

## ЯВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ

А.М. Макаров, Л.А. Лунёва, К.А. Макаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
 e-mail: lunevala2008@rambler.ru; anmark2009@rambler.ru

*Полное внутреннее отражение, как правило, описывается формулами Френеля, получающимися из основных уравнений классической электродинамики при условии, что волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волны являются действительными. При полном внутреннем отражении это условие не выполняется. В связи с этим формальное использование формул Френеля с комплексными волновыми векторами приводит к правильным конечным результатам, но в процессе вывода формул теряется геометрический смысл произведения волнового вектора и комплексного значения косинуса угла преломления как проекции вектора на рассматриваемое направление. Это не позволяет полагать получаемые результаты обоснованными. Требуемые результаты получены без использования комплексных значений тригонометрических функций и без нарушений геометрического смысла проведенных вычислений, что полностью обосновывает физико-математическую модель полного внутреннего отражения. Показано, что в течение периода электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков баланс плотностей потоков электромагнитной энергии, перпендикулярных границе раздела, выполняется для каждого момента времени.*

**Ключевые слова:** электромагнитная волна, комплексная или действительная компоненты, полное внутреннее отражение, вектор Умова–Пойнтинга.

## PHENOMENON OF TOTAL INTERNAL REFLECTION

A.M. Makarov, L.A. Lunyova, K.A. Makarov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
 e-mail: lunevala2008@rambler.ru; anmark2009@rambler.ru

*The total internal reflection is described, as a rule, by the Fresnel formulas (derived from the basic equations of the classical electrodynamics on condition that the wave vectors of the incident and refracted waves are real). In the case of the total internal reflection, this condition is not fulfilled. In this connection, the formal use of the Fresnel formulas with complex wavevectors leads to correct final results but during the formulas derivation, the geometrical meaning of the product of the wavevector and a value of the refraction angle cosine as a projection of the vector onto the considered direction is lost. This does not allow us to believe that the obtained results are valid. The required results are derived without using complex values of trigonometric functions and without violations of the geometrical sense of the performed calculations, which fully substantiated the physical-mathematical model of total internal reflection. It is shown that during the electromagnetic wave period at the interface between two dielectrics, the balance of electromagnetic energy fluxes perpendicular to the interface surface is fulfilled at each moment of time.*

**Keywords:** electromagnetic wave, complex or real components, total internal reflection, Umov–Poynting vector.

**Введение.** С теорией явления полного внутреннего отражения плоской гармонической электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков можно ознакомиться по классической монографии Дж. А. Стрэттона [1]. Полученные им результаты основаны на известных представлениях о распространении электромагнитных волн в однородных изотропных средах [2–6]. Отметим, что в работе М. Борна и Э. Вольфа волновой вектор плоской гармонической электромагнитной волны может принимать комплексные значения, но действительная и мнимая компоненты этого вектора принимаются параллельными друг другу [2]. В учебниках по теоретической физике Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица по электродинамике сплошных сред в общем случае допускается возможность различных ориентаций в пространстве действительной и мнимой компонент волнового вектора [3, 4], но при рассмотрении явления полного внутреннего отражения волновой вектор преломленной волны имеет единственное направление, поскольку его действительная компонента обращается в нуль. В учебнике [5], как и в указанных выше источниках, формулы Френеля, полученные для “регулярного” преломления–отражения плоской гармонической электромагнитной волны на плоской границе раздела двух диэлектриков, формально применимы и для полного внутреннего отражения. В частности отмечено, что геометрический смысл тригонометрических функций угла преломления теряется: синус угла преломления (закон Снеллиуса) превышает единицу; косинус угла преломления приходится рассматривать как комплексную величину; модуль волнового вектора, умноженный на косинус угла преломления, теряет смысл проекции вектора на направление нормали к границе раздела сред; относительный показатель преломления, а также фазовая скорость распространения электромагнитной волны становятся комплексными величинами. Последнее обстоятельство не позволяет полагать конечные результаты исследования строго обоснованными.

Цель настоящей работы, которая методологически представляет собой продолжение работ [8, 9], — анализ явления полного внутреннего отражения плоской гармонической электромагнитной волны на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков без использования комплексных значений тригонометрических функций углов преломления.

Как правило, анализ баланса нормальных компонент плотностей потоков энергии (векторы Умова–Пойнтинга) проводят для усредненных по времени действительных величин. При этом нормальная усредненная компонента вектора Умова–Пойнтинга падающей волны равна нормальной усредненной компоненте вектора Умова–Пойнтинга отраженной волны, а нормальная усредненная компонента вектора

Умова–Пойнтинга преломленной волны равна нулю [1–6]. Преломленная электромагнитная волна реально существует как неоднородная волна [7].

Кроме анализа баланса нормальных компонент плотностей потоков энергии для усредненных по времени действительных величин исследован баланс нормальных компонент плотностей потоков энергии (векторы Умова–Пойнтинга для мгновенных действительных величин). Это позволило выявить естественный источник существования неоднородной преломленной электромагнитной волны.

Система уравнений классической электродинамики в диэлектрической (непроводящей) однородной изотропной среде имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}; \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1)$$

В уравнениях (1) использованы общепринятые обозначения. Плоская гармоническая волна может быть описана с помощью понятия “комплексная амплитуда”

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp(i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)), \quad (2)$$

где  $\vec{A}_0$  — постоянная комплексная амплитуда;  $\vec{k}$  — волновой вектор;  $\omega$  — круговая частота волны;  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения. Далее круговую частоту принимаем постоянной действительной величиной, а волновой вектор — постоянной, возможно комплексной, векторной величиной. Подставляя выражения (2) в систему уравнений (1), получаем “алгебраическую” систему уравнений

$$i\vec{k} \vec{E} = 0; \quad i\vec{k} \vec{H} = 0; \quad i\vec{k} \times \vec{E} = i\mu\mu_0\omega\vec{H}; \quad i\vec{k} \times \vec{H} = -i\varepsilon\varepsilon_0\omega\vec{E}. \quad (3)$$

Круговая частота волны и волновой вектор связаны дисперсионным уравнением

$$\vec{k} \vec{k} = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}. \quad (4)$$

Здесь  $c^2$  — квадрат скорости распространения электромагнитной волны в вакууме,  $c^2 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)$ ;  $n$  — абсолютный показатель преломления среды, определенный как действительная положительная величина,  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ . Действительные значения волнового вектора характерны для однородных электромагнитных волн. Дисперсионное уравнение (4) допускает существование комплексной формы волнового вектора для электромагнитной волны в непроводящей среде

$$\vec{k} = \vec{q} + i\vec{p},$$

при этом уравнение (4) преобразуется в систему двух уравнений

$$q^2 - p^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}; \quad \vec{q} \vec{p} = qp \cos \psi = 0,$$

где  $\vec{q}, \vec{p}$  — векторы, являющиеся действительными величинами, ортогональными друг другу;  $\psi$  — угол между рассматриваемыми векторами.

