

УДК 537.2

## ЗАДАЧА РОБЕНА ДЛЯ ПРОВОДЯЩЕГО ЭЛЛИПСОИДА

**А.М. Макаров, Л.А. Лунёва, К.А. Макаров**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва  
e-mail: anmak2009@rambler.ru

*Предложено аналитическое решение электростатической задачи о распределении поверхностной плотности электрического заряда по поверхности произвольного уединенного эллипсоида, непосредственно использующее свойства силового взаимодействия элементарных электрических зарядов по закону Кулона. Рассмотрены границы применимости предложенного метода.*

**Ключевые слова:** задача Робена, проводящий эллипсоид, потенциал и напряженность электростатического поля, поверхностная плотность электрического заряда, принцип суперпозиции.

## THE ROBIN PROBLEM FOR CONDUCTING ELLIPSOID

**A.M. Makarov, L.A. Lunyova, K.A. Makarov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow  
e-mail: anmak2009@rambler.ru

*The analytical solution to an electrostatic problem on distribution of surface density of electric charge over the surface of an isolated ellipsoid is proposed, which directly uses properties of the force interaction of elementary electric charges according to Coulomb's law. The limits of applicability of the proposed method are considered.*

**Keywords:** the Robin problem, conducting ellipsoid, potential and strength of electrostatic field, surface density of electric charge, superposition principle.

Как известно со времен И. Ньютона, внутри сферического слоя с равномерным распределением массы гравитационное поле не возникает. Аналогичная ситуация имеет место и для электростатического поля внутри сферической поверхности с равномерным распределением электрического заряда — потенциал на поверхности и внутри сферы имеет постоянное значение, а вектор напряженности электростатического поля обращается в нуль. На боковой поверхности и внутри проводящего тела произвольной формы потенциал электростатического поля сохраняет постоянное значение, а напряженность электростатического поля обращается в нуль. В последнем случае возникает задача о распределении электрического заряда по поверхности проводящего уединенного тела и определении скалярного поля потенциала вне его. Эта задача известна как задача Робена [1], для ее решения, как правило, используются методы математической теории потенциала (потенциал двойного слоя, интегральное уравнение Фредгольма второго рода и т.п.) [2–4]. При рассмотрении тел канонической формы к успеху приводит использование специальных систем координат, сокращение размерности задачи, разделение переменных [5, 6].

Распределение электрического заряда по поверхности проводящего уединенного эллипсоида может быть получено аналитически в замкнутой форме, если исходить из физического представления о том, что из произвольной точки внутри эллипсоида элемент площади поверхности эллипсоида виден под тем же телесным углом, под каким виден сходственный элемент площади поверхности (исходный и сходственный элементы площади вырезаются на поверхности эллипсоида одной и той же конической поверхностью с малым углом при вершине, в качестве которой служит произвольная точка внутри эллипсоида, тогда исходный элемент площади, сходственный элемент площади и рассматриваемая точка объема лежат на одной прямой линии). Особенностью предлагаемого построения является то обстоятельство, что электрические заряды на рассматриваемых элементах поверхности создают одинаковые по величине и противоположные по направлению векторы напряженности электростатического поля в произвольной точке указанной прямой линии.

Рассмотрим произвольную достаточно гладкую замкнутую поверхность

$$\Phi(x, y, z) = \text{const.} \quad (1)$$

Пусть точки  $(x_0, y_0, z_0)$  и  $(x, y, z)$  принадлежат рассматриваемой поверхности. Уравнение прямой линии, проходящей через точки  $(x_0, y_0, z_0)$  и  $(x, y, z)$ , имеет вид

$$\vec{\xi} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \zeta = \vec{r}_0 + \zeta \vec{t}, \quad (2)$$

где  $\vec{\zeta}$  — радиус-вектор произвольной точки наблюдения (при выполнении условия  $0 < \zeta < 1$  точка наблюдения находится внутри замкнутой поверхности, описанной соотношением (1));  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_0$  — радиус-векторы рассматриваемых точек этой поверхности;  $\vec{t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$  — единичный вектор направления прямой. Введем обозначения  $R = |\vec{r} - \vec{\xi}|$  и  $R_0 = |\vec{\xi} - \vec{r}_0|$ . В окрестности точки  $(x, y, z)$  поверхности  $\Phi(x, y, z) = \text{const}$  выделим элемент площади  $dS$ , а в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  — элемент площади  $dS_0$ . Потребуем выполнения условия “сходственности”, т.е. равенства телесных углов, под которыми эти элементарные площадки поверхности видны из точки наблюдения (вектор  $\vec{\zeta}$ ):

$$d\Omega = d\Omega_0. \quad (3)$$

Условие (3) запишем в развернутом виде

$$\frac{dS \cdot (\vec{n} \cdot \vec{t})}{R^2} = \frac{dS_0 \cdot |(\vec{n}_0 \cdot \vec{t})|}{R_0^2},$$

