УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ. Ч. 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Г.Н. Кувыркин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: fn2@bmstu.ru

Современные конструкционные и функциональные материалы, представляющие собой совокупность микро- и наноструктурных элементов, находят широкое применение в технике. Важным этапом в создании и использовании рассматриваемого класса материалов является построение математических моделей, позволяющих описать поведение этих материалов в широком диапазоне изменения внешних воздействий. Однако общая методология построения математических моделей еще далека от завершения. Предложен вывод уравнения движений с учетом особенностей малоразмерных материалов (нелокальность среды, моментность напряженного состояния). Для получения определяющих уравнений использованы соотношения рациональной термодинамики необратимых процессов с внутренними параметрами состояния, а также метод непрерывной аппроксимации обобщенной механики сплошной среды. Полученные формы записи уравнений движения позволяют учесть основные особенности материалов с малоразмерной структурой при их нестационарном деформировании.

Ключевые слова: нелокальная среда, внутренние параметры состояния, уравнения движения.

MATHEMATICAL MODEL OF NON-LOCAL THERMAL VISCOELASTIC MEDIUM. PART 3. EQUATIONS OF MOTION

G.N. Kuvyrkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: fn2@bmstu.ru

Modern structural and functional materials presenting an aggregate of micro- and nanostructured elements find wide application in technology. An important stage in creating and using the class of materials under consideration is the construction of mathematical models providing the description of behavior of these materials within a broad range of variations in exposure conditions. However the general methodology for mathematical model construction is still far from being complete. Here a derivation of equations of motion is offered taking into account the features of small-size materials (continuum non-locality, momentary stress states). For deducing the equations, the relationships of rational thermodynamics of irreversible processes with internal state parameters, as well as the method of continuous approximation of the generalized mechanics of continuum are used. The obtained forms for writing equations of motion make it possible to take into consideration the main peculiarities in nonstationary deforming of materials with the small-size structure.

Keywords: non-local continuum, internal state parameters, equations of motion.

Обобщенная механика сплошной среды, использующая метод непрерывной аппроксимации [1], находит широкое применение при изучении материалов с малоразмерной структурой [2, 3], к числу которых относятся современные конструкционные и функциональные материалы, полученные различными способами из нано- и микроразмерных элементов [4, 5].

Важным этапом в создании и использовании материалов рассматриваемого класса является построение математических моделей, позволяющих описать их поведение в широком диапазоне изменения внешних воздействий. В работах [6, 7] на основе соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов [8] для сплошной среды с внутренними параметрами состояния [9] сформулированы определяющие уравнения и предложены различные формы уравнения теплопроводности для материалов с малоразмерной структурой. В настоящей статье разработанные соотношения использованы для получения различных форм уравнений движения для материалов рассматриваемого класса.

В работе [5] представлены следующие выражения для компонент тензоров напряжений $\sigma_{ji} \neq \sigma_{ij}$ и моментных напряжений m_{ji}:

$$\sigma_{ji} = B_{ji} + \int\limits_V C_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\big(e_{kl}(\boldsymbol{x}') - e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}')\big)dV(\boldsymbol{x}') +$$

$$+ \int\limits_V dV(\boldsymbol{x}') \int\limits_V M_{jikl}^{(1)}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'|)\Bigg(\omega_{kl}(\boldsymbol{x}'', t) - \varphi_{kl}(\boldsymbol{x}'', t) -$$

$$- \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_\sigma^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'}\Big(\omega_{kl}(\boldsymbol{x}'', t') - \varphi_{kl}(\boldsymbol{x}'', t')\Big)dt'\Bigg)dV(\boldsymbol{x}'') -$$

$$- \int\limits_V H_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)e_{kl}^{(\kappa)}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}'); \tag{1}$$

$$m_{ji} = \int\limits_V G_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}') + \int\limits_V dV(\boldsymbol{x}') \int\limits_V M_{jikl}^{(2)}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\times$$

$$\times\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'|)\left(\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}'', t) - \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_m^*}\right)\frac{\partial\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}'', t')}{\partial t'}dt'\right) dV(\boldsymbol{x}''), \tag{2}$$