Распространенное представление волнового вектора в комплексной форме с условием совпадения пространственной ориентации действительной и мнимой компонент является частным случаем [2]. Такое представление для непроводящих сред влечет необходимость обращения в нуль одного из слагаемых. Для падающей и отраженной волн в нуль обращаются мнимые компоненты, а для преломленной волны — действительная компонента волнового вектора. Далее это будет показано как результат рассмотрения условий сопряжения решений для волнового электромагнитного поля в среде 1 (падающая и отраженная волны) и в среде 2 (преломленная волна).

Предположим, что электромагнитная волна падает на плоскую границу раздела двух диэлектриков из среды 1 и частично проникает в среду 2. В декартовой системе координат граница раздела описывается уравнением  $z = 0$ . Ось  $z$  направлена во вторую среду, ось  $x$  — так, чтобы проекция волнового вектора падающей волны на это направление была положительной, ось  $y$  достраивается так, чтобы система координат оказалась правой. Физические величины, характеризующие отраженную волну, обозначим нижним индексом “1”, физические величины, относящиеся к преломленной волне, — нижним индексом “2”, физические величины, описывающие падающую волну, оставим без нижнего индекса.

В общем случае пространственная ориентация волновых векторов  $\vec{k} = \vec{q} + i\vec{p}$ ,  $\vec{k}_1 = \vec{q}_1 + i\vec{p}_1$  и  $\vec{k}_2 = \vec{q}_2 + i\vec{p}_2$  должна быть определена отдельно для действительных и мнимых компонент. Реализовать это условие можно, если задать углы падения ( $\alpha$ ), отражения ( $\alpha_1$ ) и преломления ( $\alpha_2$ ) для действительных компонент волновых векторов и углы падения ( $\beta$ ), отражения ( $\beta_1$ ) и преломления ( $\beta_2$ ) для мнимых компонент волновых векторов. Пространственная ориентация в “действительной” плоскости падения определяется ориентацией вектора  $\vec{q}$  (рис. 1, а), а в “мнимой” — ориентацией вектора  $\vec{p}$  (рис. 1, б).

Электромагнитное поле должно удовлетворять условиям сопряжения на границе раздела двух сред, которые должны быть выполнены для произвольного момента времени и для произвольной точки границы раздела. Если векторы электромагнитного поля имеют вид (2), то следствием условий сопряжения является требование совпадения мгновенной фазы колебаний при  $z = 0$ :

$$k_x x + k_y y - \omega t = k_{1x} x + k_{1y} y - \omega_1 t = k_{2x} x + k_{2y} y - \omega_2 t \quad \forall x, y, t,$$

отсюда

$$\omega = \omega_1 = \omega_2; \quad k_x = k_{1x} = k_{2x}; \quad k_y = k_{1y} = k_{2y}.$$

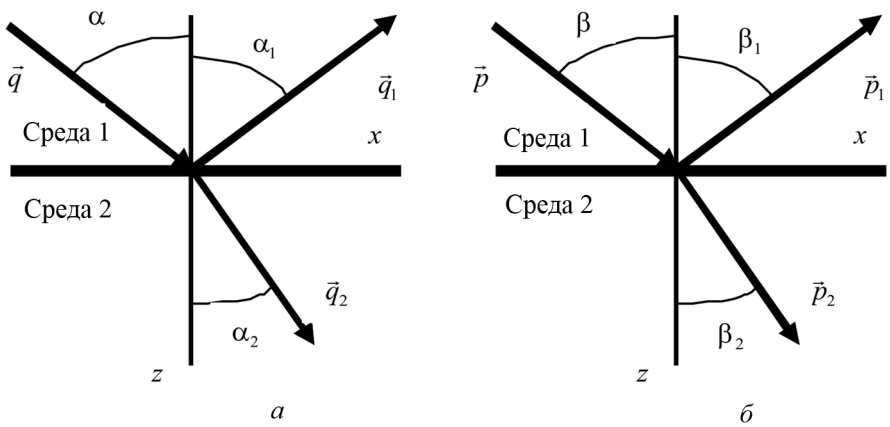


Рис. 1. Пространственная ориентация векторов  $\vec{q}$  (а) и  $\vec{p}$  (б)

Примем (по условию), что падающая волна однородна:

$$p = 0.$$

Соотношение  $k_y = k_{1y} = k_{2y}$  можно удовлетворить, если правильно выбрать систему декартовых координат:  $k_y = 0$ . Отметим, что должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} q \sin \alpha &= q_1 \sin \alpha_1 = q_2 \sin \alpha_2; \\ 0 &= p_1 \sin \beta_1 = p_2 \sin \beta_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что  $p_1 \neq 0$ , тогда справедливы дисперсионные уравнения

$$q^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2}; \quad q_1^2 - p_1^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2}; \quad q_1 p_1 \cos \psi_1 = 0.$$

Согласно условиям (5),  $\sin \beta_1 = 0$ , вектор  $\vec{p}_1$  параллелен оси  $z$ , при этом векторы  $\vec{q}_1$  и  $\vec{p}_1$  взаимно ортогональны, следовательно, вектор  $\vec{q}_1$  параллелен оси  $x$ , т.е.  $\sin \alpha_1 = 1$ . В этом случае

$$-p_1^2 = q^2(1 - \sin^2 \alpha) > 0.$$

Поскольку величина  $\vec{p}_1$  определена как действительная векторная величина, полученный результат позволяет сделать вывод, что отраженная волна не может быть неоднородной

$$p_1 = 0.$$

Если отраженная волна однородна, то

$$q_1 = q = \frac{n_1 \omega}{c}; \quad \alpha_1 = \alpha,$$

т.е. модули волновых векторов падающей и отраженной волн одинаковы, а угол падения равен углу отражения.

Предположим, что преломленная волна неоднородна

$$p_2 \neq 0,$$

вектор  $\vec{p}_2$  направлен параллельно оси  $z$ , вектор  $\vec{q}_2$  ему ортогонален (направлен параллельно оси  $x$ ):  $\sin \alpha_2 = 1$ . Тогда

$$q_2 = q \sin \alpha; \quad p_2 = q \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}; \quad n = \frac{n_2}{n_1} \quad (6)$$

Модуль вектора  $\vec{p}_2$  должен быть действительной положительной величиной, т.е. явление полного внутреннего отражения имеет место только при выполнении условия

$$\alpha > \alpha_0; \quad \sin \alpha_0 = n,$$

где  $n$  — относительный показатель преломления;  $\alpha_0$  — предельный угол.

Дальнейшее исследование связано с установлением зависимостей комплексных амплитуд вектора  $\vec{E}$  от комплексных амплитуд вектора  $\vec{H}$  электромагнитных волн. Такое исследование удобно проводить отдельно для s-поляризованной и p-поляризованной падающих волн.

