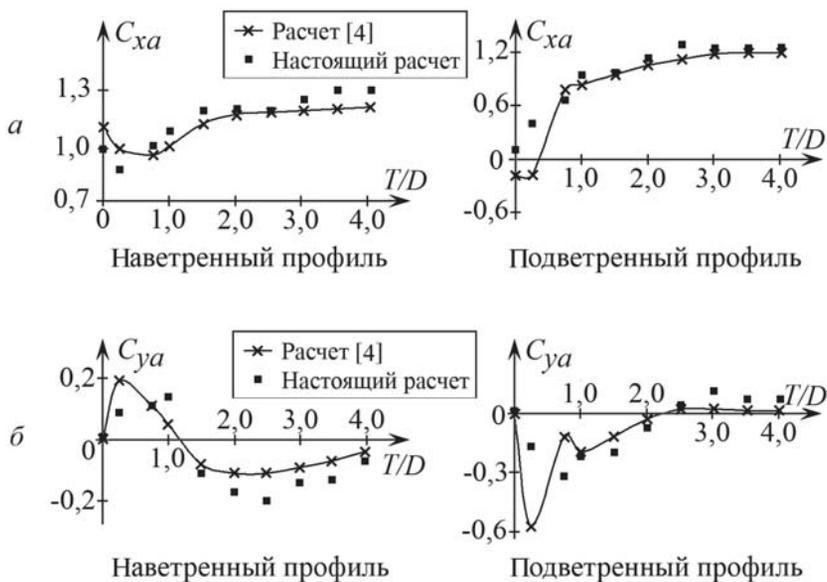


Рис. 8. Зависимости стационарного коэффициента лобового сопротивления (*a*) и подъемной силы (*б*) от конфигурации системы профилей при  $Re = 5,3 \cdot 10^4$ ,  $L/D = 1,5$

одиночного профиля. С увеличением угла выноса и при удалении профилей друг от друга влияние подветренного профиля ослабевает. При этом существует такое положение профилей, соответствующее режиму “вытеснения” подветренным профилем следа наветренного, когда сила лобового сопротивления наветренного минимальна (рис. 8, *a*).

При расположении профилей тандемом или на большом удалении друг от друга (при выбранных параметрах расчета  $T/D > 5$ ) коэффициент подъемной силы каждого профиля стремится к нулевому значению, что соответствует случаю одиночного профиля. При небольших

углах выноса подъемная сила, действующая на оба профиля, “расталкивает” их; с ростом угла выноса знак подъемной силы меняется (рис. 8, б).

Следует отметить, что при  $T/D > 1$  получено хорошее согласование полученных значений стационарных аэродинамических коэффициентов с результатами экспериментов, в то время как при  $T/D \leq 1$  наблюдается бóльшая погрешность. Это, по-видимому, можно объяснить увеличением взаимного влияния профилей друг на друга и необходимостью проведения еще более точных расчетов.

**Выводы.** Предложен подход, позволяющий повысить точность моделирования течений вязкой несжимаемой среды методом вихревых элементов, что продемонстрировано на примере обтекания одиночного кругового профиля. Вычисленные стационарные коэффициенты лобового сопротивления при различных значениях числа Рейнольдса хорошо согласуются с известными результатами натурального эксперимента.

Использование численного метода второго порядка точности позволило провести расчеты обтекания системы профилей и получить значения аэродинамических коэффициентов, которые не удастся получить при использовании метода первого порядка точности.

*Авторы благодарят Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН за предоставленную возможность использования кластера МВС-100К.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д р а в к о в и ч М. М. Обзор исследований интерференции между двумя круглыми цилиндрами при различном их взаимном расположении // Труды Америк. общества инж.-механиков, сер. “Д”. – 1977. – Т. 99, № 4. – С. 119–137.
2. Z a h m A. F. Flow and drag formulas for simple quadrics // NASA Tech. Rept. No. 253. – 1927. – 23 p.
3. L e e K., Y a n g K. -S., Y o o n D. -H. Flow-induced forces on two circular cylinders in proximity // Computers and Fluids. – 2009. – V. 38. – P. 111–120.
4. P r i c e S. J., P a i d o u s s i s M. P. The aerodynamic forces acting on groups of two and three circular cylinders when subject to a cross-flow // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 1984. – V. 17. – P. 329–347.
5. А н д р о н о в П. Р., Г у в е р н ю к С. В., Д ы н н и к о в а Г. Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. – М.: Изд-во МГУ, 2006. – 184 с.
6. П е т р о в А. С. Расчет отрывного обтекания эллиптических цилиндров // Труды ЦАГИ. – 1978. – Вып. 1930. – 12 с.
7. Н е л и н е й н а я теория крыла и ее приложения / Т.О. Аубакиров, С.М. Белоцерковский, А.И. Желанников и др. — Алматы: Гылым, 1997. – 448 с.
8. C o t t e t G. -H., K o u m o u t s a k o s P. D. Vortex methods: Theory and practice. – Cambridge University Press, 2008. – 328 p.

Статья поступила в редакцию 28.09.2009

Илья Константинович Марчевский родился в 1983 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 30 научных и учебно-методических работ в области исследования движения и устойчивости конструкций в потоке среды, вычислительной гидродинамики, а также элементарной математики.



I.K. Marchevskii (b. 1983) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2005. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of "Applied Mathematics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 30 publications in the field of study of motion and stability of constructions in flow of medium, computational hydrodynamics and elementary mathematics.



Виктория Сергеевна Морева родилась в 1987 г., студентка кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 3 научных работ в области вычислительной гидродинамики.

V.S. Moreva (b. 1987) — student of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of computational hydrodynamics.