

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВОЕ ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛОНДОНОВ И ГИПОТЕЗА МОНОПОЛЕЙ

И.Н. Алиев¹

З.А. Самедова^{1,2}

Р.Э. Лятифов¹

samedova.z.a@muctr.ru

lyatifovrea@student.bmstu.ru

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

² РХТУ им. Д.И. Менделеева, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрено квазиклассическое обобщение уравнения Лондонов, приводящее к связи между квантованием магнитного потока куперовских пар и дискретностью электрического заряда. С использованием правила квантования Бора — Зоммерфельда на основе однозначности флюксоида сделан вывод квантования магнитного потока. Полученное квантование применено к гипотезе о магнитных монополях, предложенной Дираком, которая актуальна вследствие присутствующей в современной физике асимметрии в описании электрических и магнитных свойств вещества. На достаточно простой модели возможного эксперимента разобран вариант регистрации монополя по скачку потока магнитной индукции и связанное с этим изменение тока в контуре. Рассмотрен вопрос о различных единицах измерения монополя и схожесть результата с полученным на основе серии работ Швингера, в которых он исходил из соображений ввода гипотетической частицы, обладающей электрическим и магнитным зарядами — диона. Представлено возможное объяснение вихря Абрикосова — на основе представления вихря в виде намагниченной тонкой нити — через магнитные трубки, на концах которых расположены монополи разных зарядов (диполь). В отличие от большинства работ, посвященных этой проблеме, вычисления выполнены в СИ. Выведены условия квантования заряда монополя

Ключевые слова

Куперовские пары, монополь, дион, вихрь Абрикосова

Поступила 19.07.2022

Принята 12.09.2022

© Автор(ы), 2023

Введение. Гипотеза о магнитных монополях предложена П. Дираком в 1931 г., ему удалось доказать, что существование монополя не только не противоречит квантовой теории, но и позволяет обосновать такое

важное свойство электрических зарядов, как квантование. Существование монополя объяснило бы кратность электрического заряда заряду электрона и дополнило бы общую теорию электромагнетизма, которой характерна асимметрия в описании электрических и магнитных свойств вещества. В настоящей работе предположено, что в случае обнаружения у монополей связанного с ними магнитного потока, который квантуется, вопрос существования этих частиц был бы решен положительно.

Рассмотрен ансамбль сверхпроводящих электронов, для которых необходимо вывести выражение, описывающее магнитный поток. Задача решена с использованием квазиклассического квантового обобщения уравнений Лондонов. Очевидно, что связанная со сверхпроводящими носителями функция ассоциируется с однозначным вдоль любой замкнутой траектории флюксоидом. На основе этого факта к полученному решению применяется правило квантования Бора — Зоммерфельда, в результате чего определяется квантование магнитного потока, которое оказывается связанным с дискретностью электрического заряда.

Рассмотрено применение полученного результата к гипотезе о магнитных монополях, для чего решена задача о равномерном движении монополя сквозь круговой проводник. Из найденного выражения для импульса электрона определен заряд монополя, т. е. прохождение монополя сквозь контур приводит к возникновению скачка потока магнитной индукции, что несложно проверить с помощью предложенного в работе эксперимента.

Описан вихрь Абрикосова как поле двух монополей. Вихри представлены в виде намагниченной тонкой нити, проходящей через магнитные трубки, на концах которых расположены монополи разных зарядов. Вычисление скалярного магнитного потенциала такой нити подтверждает отсутствие противоречивости с гипотезой о существовании магнитных монополей.