где $C_{ijkl} = C_{klji}$ — компоненты тензора коэффициентов упругости, $i, j, k, l = 1, 2, 3$; $e_{kl} = \varepsilon_{kl} + e_{klm}(\omega_m - \varphi_m) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) +$

$+ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} - \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + e_{lkm}\varphi_m$ — компоненты тензора микродеформации, ε_{kl} — компоненты симметричного тензора малой деформации; u_k, φ_m — проекции векторов перемещения и микроповорота на оси прямоугольной системы координат, $m = 1, 2, 3$; x_k, x_l — декартовы координаты; e_{klm} — символ Леви-Чивиты; $M^{(1)}_{jikl}$, $M^{(2)}_{jikl}$ — компоненты тензоров, определяющие вязкие свойства среды только при макро- и микроповоротах (ω_m, φ_m); t^*_σ, t^*_m — времена релаксации соответствующих напряжений; $e^{(T)}_{kl}$, $e^{(\kappa)}_{kl}$ — компоненты тензоров температурной деформации и деформации, обусловленной термодинамической температурой κ; $\zeta_{kl} = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}$ — компоненты градиента вектора микроповорота; $\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)$ — функции влияния, определяющие эффект пространственной "памяти", причем

$$\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}') = 1,$$

а также $\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \neq 0$ только при $|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}| \in V(\boldsymbol{x}')$.

Уравнения закона сохранения количества движения и его момента для микрополярной среды имеют вид [6]

$$\begin{aligned} &\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i; \\ &\rho\frac{\partial \mu_i}{\partial t} = e_{ijk}\sigma_{jk} + \frac{\partial m_{ji}}{\partial x_j} + m^{(V)}_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{3}$$

где ρ — плотность среды; t — время; μ_i — проекции вектора внутреннего спина; b_i, $m^{(V)}_i$ — проекции векторов плотности объемных сил и плотности моментов, распределенных по объему.

Обозначив $F_{kl}(\xi_{kl}, t^*) = \xi_{kl}(\boldsymbol{x}'', t) - \int\limits_0^t \exp\left(-\dfrac{t - t'}{t^*}\right)\dfrac{\partial \xi_{kl}(\boldsymbol{x}'', t')}{\partial t'}dt'$, $\rho\partial\mu_i/\partial t = J_{ji}\partial^2\varphi_j/\partial t^2$, где J_{ji} — компоненты тензора микроинерции, и подставив равенства (1) и (2) в уравнения (3), получим

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial B_{ji}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V C_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\big(e_{kl}(\boldsymbol{x}') - e^{(T)}_{kl}(\boldsymbol{x}')\big)dV(\boldsymbol{x}') +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V M^{(1)}_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}|)F_{kl}(\omega_{kl} - \varphi_{kl}, t^*_\sigma)dV(\boldsymbol{x}'') +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V H_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)e^{(\kappa)}_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}') + b_i; \tag{4}$$

$$J_{ji}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial t^2}=e_{ijk}\left(B_{jk}+\int\limits_V C_{jkml}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\big(e_{ml}(\boldsymbol{x}')-e_{ml}^{(T)}(\boldsymbol{x}')\big)dV(\boldsymbol{x}')\right)+$$

$$+\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V M_{jkml}^{(1)}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)F_{kl}(\omega_{kl}-\varphi_{kl},t_\sigma^*)dV(\boldsymbol{x}'')+$$

$$+\int\limits_V H_{jkml}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)e_{kl}^{(\kappa)}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}'))+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int\limits_V G_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\zeta_{kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')+\right.$$

$$\left.+\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V M_{jikl}^{(2)}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)F_{kl}(\zeta_{kl},t_m^*)dV(\boldsymbol{x}'')\right)+m_i^{(V)}. \quad (5)$$