**S-поляризация падающей волны.** В рассматриваемом случае вектор амплитуды напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости падения электромагнитной волны, образованной волновым вектором падающей волны и нормалью к границе раздела сред,

$$\vec{E} = E \vec{e}_y,$$

а волновой вектор падающей волны имеет вид

$$\vec{k} = \vec{q} = q \sin \alpha \vec{e}_x + q \cos \alpha \vec{e}_z.$$

Используя соответствующее соотношение системы уравнений (3), получаем выражение для вектора амплитуды напряженности магнитного поля падающей волны

$$\vec{H} = -E \frac{q \cos \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \vec{e}_x + E \frac{q \sin \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \vec{e}_z. \quad (7)$$

Амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  падающей волны — вещественные (действительные) величины.

Волновой вектор отраженной волны запишем с учетом полученных выше соотношений

$$\vec{k}_1 = \vec{q}_1 = q \sin \alpha \vec{e}_x - q \cos \alpha \vec{e}_z.$$

Естественно предположить, что вектор амплитуды напряженности электрического поля отраженной волны  $\vec{E}_1$  также направлен вдоль оси  $y$  (ниже убедимся в справедливости этого предположения)

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_y,$$

величину  $E_1$  необходимо определить.

Из системы уравнений Максвелла, записанных для плоских гармонических волн в амплитудной форме, следует зависимость вида

$$\vec{H}_1 = +E_1 \frac{q \cos \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \vec{e}_x + E_1 \frac{q \sin \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \vec{e}_z. \quad (8)$$

Для преломленной волны в рамках принятых выше предположений справедливы зависимости

$$\vec{k}_2 = \vec{q}_2 + i\vec{p}_2 = q_2 \vec{e}_x + ip_2 \vec{e}_z; \quad (9)$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_y; \quad (10)$$

$$\vec{H}_2 = -E_2 \frac{ip_2}{\mu_2 \mu_0 \omega} \vec{e}_x + E_2 \frac{q_2}{\mu_2 \mu_0 \omega} \vec{e}_z. \quad (11)$$

В зависимостях (9)–(11) величины  $q_2$  и  $p_2$  находятся по (6); величина  $E_2$  подлежит определению.

Вычислим “геометрическую” длину вектора амплитуды напряженности магнитного поля, определенного проекциями на оси декартовой системы координат

$$H = E \frac{q}{\mu_1 \mu_0 \omega}; \quad H_1 = E_1 \frac{q}{\mu_1 \mu_0 \omega}; \quad H_2 = E_2 \frac{\sqrt{q_2^2 - p_2^2}}{\mu_2 \mu_0 \omega}.$$

Рассмотрим условия непрерывности касательных компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей на границе раздела двух диэлектриков. Условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности электрического поля вдоль оси  $x$  выполняется тривиально. Условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности электрического поля вдоль оси  $y$  приводит к уравнению

$$E + E_1 = E_2.$$

Условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности магнитного поля вдоль оси  $x$  (в предположении, что поверхностных токов проводимости на границе раздела нет) имеет вид

$$H_x + H_{1x} = H_{2x}.$$

Условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности магнитного поля вдоль оси  $y$  выполняется тривиально.

Решение однородной системы двух алгебраических уравнений позволяет записать параметрические зависимости (коэффициенты Френеля)

$$r_s = \frac{E_1}{E} = \frac{q \cos \alpha \mu_2 - ip_2 \mu_1}{q \cos \alpha \mu_2 + ip_2 \mu_1}; \quad (12)$$

$$d_s = \frac{E_2}{E} = \frac{2q \cos \alpha \mu_2}{q \cos \alpha \mu_2 + ip_2 \mu_1}, \quad (13)$$

где  $r_s$  и  $d_s$  — комплексные величины, что соответствует существованию сдвига мгновенной фазы колебаний в отраженной и преломленной волнах относительно мгновенной фазы колебаний в падающей волне. Для отраженной волны сдвиг фаз определяется как

$$\operatorname{tg} \delta_{1s} = \frac{2\mu_1\mu_2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{(\mu_1^2 + \mu_2^2) \sin^2 \alpha - \mu_2^2 - n^2\mu_1^2}. \quad (14)$$

Явление сдвига фаз для отраженной волны можно описать более компактным способом. В теории функций комплексного переменного известно легко проверяемое соотношение

$$\frac{a - ib}{a + ib} = e^{-\delta/2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b}{a}. \quad (15)$$

Тогда с учетом (15) выражение (14) примет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{1s}}{2} = \frac{\mu_1 \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\mu_2 \cos \alpha}.$$

Отметим, что

$$|r_s| = 1,$$

т.е. можно утверждать, что отражение является полным.

Для преломленной волны

$$\operatorname{tg} \delta_{2s} = -\frac{\mu_1 \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\mu_2 \cos \alpha}.$$

При этом комплексная величина  $d_s$  отлична от нуля.

Существует возможность вычислить магнитные коэффициенты Френеля:

$$r_{sH} = \frac{H_1}{H} = \frac{E_1}{E} = r_s = 1;$$

$$d_{sH} = \frac{H_2}{H} = \frac{E_2 \mu_1 \sqrt{q^2 - p_2^2}}{E \mu_2 q} = d_s \frac{\mu_1}{\mu_2} n.$$

Следует обратить внимание на то, что отношения амплитуд напряженностей магнитного поля и напряженностей электрического поля в среде 2 друг с другом не совпадают. Здесь, как и ранее, проявляется смысл понятия “полное внутреннее отражение” ( $r_{sH} = 1$ ) и остается вопрос о физическом смысле отличия от нуля величины  $d_{sH}$ .

Соотношения (7), (8), (11) для векторов напряженностей магнитного поля падающей, отраженной и преломленной волн становятся полностью определенными:

$$\vec{H} = -E \frac{q \cos \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \vec{e}_x + E \frac{q \sin \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \vec{e}_z; \quad (16)$$



$$\vec{H}_1 = E \frac{q \cos \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \frac{q \cos \alpha \mu_2 - ip_2 \mu_1}{q \cos \alpha \mu_2 + ip_2 \mu_1} \vec{e}_x + E \frac{q \sin \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \frac{q \cos \alpha \mu_2 - ip_2 \mu_1}{q \cos \alpha \mu_2 + ip_2 \mu_1} \vec{e}_z; \quad (17)$$

$$\vec{H}_2 = -E \frac{2q \cos \alpha}{q \cos \alpha \mu_2 + ip_2 \mu_1} \frac{ip_2}{\mu_2 \mu_0 \omega} \vec{e}_x + E \frac{2q \cos \alpha}{q \cos \alpha \mu_2 + ip_2 \mu_1} \frac{q \sin \alpha}{\mu_2 \mu_0 \omega} \vec{e}_z. \quad (18)$$

Проверим условия непрерывности нормальных компонент вектора магнитной индукции

$$\mu_0 \mu_2 H_{2z} - (\mu_0 \mu_1 H_z + \mu_0 \mu_1 H_{1z}) = 0. \quad (19)$$

Если в условие (19) подставить (16)–(18), то оно превращается в тождество, нормальные компоненты вектора магнитной индукции непрерывны при переходе через границу раздела сред.