Квазиклассическое квантовое обобщение уравнений Лондонов. Применим принцип квазиклассичности к ансамблю сверхпроводящих электронов с общей плотностью n_s . Принимая общепринятую куперовскую гипотезу о совокупности бесспиновых пар массой $2m$ и зарядом $2e$, получаем для плотности потока в классическом случае выражение

$$\frac{1}{2} n_s \vec{v}_s. \quad (1)$$

Плотность потока частиц в квазиклассическом приближении имеет смысл представить в виде $(N/2)\vec{j}$, где N — общее число сверхпроводя-

щих электронов; $N/2$ — число куперовских пар. Общее определение плотности потока вероятности для одной куперовской частицы:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2(2m)} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi),$$

волновую функцию, согласно общим рекомендациям [1, 2], представим в виде

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\theta(\vec{r})}.$$

Отметим, что в [3] допущена неточность в записи нормирующего множителя, хотя конечный результат оказался верен. Тогда плотность потока вероятности выражается через функцию ψ стандартным образом:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{4m} \frac{1}{V} (-i\nabla\theta - i\nabla\theta) = \frac{\hbar\nabla\theta}{2mV}. \quad (2)$$

Объединяя (1), (2), получаем

$$\frac{\hbar\nabla\theta}{2mV} \frac{N}{2} = \frac{1}{2} n_s \vec{v}_s$$

или

$$\hbar\nabla\theta = 2m\vec{v}_s. \quad (3)$$

Вводя канонический импульс (см. [4]) для куперовской пары в виде $\vec{p}_s = 2m\vec{v}_s + 2e\vec{A}$, соотношение (3) перепишем следующим образом: $\hbar\nabla\theta = 2m\vec{v}_s + 2e\vec{A}$.

Следует отметить, что

$$2m\vec{v}_s = \frac{2m}{e^2 n} 2e \frac{n}{2} \vec{v}_s = 2 \frac{2m}{(2e)^2 (n/2)} en\vec{v}_s = 2\Lambda \left(2e \frac{n}{2} \vec{v}_s \right) = 2\Lambda \vec{j}$$

(\vec{j} — плотность тока куперовских пар), причем постоянные Лондонов для сверхпроводящих электронов и куперовских пар совпадают (факт неочевидный):

$$\Lambda_c = \frac{2m}{(2e)^2 (n/2)} = \frac{m}{e^2 n} = \Lambda.$$

Отметим еще одно интересное обстоятельство. Поскольку флюксонид, о котором шла речь в [4], являющийся функцией, связанной со сверхпроводящими носителями, однозначен вдоль любой замкнутой траектории L , обходящей отверстие, можно, по аналогии со случаем волновых функций атомных электронов, принять правило квантования Бора — Зоммерфельда

и потребовать, чтобы для каждого сверхпроводящего электрона выполнялось условие $\oint_L \vec{p}_s d\vec{l} = nh$, т. е.

$$\oint_L e\Lambda \vec{j} d\vec{l} + \oint_L e\vec{A} d\vec{l} = \oint_L e\Lambda \vec{j} d\vec{l} + e\Psi = nh.$$

Здесь Ψ — полный магнитный поток. На больших расстояниях от отверстия, превышающих глубину проникания поля, первое слагаемое близко к нулю и получается правило квантования магнитного потока в сверхпроводниках $\Psi = (nh)/e$.

Квант магнитного потока:

$$\Psi_0 = \frac{h}{e} = 4,125 \cdot 10^{-15} \text{ Тл} \cdot \text{м}^2.$$

Однако экспериментальные результаты [5] позволяют получить значение квантового магнитного потока, уменьшенное в 2 раза: $\Psi_0 = 2,06 \cdot 10^{-15} \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 2,06 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$. Это указывает на то, что сверхпроводящий ток осуществляется куперовскими парами. Представим полученное значение для кванта потока в виде

$$\Psi_0 = \frac{h}{2e} = \frac{e}{4\epsilon_0 c \alpha}.$$

Здесь $\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0 c \hbar)$ — постоянная тонкой структуры в СИ, значение $\alpha = 1/137$ не зависит от выбора системы единиц. Таким образом, квантование магнитного потока куперовских пар и дискретность электрического заряда связаны.