Для изотропного материала $C_{jikl}=\lambda\delta_{ji}\delta_{kl}+(\mu+\mu_1)\delta_{jk}\delta_{il}+\mu\delta_{jl}\delta_{ik}$, $M_{jikl}^{(1)}=M_1^{(1)}\delta_{ji}\delta_{kl}+M_2^{(1)}\delta_{jk}\delta_{il}+M_3^{(1)}\delta_{jl}\delta_{ik}$, $M_{jikl}^{(2)}=M_1^{(2)}\delta_{ji}\delta_{kl}+$ $+M_2^{(2)}\delta_{jk}\delta_{il}+M_3^{(2)}\delta_{jk}\delta_{il}$, $G_{jikl}=G_1\delta_{ji}\delta_{kl}+G_2\delta_{jk}\delta_{il}+G_3\delta_{jl}\delta_{ik}$, $H_{jikl}=$ $=H_1\delta_{ji}\delta_{kl}+H_2\delta_{jk}\delta_{il}+H_3\delta_{jl}\delta_{ik}$, где λ, μ — константы Ламе; μ_1, G_1, G_2, G_3 — константы, обусловленные несимметрией тензора напряжений и тензором моментных напряжений; $M_1^{(1)},\ldots,M_3^{(2)}$ — константы, определяющие вязкие свойства среды; H_1, H_2, H_3 — константы, определяющие влияние термодинамической температуры κ на термонапряженное состояние. В этом случае при $B_{ji}=0$ из (4) и (5) имеем

$$\sigma_{ji}=\lambda\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varepsilon_{kk}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')\delta_{ji}+(2\mu+\mu_1)\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varepsilon_{ji}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+\mu_1 e_{jim}\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)(\omega_m(\boldsymbol{x}')-\varphi_m(\boldsymbol{x}'))dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+\mu_2 e_{jik}\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)F_k(\omega_k-\varphi_k,t_\sigma^*)dV(\boldsymbol{x}'')-$$

$$-(3\lambda+2\mu+\mu_1)\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varepsilon_{kk}^{(T)}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')\delta_{ji}; \quad (6)$$

$$m_{ji}=G_1\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\zeta_{kk}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')\delta_{ji}+G_2\int\limits_V\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\zeta_{ji}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+G_3 \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\zeta_{ij}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}') \left(M_1^{(2)} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'|)\times \right.$$

$$\times F_{kk}(\zeta_{kk}, t_m^*)\delta_{ji} dV(\boldsymbol{x}'') + M_2^{(2)}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'|)F_{ji}(\zeta_{ji}, t_m^*)dV(\boldsymbol{x}'')+$$

$$\left. +M_3^{(2)} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'|)F_{ij}(\zeta_{ij}, t_m^*)dV(\boldsymbol{x}'') \right),$$

где

$$F_k(\omega_k - \varphi_k, t_\sigma^*) = \omega_k(\boldsymbol{x}'', t) - \varphi_k(\boldsymbol{x}'', t) -$$

$$-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_\sigma^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'}\big(\omega_k(\boldsymbol{x}'', t') - \varphi_k(\boldsymbol{x}'', t')\big)dt';$$

$\mu_2 = \dfrac{1}{2}\big(M_2^{(1)} - M_3^{(1)}\big)$.

Уравнения (3) для изотропной нелокальной среды, описываемой равенствами (6), имеют следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \big(\lambda + \mu\big)\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j'}dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+(\mu + \mu_1)\frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j'}dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+\mu_1 e_{jik}\frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi_k(\boldsymbol{x}', t)dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+\mu_2\frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_V dV(\boldsymbol{x}') \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'|)F_{ji}(\omega_{ji} - \varphi_{ji}, t_\sigma^*)dV(\boldsymbol{x}'')-$$

$$-(3\lambda + 2\mu + \mu_1)\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varepsilon^{(T)}(\boldsymbol{x}', t)dV(\boldsymbol{x}')-$$

$$-(3H_1 + H_2 + H_3)\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)\varepsilon^{(\kappa)}(\boldsymbol{x}', t)dV(\boldsymbol{x}') + b_i; \qquad (7)$$