Поскольку векторы напряженности электрического поля параллельны границе раздела сред, поверхностная плотность сторонних и индуцированных электрических зарядов на границе раздела сред равна нулю.

Перейдем к изучению плотностей потоков электромагнитной энергии в окрестности границы раздела двух диэлектрических сред для s-поляризации падающей волны.

Введем обозначение мгновенной фазы колебаний электромагнитных волн (значение сдвига фазы колебаний, скрытого в комплексной форме записи амплитуды электромагнитной волны, пока не учитываем)

$$\varphi = qx \sin \alpha - \omega t$$

и с помощью формулы Эйлера запишем “развернутые” выражения для векторов электромагнитных волн в окрестности границы раздела сред

$$\vec{E}^{(t)} = E(\cos \varphi + i \sin \varphi) \vec{e}_y;$$

$$\vec{E}_1^{(t)} = E_1(\cos \varphi + i \sin \varphi) \vec{e}_y; \quad \vec{E}_2^{(t)} = E_2(\cos \varphi + i \sin \varphi) \vec{e}_y;$$

$$\vec{H}^{(t)} = \vec{H}(\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

$$\vec{H}_1^{(t)} = \vec{H}_1(\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad \vec{H}_2^{(t)} = \vec{H}_2(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Учитывая, что комплексные амплитуды действительно являются комплексными величинами, найдем выражения для действительных амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей в средах 1 и 2, справедливые для произвольных моментов времени  $t$  и координаты  $x$ :

$$\vec{E}^{(r,t)} = E \cos \varphi \vec{e}_y; \quad \vec{E}_1^{(r,t)} = (E_1^{(r)} \cos \varphi - E_1^{(i)} \sin \varphi) \vec{e}_y;$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_2^{(r,t)} &= (E_2^{(r)} \cos \varphi - E_2^{(i)} \sin \varphi) \vec{e}_y; \\ \vec{H}^{(r,t)} &= \vec{H} \cos \varphi; \quad \vec{H}_1^{(r,t)} = \vec{H}_1^{(r)} \cos \varphi - \vec{H}_1^{(i)} \sin \varphi; \\ \vec{H}_2^{(r,t)} &= \vec{H}_2^{(r)} \cos \varphi - \vec{H}_2^{(i)} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения  $A_j^{(r)} = (A_j + A_j^*)/2$ ;  $A_j^{(i)} = (A_j - A_j^*)/(2i)$ , где верхний индекс “\*” обозначает комплексно сопряженную величину.

Используя соотношения (12), (13), (17), (18), приведем соответствующие выражения для комплексных амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей:

в отраженной волне

$$\begin{aligned}E_1^{(r)} &= E \frac{q^2 \cos^2 \alpha \mu_2^2 - p_2^2 \mu_1^2}{q^2 \cos^2 \alpha \mu_2^2 + p_2^2 \mu_1^2} = E r_s^{(r)}; \\ E_1^{(i)} &= -E \frac{2qp_2 \mu_1 \mu_2 \cos \alpha}{q^2 \cos^2 \alpha \mu_2^2 + p_2^2 \mu_1^2} = E r_s^{(i)}; \\ \vec{H}_1^{(r)} &= E \frac{q \cos \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} r_s^{(r)} \vec{e}_x + E \frac{q \sin \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} r_s^{(r)} \vec{e}_z; \\ \vec{H}_1^{(i)} &= E \frac{q \cos \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} r_s^{(i)} \vec{e}_x + E \frac{q \sin \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} r_s^{(i)} \vec{e}_z;\end{aligned}$$

в преломленной волне

$$\begin{aligned}E_2^{(r)} &= E \frac{2q^2 \mu_2^2 \cos^2 \alpha}{q^2 \cos^2 \alpha \mu_2^2 + p_2^2 \mu_1^2} = E d_s^{(r)}; \\ E_2^{(i)} &= -E \frac{2qp_2 \mu_1 \mu_2 \cos \alpha}{q^2 \cos^2 \alpha \mu_2^2 + p_2^2 \mu_1^2} = E d_s^{(i)}; \\ \vec{H}_2^{(r)} &= E \frac{p_2}{\mu_2 \mu_0 \omega} d_s^{(i)} \vec{e}_x + E \frac{q \sin \alpha}{\mu_2 \mu_0 \omega} d_s^{(r)} \vec{e}_z; \\ \vec{H}_2^{(i)} &= -E \frac{p_2}{\mu_2 \mu_0 \omega} d_s^{(r)} \vec{e}_x + E \frac{q \sin \alpha}{\mu_2 \mu_0 \omega} d_s^{(i)} \vec{e}_z,\end{aligned}$$

где  $r_s^{(r)}$ ,  $r_s^{(i)}$ ,  $d_s^{(r)}$ ,  $d_s^{(i)}$  — действительные и мнимые части коэффициентов Френеля.

С помощью полученных результатов можно записать выражения для определения векторов Умова–Пойнтинга в падающей, отраженной и преломленной волнах, которые справедливы для произвольного момента времени и в произвольной точке границы раздела:

$$\vec{S} = E_y^{(r,t)} H_z^{(r,t)} \vec{e}_x - E_y^{(r,t)} H_x^{(r,t)} \vec{e}_z; \quad (20)$$

$$\vec{S}_1 = E_{1y}^{(r,t)} H_{1z}^{(r,t)} \vec{e}_x - E_{1y}^{(r,t)} H_{1x}^{(r,t)} \vec{e}_z; \quad (21)$$

$$\vec{S}_2 = E_{2y}^{(r,t)} H_{2z}^{(r,t)} \vec{e}_x - E_{2x}^{(r,t)} H_{2y}^{(r,t)} \vec{e}_z. \quad (22)$$

В первую очередь вызывает интерес баланс нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга в произвольной точке границы раздела в произвольный момент времени

$$\delta S_z = S_z + S_{1z} - S_{2z}.$$

Подставляя в рассматриваемое выражение входящие в него “первичные” зависимости (20)–(22), можно убедиться в справедливости утверждения

$$\delta S_z = 0.$$

Следовательно, в произвольной точке границы раздела диэлектрических сред в любой момент времени выполняется условие баланса плотностей потоков электромагнитной энергии. Энергия электромагнитного поля не накапливается на границе раздела в течение произвольного промежутка времени и периода колебаний.