где  $\vec{n} = \nabla\Phi / |\nabla\Phi|$  — единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности в окрестности точки  $(x, y, z)$ , а  $\vec{n}_0 = \nabla\Phi / |\nabla\Phi| \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$  — единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . В рассматриваемой физической ситуации на замкнутой проводящей поверхности плотность электрического заряда имеет один знак, точки  $(x, y, z)$  и  $(x_0, y_0, z_0)$  расположены по разные стороны от точки наблюдения, поэтому справедливо соотношение

$$\frac{\sigma dS}{R^2} = \frac{\sigma_0 dS_0}{R_0^2},$$

смысл которого состоит в том, что электрические заряды на выделенном элементарном участке поверхности и сходственном участке поверхности создают равные по величине и противоположные по направлению векторы напряженности электростатического поля, обеспечивая постоянное значение потенциала электростатического поля в рассматриваемом объеме на выделенной прямой линии и, как следствие, в рассматриваемом объеме.

При выполнении условия (3) из приведенных соотношений следует результат

$$\frac{\sigma}{(\vec{n} \cdot \vec{t})} = \frac{\sigma_0}{|(\vec{n}_0 \cdot \vec{t})|}. \quad (4)$$

В соответствии с полученным результатом достаточно для произвольной фиксированной точки поверхности  $(x_0, y_0, z_0)$  задать значение величины  $\sigma_0$  и вычислить значение величины  $\sigma$  для произвольной точки поверхности  $(x, y, z)$ , вычислить значение суммарного электрического заряда  $Q$  на поверхности тела и при необходимости (условие нормировки) переопределить значение величины  $\sigma_0$ . Поскольку вычисление распределения потенциала и напряженности электростатического поля вне проводящего тела с использованием принципа суперпозиции принципиальных трудностей не составляет, задачу Робена можно считать решенной.

Рассмотрим два конкретных примера эффективности предложенного метода.

**Сфера.** Любые две точки на поверхности сферы и ее центр задают положение плоскости, которая пересекает сферу по окружности большого круга. Легко найти, что для рассматриваемого случая выполняется условие  $(\vec{n} \cdot \vec{t}) = |(\vec{n}_0 \cdot \vec{t})|$ , что позволяет сделать заключение о равномерном распределении электрического заряда по поверхности проводящей сферы и при необходимости, используя принцип суперпозиции, вычислить распределение потенциала и напряженности электростатического поля вне проводящей сферы.

**Эллипсоид.** Уравнение поверхности эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5)$$

где  $a, b, c$  — полуоси эллипсоида.

Распределение поверхностной плотности электрического заряда на уединенном проводящем эллипсоиде согласно строгому аналитическому решению имеет вид [5]

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \quad (6)$$

Обоснованием эффективности предлагаемого метода служит полученное выше соотношение

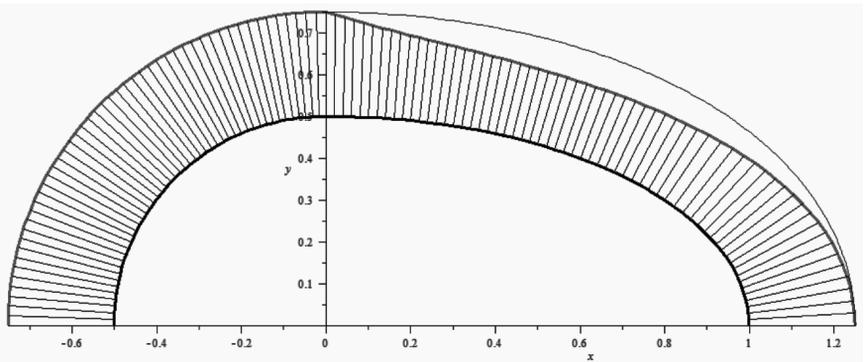
$$\frac{\sigma(x, y, z)}{(\vec{n} \cdot \vec{t})} - \frac{\sigma(x_0, y_0, z_0)}{|(\vec{n}_0 \cdot \vec{t})|} = 0, \quad (7)$$

которое строго выполняется для поверхности (5) и распределения поверхностной плотности электрического заряда (6) для двух произвольных точек поверхности эллипсоида.

Частные случаи рассмотренных поверхностей — эллипсоиды вращения, сжатые и вытянутые эллипсоиды (сфероиды). Метод работоспособен и для плоского случая (окружность, эллипс).