$$J_{ji}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} = e_{ijk}\left(\big(\mu + \mu_1\big)\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mu_1 e_{kjn}\varphi_n\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\left(G_2\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_i'}+G_3\frac{\partial\varphi_i(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}\right)dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+e_{ijk}\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)\big(M_2^{(1)}F_{jk}(\omega_{jk}-\varphi_{jk},t_\sigma^*)+$$

$$+M_3^{(1)}F_{kj}(\omega_{kj}-\varphi_{kj},t_\sigma^*)\big)dV(\boldsymbol{x}'')+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)\big(M_2^{(2)}F_{ji}(\zeta_{ji},t_m^*)+$$

$$+M_3^{(2)}F_{ij}(\zeta_{ij},t_m^*)\big)dV(\boldsymbol{x}'')+m_i^{(V)}.$$

Краевые условия для уравнений (7) имеют вид

$$t=0\quad u_i(x,0)=u_i^\circ(x),\qquad \left.\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot{u}_i^\circ(x);$$

$$\varphi_j(x,0)=\varphi_j^\circ(x),\qquad \left.\frac{\partial \varphi_j(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot{\varphi}_j^\circ(x);$$

$$\sigma_{ji}(P,t)n_j(P)=p_i(P,t),\quad P\in S_\sigma;$$

$$u_i(P,t)=\tilde{u}_i(P,t),\qquad P\in S_u, S_u=S\setminus S_\sigma,$$

где S — граничная поверхность тела; n_j — проекции единичного вектора нормали к этой поверхности в точке P;

$$m_{ji}(P,t)n_j(P)=m_j^{(S)}(P,t),\quad P\in S_m;$$

$$\varphi_i(P,t)=\tilde{\varphi}_i(P,t),\quad P\in S_\varphi,\quad S_\varphi=S\setminus S_m,$$

где $m_j^{(S)}$ — проекции вектора плотности распределенных по поверхности S_m моментов.

Для изотропной нелокальной упругой среды ($t_\sigma^*=0$, $t_m^*=0$) уравнения упрощаются

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}dV(\boldsymbol{x}')+$$

$$+(\mu+\mu_1)\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}dV(\boldsymbol{x}')-$$

$$-(3\lambda+2\mu+\mu_1)\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varepsilon^{(T)}(\boldsymbol{x}',t)dV(\boldsymbol{x}')+b_i; \tag{8}$$

$$J_{ji}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial t^2}=e_{ijk}\left((\mu+\mu_1)\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\mu_1 e_{kjn}\varphi_n\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\left(G_2\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_i'}+G_3\frac{\partial\varphi_i(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j}\right)dV(\boldsymbol{x}')+m_i^{(V)}.$$

Если не учитывать моментные напряжения и принять $\mu_1 = 0$, то вместо уравнений (8) имеем

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}dV(\boldsymbol{x}')+$$
$$+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}dV(\boldsymbol{x}')- \tag{9}$$
$$-(3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varepsilon^{(T)}(\boldsymbol{x}',t)dV(\boldsymbol{x}')+b_i.$$

Положим $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|$ существенно меньшим характерного размера тела. Тогда, разложив $\partial u_j/\partial x_j'$, $\partial u_i/\partial x_j'$ и $\varepsilon^{(T)}$ из (9) в ряд Тейлора в окрестности точки, заданной вектором $\boldsymbol{x}$, получим

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j\partial x_j}-(3\lambda+2\mu)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+$$
$$+b_i+\left(\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k\partial x_i\partial x_j}\int\limits_V |x_k'-x_k|\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')+\right.$$
$$+\mu\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k\partial x_j\partial x_j}\int\limits_V |x_k'-x_k|\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')- \tag{10}$$
$$\left.-(3\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon^{(T)}}{\partial x_k\partial x_i}\int\limits_V |x_k'-x_k|\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')\right)+\frac{1}{2!}\left(\big(\lambda+\right.$$
$$\left.+\mu\big)\frac{\partial^4 u_j}{\partial x_m\partial x_k\partial x_i\partial x_j}\int\limits_V |x_m'-x_m|\,|x_k'-x_k|\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')+\ldots\right).$$

Левая часть (10) вместе с первыми четырьмя слагаемыми представляет собой уравнения Ламе для термоупругой среды. Другие слагаемые в правой части (10) учитывают эффекты нелокальности и моментность напряженного состояния. Подобное разложение, естественно, возможно и для уравнений (4)–(8).