Усредненные нормальные компоненты векторов Умова–Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн на границе раздела сред определяются по выражению

$$\langle S_z \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} S_z dt.$$

Если уравнение баланса нормальных компонент плотностей потоков энергии выполняется для каждого момента времени, оно будет выполнено и для усредненных величин

$$\langle S_z \rangle + \langle S_{1z} \rangle = \langle S_{2z} \rangle.$$

Полученный результат позволяет ввести коэффициент отражения и коэффициент пропускания

$$\rho_s = \frac{|\langle S_{1z} \rangle|}{\langle S_z \rangle}; \quad b_s = \frac{\langle S_{2z} \rangle}{\langle S_z \rangle}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости результатов:  $\rho_s = 1$ ;  $b_s = 0$ . Приходим к выводу, что термин “полное внутреннее отражение” является следствием рассмотрения усредненных нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга.

Вернемся к анализу зависимостей мгновенных значений нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга от времени. После подстановки полученных выше выражений в представляющие интерес выражения можно получить следующие зависимости:

$$S_z = \frac{E^2 q \cos \alpha}{2\mu_1 \mu_0 \omega} (1 + \cos 2\varphi);$$

$$S_{1z} = -\frac{E^2 q \cos \alpha}{2\mu_1 \mu_0 \omega} (1 + \cos(2\varphi - \xi));$$

$$S_{2z} = -\frac{E^2 q \cos \alpha}{\mu_1 \mu_0 \omega} \sin \frac{\xi}{2} \sin \left( 2\varphi - \frac{\xi}{2} \right),$$

где  $\varphi = qx \sin \alpha - \omega t$ ;

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{4\mu_1 \mu_2 \cos \alpha (\mu_2^2 \cos^2 \alpha - \mu_1^2 (\sin^2 \alpha - n^2)) \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\mu_2^4 \cos^4 \alpha - 6\mu_1^2 \mu_2^2 (\sin^2 \alpha - n^2) \cos^2 \alpha + \mu_1^4 (\sin^2 \alpha - n^2)^2}.$$

Значительно удобнее использовать эквивалентное соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{2\mu_1 \mu_2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\mu_2^2 \cos^2 \alpha - \mu_1^2 (\sin^2 \alpha - n^2)}.$$

Характер зависимостей касательных компонент векторов Умова–Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн от мгновенной фазы колебаний продемонстрируем с помощью соотношений

$$\frac{S_x}{S_z} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{S_{1x}}{S_{1z}} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\frac{S_{2x}}{S_{2z}} = -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}} \operatorname{ctg}(\varphi - \eta); \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{\mu_1 \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\mu_2 \cos \alpha}. \quad (23)$$

Фазы колебаний касательных компонент векторов Умова–Пойнтинга падающей и отраженной волн совпадают с фазами колебаний соответствующих нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга. Изменение с течением времени касательной компоненты вектора Умова–Пойнтинга преломленной волны описывается более сложной зависимостью: первое отношение из (23) зависит от мгновенной фазы электромагнитной волны.

**Р-поляризация падающей волны.** Падающая электромагнитная волна является р-поляризованной, если вектор напряженности электрического поля волны лежит в плоскости падения. Поскольку в падающей волне векторы напряженности электрического и магнитного полей взаимно ортогональны и ортогональны по отношению к волновому вектору падающей волны, анализ рассматриваемого случая удобно провести, если задать пространственную ориентацию вектора напряженности магнитного поля: пусть вектор  $\vec{H}$  будет параллелен оси  $y$  (как и вектор  $\vec{E}$  в случае s-поляризации падающей волны).

Волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн неизменны и в данном случае. Итак, для электромагнитного поля падающей волны имеем

$$\vec{H} = H \vec{e}_y.$$

Используя уравнения (3) и определение волнового вектора

$$\vec{k} = \vec{q} = q \sin \alpha \vec{e}_x + q \cos \alpha \vec{e}_z,$$

получаем выражения для комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля

$$\vec{E} = H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_x - H \frac{q \sin \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_z.$$

Для отраженной волны принимаем

$$\vec{H}_1 = H_1 \vec{e}_y$$

и с учетом выражения для волнового вектора

$$\vec{k}_1 = \vec{q}_1 = q \sin \alpha \vec{e}_x - q \cos \alpha \vec{e}_z$$

найдем комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля

$$\vec{E}_1 = -H_1 \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_x - H_1 \frac{q \sin \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_z.$$

Аналогично определяем параметры преломленной волны

$$\vec{k}_2 = \vec{q}_2 + i\vec{p}_2 = q \sin \alpha \vec{e}_x + ip_2 \vec{e}_z;$$

$$\vec{E}_2 = H_2 \frac{ip_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_x - H_2 \frac{q \sin \alpha}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_z.$$

Рассмотрим условия сопряжения векторов электромагнитного поля на границе раздела сред. Непрерывность касательных компонент векторов напряженности магнитного поля в проекции на ось  $x$  выполняется вследствие принятых выше определений ориентации этих векторов. Условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности магнитного поля в проекции на ось  $y$  приводит к уравнению

$$H + H_1 = H_2.$$

Условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности электрического поля в проекции на ось  $x$ :

$$E_x + E_{1x} = E_{2x},$$

условие непрерывности касательных компонент векторов напряженности электрического поля в проекции на ось  $y$  тривиально.

В полученные линейные алгебраические уравнения подставим уже известные зависимости и находим магнитные коэффициенты Френеля

$$r_{pH} = \frac{H_1}{H} = \frac{q\varepsilon_2 \cos \alpha - ip_2\varepsilon_1}{q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1} = e^{-i\delta_p};$$

$$d_{pH} = \frac{H_2}{H} = \frac{2q\varepsilon_2 \cos \alpha}{q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1}.$$

Сдвиг фаз колебаний отраженной волны относительно падающей волны определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \delta_{1p} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - \varepsilon_1^2 \sqrt{\sin^2 \alpha + n^2}}. \quad (24)$$

Вместо (24) удобнее использовать следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{1p}}{2} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\varepsilon_2 \cos \alpha}.$$

Для преломленной волны

$$\operatorname{tg} \delta_{2p} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\varepsilon_2 \cos \alpha}.$$

Приведенные формулы отличаются от соответствующих формул для случая падения на границу раздела плоской гармонической электромагнитной волны s-поляризации. Отметим, что имеет место результат:  $|r_{pH}| = 1$ ;  $d_{pH} \neq 0$ . Как и в случае падения на границу раздела двух диэлектриков волны s-поляризации, можно утверждать о полном внутреннем отражении.