Гипотеза о магнитных монополях. Применим полученный результат к гипотезе о магнитных монополях. Дирак положил начало теории магнитных монополей [6]. В последующие годы наблюдать их не удавалось, но интерес к ним никогда не проходил и периодически к изучению монополей возвращались [7, 8]. Как правило, идея магнитных монополей реализовывалась в необычной форме. Так, в [9] рассмотрен ансамбль из большого числа намагниченных шариков. Вычисляя энергию этой совокупности и минимизируя ее, удалось получить устойчивые состояния. Показано, что возможный учет монополей более точно объяснит этот эффект.

Постоянный интерес к этой проблеме связан, несомненно, в присутствующей в современной физике асимметрии в описании электрических и магнитных свойств вещества. В связи с этим уместно вспомнить выступление П. Дирака на симпозиуме в Лайольском университете: «Еще

один пример красивой математики привел к идее магнитного монополя. Когда я делал эту работу, то надеялся найти какое-нибудь объяснение постоянной тонкой структуры. Но этого не получилось. Математика неумолимо привела к монополю. С теоретической точки зрения можно считать, что монополи должны существовать потому, что соответствующая математика красива» [10].

В настоящее время наиболее очевидным указанием на существование монополей стало бы обнаружение связанного с ними магнитного потока, причем последний должен быть квантованным.

Далее понадобится запись теоремы Гаусса для монополей. Необходимо сделать следующее замечание ввиду того, что в СИ встречаются нестыковки с магнитными величинами, в частности, связанные с магнитными монополями. Дело в том, что в этой системе используются два противоречивых определения магнитного заряда с различными единицами измерения — вебер (вб, Wb) и ампер-метр ($A \cdot m$, $A \cdot m$) — связанные между собой соотношением $g(\text{Wb}) = \mu_0 g(A \cdot m)$, где μ_0 — коэффициент, который достаточно строго обоснован в [10]; g — магнитный заряд уединенного монополя. Большинство физиков по традиции в магнетизме работают в СГС, а при переходе к СИ приходится выполнять перевод физических единиц и соответственно связанных с ними формул. Согласно рекомендациям из [11], в качестве единицы измерения примем ампер. Тогда теорему Гаусса можно представить в виде $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 g$.

Квант магнитного потока. В качестве возможного варианта эксперимента рассмотрим движение монополя g с постоянной скоростью v вдоль оси Oz сквозь круговой проводник радиусом R (рис. 1).

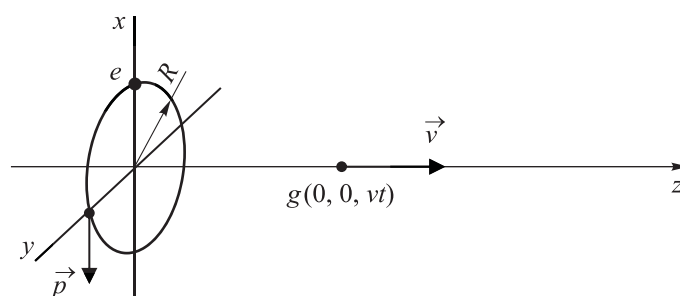


Рис. 1. Схема движения монополя сквозь кольцевой проводник

Подобный вариант рассмотрен в [12], однако расчет велся в СГС и при вычислениях были допущены некоторые неточности, поэтому здесь приведен более подробный и корректный расчет.

Модифицированное уравнение Максвелла [гл. 9.4, 11]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m,$$

где $\vec{j}_m = g\vec{v}\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)$ — плотность тока монополя.

Переходя к интегральному представлению, получаем

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} - \mu_0 g v \delta(z-vt) \int_S \delta(x)\delta(y) d\vec{S}.$$

Здесь L , S — длина окружности и площадь поперечного сечения контура. Тогда

$$E2\pi R = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} - \mu_0 g v \delta(z-vt) \int_S \delta(x)\delta(y) dx dy;$$

$$E = \frac{1}{2\pi R} \left(-\frac{d}{dt} \Psi - \mu_0 g v \delta(z-vt) \right).$$