Вид используемой в основных соотношениях функции $\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)$ может быть следующим [10]:

1) $\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)=\dfrac{1}{\pi^3}\displaystyle\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{x_i'-x}\sin\frac{\pi(x_i'-x_i)}{a}$ при $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|\leqslant a$;

$$2)\ \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}{a}\right) & \text{при}\quad |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|\leqslant a,\\ 0 & \text{при}\quad |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|>a;\end{cases}$$

$$3)\ \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2na}\left(1-\dfrac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^n}{a^n}\right) & \text{при}\quad |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|\leqslant a,\\ 0 & \text{при}\quad |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|>a;\end{cases}$$

$$4)\ \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)=\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\left(\frac{k}{l}\right)^n\exp\left(-\frac{k^2}{l^2}|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2\right),$$

где $k=\mathrm{const}$; l — характерный размер; n — размерность задачи.

Полученные формы записи уравнений движения позволяют учесть основные особенности при нестационарном деформировании материалов с малоразмерной структурой.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Введение* в микромеханику / Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К. и др.: пер. с япон. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
2. *Амбарцумян С.А.*, *Белубекян М.В.* Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. Ереван: Гитутюн, 2010. 136 с.
3. *Кривцов А.М.* Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
4. *Пул-мл. Ч.*, *Оуэнс Ф.* Нанотехнологии: М.: Техносфера, 2006. 336 с.
5. *Старостин В.В.* Материалы и методы нанотехнологий. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 431 с.
6. *Кувыркин Г.Н.* Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Ч. 1. Определяющие уравнения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 1. С. 26–33.
7. *Кувыркин Г.Н.* Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Ч. 2. Уравнение теплопроводности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 2. С. 102–111.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред: пер. с англ. М.: Мир, 1975. 592 с.
9. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
10. *Eringen A.C.* Nonlocal continuum field theories. New York–Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 2002. 393 p.

REFERENCES

[1] Onami M., Ivasimidzu S., Genka K. Vvedenie v mikromekhaniku [Introduction to micromechanics]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1987. 280 p.

[2] Ambartsumyan S.A., Belubekyan M.V. Prikladnaya mikropolyarnaya teoriya uprugikh obolochek [Applied micropolar theory of elastic shells]. Erevan, Gitutyun Publ., 2010. 136 p.

[3] Krivtsov A.M. Deformirovanie i razrushenie tverdykh tel s mikrostrukturoy [Deformation and fracture of solids with microstructure]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 304 p.

[4] Poole C.P., Owens F.J. Introduction to nanotechnology. New Jersey, John Wiley & Sons, 2003. 400 p. (Russ. ed.: Pul Ch., Ouens F. Nanotekhnologii. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2006. 336 p.).

[5] Starostin V.V. Materialy i metody nanotekhnologiy [Materials and methods of nanotechnology]. Moscow, BINOM Publ., 2010. 431 p.

[6] Kuvyrkin G.N. Mathematical model of a nonlocal thermoviscoelastic medium. Part 1. Governing equations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Ser. Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2013, no. 1, pp. 26–33 (in Russ.).

[7] Kuvyrkin G.N. Mathematical model of a nonlocal thermoviscoelastic medium. Part 2. The heat equation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Ser. Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2013, no. 2, pp. 102–111 (in Russ.).

[8] Truesdell C.A. A First Course in Rational Continuum Mechanics. New York, Academic Press, 1977, 303 p. (Russ. ed.: Trusdell K. Pervonachal'nyy kurs ratsional'noy mekhaniki sploshnykh sred. Moscow, Mir Publ., 1975. 592 p.).

[9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p.

[10] Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York, Springer-Verlag, 2002. 393 p.

Статья поступила в редакцию 7.06.2012

Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

G.N. Kuvyrkin — D. Sc. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.