Запишем явные выражения для комплексных амплитуд векторов напряженности электрического поля

$$\vec{E} = H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_x - H \frac{q \sin \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_z; \quad (25)$$

$$\vec{E}_1 = -H \frac{q \cos \alpha (q\varepsilon_2 \cos \alpha - ip_2\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega (q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1)} \vec{e}_x - H \frac{q \sin \alpha (q\varepsilon_2 \cos \alpha - ip_2\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega (q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1)} \vec{e}_z; \quad (26)$$

$$\vec{E}_2 = H \frac{2iqp_2 \cos \alpha}{\varepsilon_0 \omega (q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1)} \vec{e}_x - H \frac{2q^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\varepsilon_0 \omega (q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1)} \vec{e}_z. \quad (27)$$

Определим формально геометрическую длину комплексных векторных величин по правилу  $A = \sqrt{A_x^2 + A_z^2}$ :

$$E = H \frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega}; \quad (28)$$

$$E_1 = H \frac{q(q\varepsilon_2 \cos \alpha - ip_2\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega (q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1)}; \quad (29)$$

$$E_2 = H \frac{2q \cos \alpha \sqrt{q^2 \sin^2 \alpha - p_2^2}}{\varepsilon_0 \omega (q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1)}. \quad (30)$$

Зависимости (28)–(30) позволяют вычислить электрические коэффициенты Френеля

$$r_p = \frac{E_1}{E} = \frac{q\varepsilon_2 \cos \alpha - ip_2\varepsilon_1}{q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1} = r_{pH};$$

$$d_p = \frac{E_2}{E} = \frac{2\varepsilon_1 \cos \alpha \sqrt{q^2 \sin^2 \alpha - p_2^2}}{q\varepsilon_2 \cos \alpha + ip_2\varepsilon_1}. \quad (31)$$

Отметим две физические закономерности. В падающей и отраженной волнах (распространяются в одной и той же среде) отношения комплексных амплитуд напряженностей магнитного и электрического полей одинаковы ( $r_{pH} = r_p$ ), абсолютные значения этих комплексных величин равны единице — полное внутреннее отражение. В падающей и преломленной волнах рассматриваемые отношения не совпадают, так как эти волны распространяются в средах с различными физическими свойствами.

Сравнивая выражения (12) и (31) для падающей волны s- и р-поляризации, убеждаемся, в их отличии друг от друга. Это приводит к тому, что вектор напряженности электрического поля произвольной плоской поляризованной падающей волны генерирует вектор напряженности электрического поля отраженной волны, поляризация которого является сложной функцией точки наблюдения от момента времени.

Продолжим изучение явления полного внутреннего отражения для падающей волны р-поляризации. Условие непрерывности нормальных компонент вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред в рассматриваемом случае является тривиальным (по постановке задачи). Скачок нормальных компонент векторов электрического смещения на границе раздела сред определяет поверхностную плотность сторонних электрических зарядов  $\sigma$ :

$$\varepsilon_0\varepsilon_2 E_{2z} - (\varepsilon_0\varepsilon_1 E + \varepsilon_0\varepsilon_1 E_{1z}) = \sigma. \quad (32)$$

Подставляя в (32) зависимости (25)–(28), получаем  $\sigma = 0$ . Поверхностная плотность связанных зарядов на границе раздела сред при необходимости может быть вычислена. Таким образом, все требования классической электродинамики удовлетворены.

Вычислим действительные компоненты векторов напряженности магнитного поля с учетом экспоненты с мнимым аргументом (бегущая волна). По аналогии с рассмотренным выше случаем падающей волны s-поляризации введем обозначение для мгновенной фазы колебаний

$$\varphi = qx \sin \alpha - \omega t.$$

Мгновенные комплексные значения векторных полей для произвольной точки наблюдения на границе раздела определяются по выражениям

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H \cos \varphi \vec{e}_y; \quad \vec{H}_1 = H_1(\cos \varphi + i \sin \varphi) \vec{e}_y; \quad \vec{H}_2 = H_2(\cos \varphi + i \sin \varphi) \vec{e}_y; \\ \vec{E}^{(r,t)} + i\vec{E}^{(i,t)} &= \vec{E}(\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad \vec{E}_1^{(r,t)} + i\vec{E}_1^{(i,t)} = \vec{E}_1(\cos \varphi + i \sin \varphi); \\ \vec{E}_2^{(r,t)} + i\vec{E}_2^{(i,t)} &= \vec{E}_2(\cos \varphi + i \sin \varphi).\end{aligned}$$

Учитывая, что комплексные амплитуды электромагнитных волн действительно являются комплексными величинами, получаем выражения для действительных значений напряженностей электрического и магнитного полей для рассматриваемых электромагнитных волн, справедливые для произвольных моментов времени и координаты  $x$  на границе раздела сред:

$$\begin{aligned}\vec{H}^{(r,t)} &= \vec{H}^{(r)} \cos \varphi = \vec{H} \cos \varphi; \quad \vec{E}^{(r,t)} = \vec{E}^{(r)} \cos \varphi - \vec{E}^{(i)} \sin \varphi; \\ \vec{H}_1^{(r,t)} &= \vec{H}_1^{(r)} \cos \varphi - \vec{H}_1^{(i)} \sin \varphi; \quad \vec{E}_1^{(r,t)} = \vec{E}_1^{(r)} \cos \varphi - \vec{E}_1^{(i)} \sin \varphi; \\ \vec{H}_2^{(r,t)} &= \vec{H}_2^{(r)} \cos \varphi - \vec{H}_2^{(i)} \sin \varphi; \quad \vec{E}_2^{(r,t)} = \vec{E}_2^{(r)} \cos \varphi - \vec{E}_2^{(i)} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Приведем явные аналитические выражения для действительных и мнимых компонент комплексных амплитуд рассматриваемых электромагнитных волн:

$$\vec{H}^{(r)} = H \vec{e}_y; \quad \vec{H}^{(i)} = 0; \quad (33)$$

$$\vec{H}_1^{(r)} = H \frac{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - p_2^2 \varepsilon_1}{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1} \vec{e}_y; \quad \vec{H}_1^{(i)} = -H \frac{2qp_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha}{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1} \vec{e}_y; \quad (34)$$

$$\vec{H}_2^{(r)} = H \frac{2q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha}{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1} \vec{e}_y; \quad \vec{H}_2^{(i)} = -H \frac{2qp_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha}{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1} \vec{e}_y; \quad (35)$$

$$\vec{E}^{(r)} = H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \vec{e}_x - H \frac{q \sin \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega} \vec{e}_z; \quad \vec{E}^{(i)} = 0; \quad (36)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{(r)} &= -H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - p_2^2 \varepsilon_1}{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1} \vec{e}_x - \\ &- H \frac{q \sin \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - p_2^2 \varepsilon_1}{q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1} \vec{e}_z; \quad (37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{(i)} &= H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{2qp_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha}{(q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1)} \vec{e}_x + \\ &+ H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{2qp_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \alpha}{(q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1)} \vec{e}_z; \quad (38)\end{aligned}$$



$$\vec{E}_2^{(r)} = H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{2p_2^2 \varepsilon_1^2 \cos \alpha}{(q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1^2)} \vec{e}_x - H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{q^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha \sin \alpha}{(q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1^2)} \vec{e}_z; \quad (39)$$

$$\vec{E}_2^{(i)} = H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{2qp_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha}{(q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1^2)} \vec{e}_x + H \frac{q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \frac{2qp_2 \varepsilon_1^2 \sin \alpha}{(q^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \varepsilon_1^2)} \vec{e}_z. \quad (40)$$