Касательная сила изменяет импульс электрона, находящегося в кольце:

$$dp = dp_\tau = eEdt = \frac{e}{2\pi R} (-d\Psi - \mu_0 g v \delta(z-vt) dt).$$

Проинтегрируем это выражение по всему времени прохождения монополю осью Oz ($-\infty < t < \infty$):

$$p = \frac{e}{2\pi R} \left(-\Psi \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} + \mu_0 g \right) = \frac{e}{2\pi R} \mu_0 g.$$

При интегрировании учтены равенство потока нулю при достаточном удалении монополя от контура и свойства дельта-функции. В квазиклассическом приближении

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi R} n,$$

откуда $eg = (h/\mu_0)n$ — соотношение Паули в рационализованном виде. Проведя несложные преобразования и введя постоянную тонкой структуры, получаем выражение для минимального значения заряда монополя:

$$g = \frac{c}{2\alpha} e \text{ при } n=1.$$

Таким образом, прохождение монополя приводит к появлению тока в контуре и связанному с ним скачку потока магнитной индукции, который можно зафиксировать.

Отметим еще одно обстоятельство, которое не принято во внимание в [13]. При записи уравнений движения носителя заряда в контуре учитывалась сила электростатического взаимодействия, что возможно только в среде без электрического сопротивления. В таком случае контур может быть или сверхпроводящим, или хорошо проводящей средой. Отличие этих двух объектов обсуждается в настоящее время [14]. Однако при переходе от отдельных электронов к куперовским парам удваивается как масса, так и заряд носителей, что, очевидно, не влияет на результат.

Этот результат также получен на основании серии работ Д. Швингера [15–18]. Рассмотрена гипотетическая частица, обладающая электрическим и магнитным зарядами, а именно дион, и движение этой частицы по окружности вокруг неподвижной частицы. Учитывая, что комбинации остаются инвариантными при повороте системы координат на произвольный угол, и квантуя полученный момент импульса, можно получить указанное соотношение. Идея дионов достаточно широко обсуждалась, однако в [19, 20] показано, что гипотеза дионов как составных частей адронов не объясняет до конца их электрические и магнитные дипольные свойства.

Вихрь Абрикосова как поле двух монополей. Один из первых снимков вихрей Абрикосова в охлажденном до сверхпроводящего состояния свинце, легированном индием, представлен на рис. 2. Вихри визуализированы на электронном микроскопе за счет «прилипших» к ним частиц ферромагнетика кобальта [21].

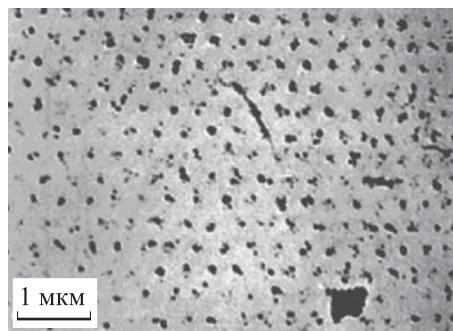


Рис. 2. Снимок вихря Абрикосова (поверхность сверхпроводника) второго рода

Рассмотрим следующую модель вихря. Представим пятна на рис. 2 как основание площадью S некоторой тонкой гибкой намагниченной нити (рис. 3). Введем дополнительное условие для вектора намагничивания: $MS = g = \text{const}$. Тогда выражение для скалярного магнитного потенциала будем искать в виде

$$d\psi = \frac{(d\vec{p}_m, \vec{r})}{4\pi r^3} = \frac{(\vec{M}dV, \vec{r})}{4\pi r^3} = \frac{(MSd\vec{l}, \vec{r})}{4\pi r^3} = \frac{(MSd\vec{l}, \vec{r})}{4\pi r^3} = \frac{g(\vec{r}, d\vec{l})}{4\pi r^3}.$$

Потенциал, создаваемый всей нитью, вычисляется интегрированием вдоль ее длины:

$$\psi = -\frac{g}{4\pi} \int_L \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \quad d\vec{l} = -\frac{g}{4\pi} \int_L \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{r} \right) dl = \frac{g}{4\pi r_1} - \frac{g}{4\pi r_2}.$$

Здесь r_1 — расстояние от монополя g до точки наблюдения; r_2 — расстояние от монополя до $-g$. Из последнего следует возможность существования монополя с противоположным знаком.