**Пример сложной проводящей поверхности.** Рассмотрим пример более сложной проводящей поверхности, описывающей гладкое сопряжение полусферы и полуэллипсоида (рисунок):

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} = 1, & x < 0; \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1; & x > 0. \end{cases} \quad (8)$$



**Распределение поверхностной плотности электрического заряда (в относительных величинах) по сложной поверхности вращения ( $a = 0,5; b = 1$ )**

Применение рассмотренного метода решения задачи Робена в этом случае более громоздко, но не представляет принципиальных затруднений и доводится до конкретных числовых результатов. Однако настораживает то, что поверхностная плотность электрического заряда  $\sigma$  не зависит от локальной кривизны поверхности в точках  $x = -a$  и  $x = b$ . Для проверки правильности получаемых результатов вычислим продольную компоненту вектора напряженности в начале координат отдельно от полусферы и от полуэллипса. Результаты расчетов приведены в таблице.

$b$	1,0	1,5	2,0	3,0	10,0	100,0	1000
$E_x$	3,1416	2,2475	2,0947	2,1005	2,2920	2,3653	2,3673

Из таблицы следует, что внутри рассматриваемой сложной проводящей поверхности физическое условие — обращение в нуль напряженности электрического поля не выполнено. Интересно выяснить, почему внешне физически правдоподобные положения приводят к некорректным результатам?

Рассмотрим три произвольные точки на замкнутой проводящей поверхности  $(x, y, z)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$ . В соответствии с принятыми выше предположениями должны быть справедливы соотношения вида

$$\frac{\sigma}{(\vec{n} \cdot \vec{t}_1)} = \frac{\sigma_1}{|(\vec{n}_1 \cdot \vec{t}_1)|}; \quad \frac{\sigma}{(\vec{n} \cdot \vec{t}_2)} = \frac{\sigma_2}{|(\vec{n}_2 \cdot \vec{t}_2)|}; \quad \frac{\sigma_2}{(\vec{n}_2 \cdot \vec{t}_{12})} = \frac{\sigma_1}{|(\vec{n}_1 \cdot \vec{t}_{12})|}.$$

Но в этом случае простой переход

$$(x_1, y_1, z_1) \implies (x, y, z)$$

и сложный переход

$$(x_1, y_1, z_1) \implies (x_2, y_2, z_2) \implies (x, y, z)$$

должны приводить к одинаковому результату. Следствием этого требования является условие

$$\frac{(\vec{n} \cdot \vec{t}_1)}{(\vec{n} \cdot \vec{t}_2)} \cdot \frac{|(\vec{n}_1 \cdot \vec{t}_{12})|}{|(\vec{n}_2 \cdot \vec{t}_{12})|} \cdot \frac{|(\vec{n}_2 \cdot \vec{t}_2)|}{|(\vec{n}_1 \cdot \vec{t}_1)|} = 1. \quad (9)$$

Здесь вектор нормали к поверхности без индекса проводится в точке  $(x, y, z)$ , вектор нормали с индексом 1 или 2 — в точке, имеющей координаты с таким же подстрочным индексом, орт  $\vec{t}$  с индексом 1 проводится вдоль направления из точки  $(x_1, y_1, z_1)$  в точку  $(x, y, z)$ , орт  $\vec{t}$  с индексом 2 проводится вдоль направления из точки  $(x_2, y_2, z_2)$  в точку  $(x, y, z)$ , орт  $\vec{t}_{12}$  проводится вдоль направления из точки  $(x_1, y_1, z_1)$  в точку  $(x_2, y_2, z_2)$ .

Геометрическое по физическому смыслу соотношение (9) определяет класс поверхностей, для которых предлагаемый метод решения задачи Робена является корректным. Физическое содержание условия (9) заключается в предположении, согласно которому двух сходственных элементарных поверхностных электрических зарядов достаточно для нейтрализации электростатического поля внутри рассматриваемой замкнутой поверхности.

**Заключение.** Предложен простой аналитический метод решения задачи Робена для эллипсоида (в плоском случае эллипса) и рассмотрены границы его применимости. Получено условие, определяющее класс поверхностей, для которых предложенный метод решения задачи Робена является корректным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R o b i n G. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. – 1886. – Vol. 3.
2. Г ю н т е р Н. М. Теория потенциала и ее применение к задачам математической физики. – М., 1953.
3. Л а н д к о ф Н. С. Основы современной теории потенциала. – М., 1966.
4. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
5. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1992. – 664 с.
6. М о р с Ф. М., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики. Т. 1. – М.: ИЛ, 1958. – 930 с. Т. 2. – М.: ИЛ, 1960. – 886 с.

Статья поступила в редакцию 22.06.2004

Анатолий Макарович Макаров — д-р техн. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области математического моделирования физических процессов.

A.M. Makarov — professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of mathematical simulation of physical processes.

Любовь Александровна Лунёва — канд. техн. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области математической физики.

L.A. Lunyova — assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of mathematical physics.

Константин Анатольевич Макаров — канд. техн. наук, доцент кафедры “Гидравлика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 20 научных работ в области гидродинамических процессов.

K.A. Makarov — assoc. professor of “Hydraulics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of hydrodynamical processes.