Вычислим мгновенные значения векторов Умова–Пойнтинга для падающей, отраженной и преломленной волн:

$$\vec{S} = -E_z^{(r,t)} H_y^{(r,t)} \vec{e}_x + E_x^{(r,t)} H_y^{(r,t)} \vec{e}_z; \quad (41)$$

$$\vec{S}_1 = -E_{1z}^{(r,t)} H_{1y}^{(r,t)} \vec{e}_x + E_{1x}^{(r,t)} H_{1y}^{(r,t)} \vec{e}_z; \quad (42)$$

$$\vec{S}_2 = -E_{2z}^{(r,t)} H_{2y}^{(r,t)} \vec{e}_x + E_{2x}^{(r,t)} H_{2y}^{(r,t)} \vec{e}_z. \quad (43)$$

Проверим условие баланса нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга в произвольной точке границы раздела в произвольный момент времени

$$\delta S_z = S_z + S_{1z} - S_{2z}.$$

Подставляя в это выражение входящие в него “первичные” зависимости (41)–(43), можно убедиться в справедливости утверждения

$$\delta S_z = 0.$$

Следовательно, в произвольной точке границы раздела диэлектрических сред в любой момент времени выполняется условие баланса плотностей потоков электромагнитной энергии. Энергия электромагнитного поля не накапливается на границе раздела в течение произвольного промежутка времени в течение периода колебаний.

Усредненные нормальные компоненты векторов Умова–Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн на границе раздела сред определяются по выражению

$$\langle S_z \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} S_z dt.$$

Если уравнение баланса нормальных компонент плотностей потоков энергии выполняется для каждого момента времени, оно будет выполнено и для усредненных величин

$$\langle S_z \rangle + \langle S_{1z} \rangle = \langle S_{2z} \rangle.$$

Полученный результат позволяет ввести коэффициент отражения и коэффициент пропускания

$$\rho_p = \frac{|\langle S_{1z} \rangle|}{\langle S_z \rangle}; \quad b_p = \frac{\langle S_{2z} \rangle}{\langle S_z \rangle}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости результатов:  $\rho_p = 1$ ,  $b_p = 0$ . Приходим к выводу, что термин “полное внутреннее отражение” является следствием рассмотрения усредненных нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга.

Вернемся к анализу зависимостей от времени мгновенных значений нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга. После подстановки (33)–(43) в представляющие интерес выражения можно получить следующие зависимости:

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{H^2 q \cos \alpha}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} (1 + \cos 2\varphi); \\ S_{1z} &= -\frac{H^2 q \cos \alpha}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} (1 + \cos(2\varphi - \zeta)); \\ S_{2z} &= -\frac{H^2 q \cos \alpha}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \omega} \sin \frac{\zeta}{2} \sin \left( 2\varphi - \frac{\zeta}{2} \right), \end{aligned}$$

где  $\varphi = qx \sin \alpha - \omega t$ ;

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{4\varepsilon_2 \cos \alpha (\varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - \varepsilon_1^2 (\sin^2 \alpha - n^2)) \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\varepsilon_2^4 \cos^4 \alpha - 6\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 (\sin^2 \alpha - n^2) \cos^2 \alpha + \varepsilon_1^4 (\sin^2 \alpha - n^2)^2}.$$

Значительно удобнее использовать эквивалентное соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - \varepsilon_1^2 (\sin^2 \alpha - n^2)}.$$

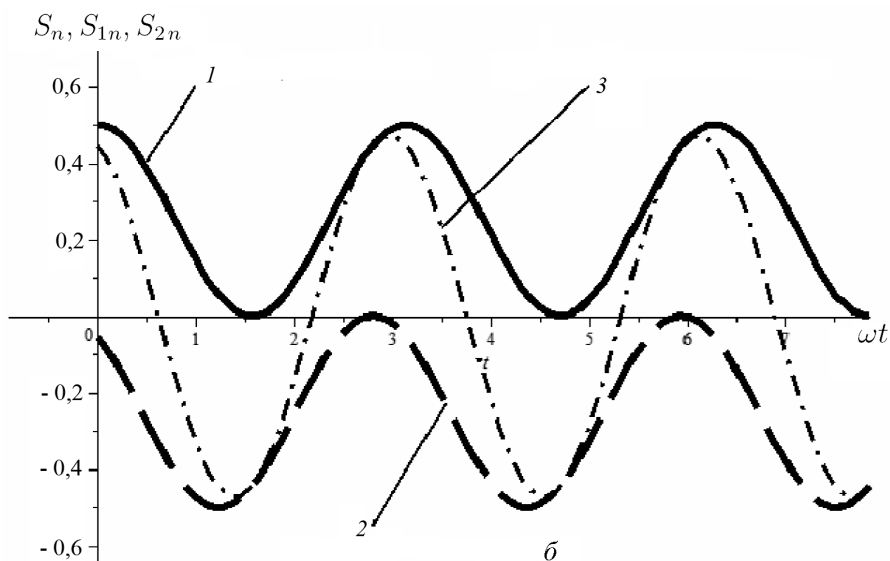
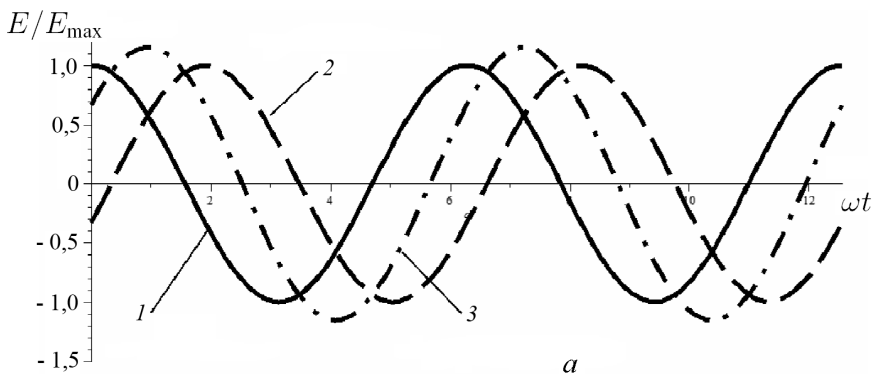
Характер зависимостей от мгновенной фазы колебаний касательных компонент векторов Умова–Пойнтинга падающей и отраженной волн продемонстрируем с помощью соотношений

$$\frac{S_x}{S_z} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{S_{1x}}{S_{1z}} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Касательную компоненту вектора Умова–Пойнтинга для преломленной волны запишем отдельно:

$$S_{2x} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left( \chi S_x + \frac{S_{1x}}{\chi} \right); \quad \chi = 1 + r_{pH}^{(r)} - r_{pH}^{(i)} \operatorname{tg} \varphi.$$