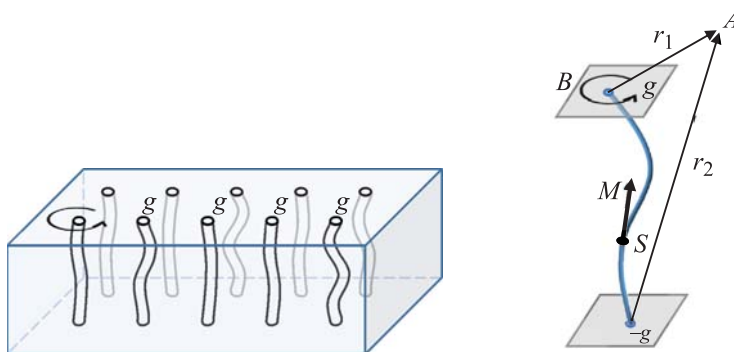


Рис. 3. Возможная связь вихря Абрикосова с монополями

Последнее утверждение обсуждалось в [9, 19] и не противоречит модифицированным уравнениям Максвелла. В пользу изложенной гипотезы свидетельствует еще одно обстоятельство. Вращение одной магнитосодержащей частицы вокруг другой рассмотрено в [18]. Это возможно лишь при разнополярности частиц.

Заключение. Начальное рассмотрение эквивалентности вихрей Абрикосова и поля, создаваемого магнитными трубками с монополями на конце, выглядит непротиворечиво. В этом случае учет коллективного влияния совокупности трубок приведет к магнитному полю сверхпроводника второго рода, квантование которого может подтвердить существование монополя. Современное состояние изучения монополя описано в [22].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Толмачев В.В. Квазиклассическое приближение в квантовой механике. М., Изд-во МГУ, 1980.
- [2] Мигдал А.Б., Крайнов В.П. Приближенные методы квантовой механики. М., Наука, 1966.
- [3] Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М., МЦНМО, 2000.
- [4] Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О потенциалах в электродинамике Лондонов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 2 (65), с. 42–50. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2016-2-42-50>

- [5] Жерновой А.И. Квантование магнитного потока, создаваемого наночастицей магнетита. *Научное приборостроение*, 2018, т. 28, № 2, с. 45–48.
- [6] Болотовский Б.М., Усачев Ю.Д. (ред.). Монополю Дирака. *Сб. статей*. М., Мир, 1970.
- [7] Коулмен С. Магнитный монополю пятьдесят лет спустя. *УФН*, 1984, т. 144, № 2, с. 277–340. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0144.198410d.0277>
- [8] Долгов А.Д. Магнитный монополю после юбилея. *УФН*, 1984, т. 144, № 2, с. 341–346. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0144.198410e.0341>
- [9] Vandewalle N., Dorbolo S. Magnetic ghosts and monopoles. *New J. Phys.*, 2014, vol. 16, no. 1, art. 013050. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/1/013050>
- [10] Dirac P.A.M. Pretty mathematics. *Int. J. Theor. Phys.*, 1982, vol. 21, no. 8-9, pp. 603–605. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02650229>
- [11] Алиев И.Н. Термодинамика и электродинамика сплошных сред. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018.
- [12] Алиев И.Н., Копылов И.С. Использование формализма монополей Дирака в некоторых задачах магнетизма. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 6 (63), с. 25–39. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2015-6-25-39>
- [13] Panat P.V. A new derivation of Dirac's magnetic monopole strength. *Eur. J. Phys.*, 2003, vol. 24, no. 2, pp. 111–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/24/2/351>
- [14] Самедова З.А. Вариационный метод в магнитоэлектродинамике хорошо проводящих сплошных сред. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022.
- [15] Schwinger J. Electric- and magnetic-charge renormalization. I. *Phys. Rev.*, 1966, vol. 151, iss. 4, pp. 1048–1054. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.151.1048>
- [16] Schwinger J. Magnetic charge and quantum field theory. *Phys. Rev.*, 1966, vol. 144, iss. 4, pp. 1087–1093. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.144.1087>
- [17] Schwinger J. Sources and magnetic charge. *Phys. Rev.*, 1968, vol. 173, iss. 5, pp. 1536–1544. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.173.1536>
- [18] Швингер Ю. Магнитная модель материи. *УФН*, 1971, т. 103, № 2, с. 355–365. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0103.197102f.0355>
- [19] Gomberoff L., Tolmachev V. Is parity violated in weak interaction? *Nuov. Cim. A*, 1971, vol. 3, no. 3, pp. 657–662. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02813566>
- [20] de Liano M., Tolmachev V.V. Multiple phases in a new statistical boson–fermion model of superconductivity. *Physica A*, 2003, vol. 317, iss. 3-4, pp. 546–564. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01348-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01348-1)
- [21] Milton K.A. Theoretical and experimental status of magnetic monopoles. *Rep. Prog. Phys.*, 2006, vol. 69, no. 6, pp. 1637–1711. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/69/6/R02>