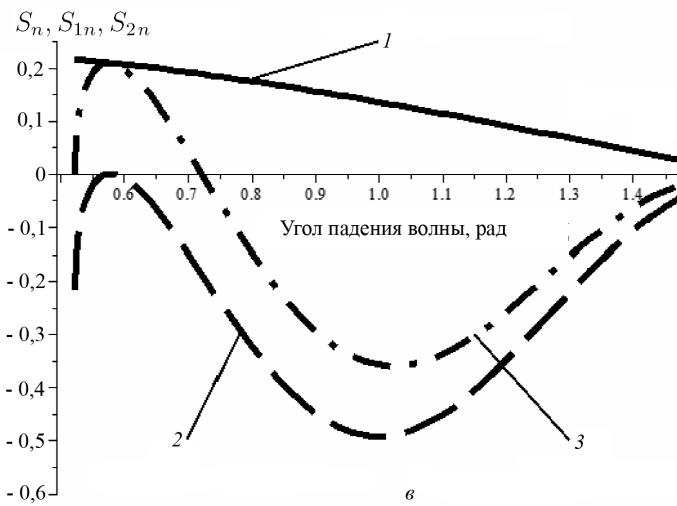
Фазы колебаний касательных компонент векторов Умова–Пойнтинга падающей и отраженной волн совпадают с фазами колебаний соответствующих нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга. Изменение с течением времени касательной компоненты вектора Умова–



**Рис. 2 (начало).** Зависимости изменения во времени касательных компонент векторов напряженности электрического поля (а), мгновенных значений нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга (б) падающей (1), отраженной (2) и преломленной (3) волн для s-поляризации падающей электромагнитной волны

Пойнтинга преломленной волны описывается более сложной зависимостью.

**Графическая иллюстрация безразмерных (относительных) зависимостей.** На рис. 2, а приведены зависимости изменения во времени касательных компонент векторов напряженности электрического поля падающей, отраженной и преломленной волн для s-поляризации падающей электромагнитной волны. Напряженности электрического поля отнесены к амплитуде напряженности электрического поля падающей волны, по оси абсцисс отложена величина  $\omega t$ , процесс колебаний в начале координат показан в течение двух периодов электромагнитной волны. Угол падения электромагнитной волны равен  $\pi/3$ , относительный показатель преломления  $n = 0,5$ . Приведенные зависи-



**Рис. 2 (окончание).** Зависимость нормальных компонент плотности потока энергии от угла падения ( $\alpha$ ) падающей (1), отраженной (2) и преломленной (3) волн для s-поляризации падающей электромагнитной волны

ности также описывают изменение во времени напряженностей магнитного поля для р-поляризации падающей электромагнитной волны. Согласно этим графикам, можно установить факт выполнения условий сопряжения электромагнитных полей на границе раздела сред.

На рис. 2, б приведены зависимости изменения во времени мгновенных значений нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн для s-поляризации падающей электромагнитной волны. Угол падения равен  $\pi/3$ , относительный показатель преломления  $n = 0,5$ . По оси абсцисс отложена величина  $\omega t$ , нормальная компонента вектора Умова–Пойнтинга падающей волны нормирована на единицу. Следует обратить внимание на выполнение баланса плотности потоков электромагнитной энергии в каждый момент времени.

На рис. 2, в показана зависимость нормальных компонент векторов Умова–Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн в точке наблюдения в начале координат в начальный момент времени для  $n = 0,5$  и s-поляризации падающей волны от угла падения.

**Заключение.** Основные результаты теории полного внутреннего отражения плоской гармонической электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков получены без дополнительной гипотезы о том, что в классических формулах Френеля можно использовать комплексные тригонометрические функции. Показано, что в течение периода электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков баланс плотностей потоков электромагнитной энергии, перпендикулярных границе раздела, выполняется для каждого момента времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма: пер. с англ. М.: ГТТИ. 1948. 539 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: пер. с англ. М.: Наука, 1970. 856 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИФМЛ. 1959. 532 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 662 с.
5. Сивухин Д.В. Оптика. М.: Наука, 1985. 752 с.
6. Эйхенвальд А. О движении энергии при полном внутреннем отражении // Известия императорского московского инженерного училища. Ч. 2. Вып. 2. 1908.
7. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР. 1948. Т. 1. С. 261.
8. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. О сопряжении плоских гармонических волн на поверхности раздела в классической электродинамике // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 3. С. 29–36.
9. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. О некоторых эффектах при падении плоской гармонической волны на границу раздела диэлектрик–проводник // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 2 (33). С. 57–71.

## REFERENCES

- [1] Stratton J.A. Electromagnetic theory. McGraw-Hill, 1941. 648 p. (Russ. ed.: Stretton Dzh.A. Teoriya elektromagnetizma. Moscow, GTTI Publ., 1948. 359 p.).
- [2] Born M., Wolf E. Principles of Optics. London, Pergamon Press, 1959, 803 p. (Russ. ed.: Born M., Vol'f E. Osnovy optiki. Moscow, Nauka Publ., 1970. 856 p.).
- [3] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. Elektrodinamika sploshnykh sred [Theoretical Physics. Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1959. 532 p.
- [4] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T 8. Elektrodinamika sploshnykh sred [Theoretical Physics. Vol. 8. Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 662 p.
- [5] Sivukhin D.V. Optika [Optics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 752 p.
- [6] Eykhenval'd A. On the motion of energy under total internal reflection. Part 2. *Izv. Imp. Mosk. Inzh. Uchil.* [Proc. Imp. Moscow Eng. Sch.], 1908, no. 2 (in Russ.).
- [7] Mandel'shtam L.I. Polnoe sobranie trudov [Complete collection of works]. Moscow, AN SSSR Publ., 1948, vol. 1. 261 p.
- [8] Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. The conjugation of plane harmonic waves on the interface in classical electrodynamics. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2008, no. 3, pp. 29–36 (in Russ.).
- [9] Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. Some effects of a plane harmonic wave falling on the dielectric-conductor interface. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 2, pp. 57–71 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 20.03.2013

Анатолий Макарович Макаров — д-р техн. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области физики.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.M. Makarov — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of physics.  
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Лунёва Любовь Александровна — канд. техн. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 50 научных работ в области физики.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

L.A. Lunyova — Cand. Sci. (Eng), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of physics.  
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Макаров Константин Анатольевич — канд. техн. наук, доцент кафедры “Гидроме- ханика, гидромашины и гидропневмоавтоматика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 30 научных работ в области гидравлики.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

K.A. Makarov — Cand. Sci. (Eng), assoc. professor of “Hydraulics and Hydraulic Machines” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of physics.  
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.