[22] Essmann U., Träuble H. The direct observation of individual flux lines in type II superconductors. *Phys. Lett. A*, 1967, vol. 24, iss. 10, pp. 526–527.

DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(67\)90819-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(67)90819-5)

Алиев Исмаил Новруз оглы — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Самедова Зарифа Альшан кызы — ассистент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); старший преподаватель кафедры «Физика» РХТУ им. Д.И. Менделеева (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 9).

Лятифов Роман Эйнулла оглы — студент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Алиев И.Н., Самедова З.А., Лятифов Р.Э. Квазиклассическое квантовое обобщение уравнений Лондонов и гипотеза монополей. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 4 (109), с. 39–51.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-39-51>

SEMI-CLASSICAL QUANTUM GENERALIZATION OF THE LONDON EQUATIONS AND THE MONOPOLE HYPOTHESIS

I.N. Aliev¹

Z.A. Samedova^{1,2}

R.E. Lyatifov¹

samedova.z.a@muctr.ru

lyatifovrea@student.bmstu.ru

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

² Mendeleev University of Chemical Technology of Russia, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers the London equation semi-classical generalization leading to a connection between the Cooper pairs magnetic flux quantization and the electric charge discreteness. Using the Bohr — Sommerfeld quantization rule, a derivation of the magnetic flux quantization was made on the basis of the fluxoid uniqueness. The resulting quantization was applied to the magnetic monopoles hypothesis proposed by Dirac, which remains relevant due to the asymmetry present in the modern physics in describing electrical and magnetic properties of matter. On a fairly simple

Keywords

Cooper pairs, monopole, dyon, Abrikosov vortex

model of the possible experiment, an option of registering a monopole by a jump in the magnetic induction flux and the associated alteration in the circuit current were studied. The paper analyzed the problems of the monopole different measurement units and the results similar to those obtained on the basis of the Schwinger series of works, where he proceeded from considering introduction of a hypothetical particle with the electric and magnetic charges, i.e., the dyon. Possible explanation of the Abrikosov vortex is presented, it is based on vortex representation in the form of a magnetized thin thread through the magnetic tubes, at the ends of which monopoles of different charges (dipole) are positioned. Unlike most the works devoted to this problem, calculations were performed in the SI system. The monopole quantization conditions were derived

Received 19.07.2022

Accepted 12.09.2022

© Author(s), 2023

REFERENCES

- [1] Tolmachev V.V. *Kvaziklassicheskoe priblizhenie v kvantovoy mekhanike* [Quasi-classical approximation in quantum mechanics]. Moscow, MSU Publ., 1980.
- [2] Migdal A.B., Kraynov V.P. *Priblizhennyye metody kvantovoy mekhaniki* [Approximated methods of quantum mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1966.
- [3] Shmidt V.V. *Vvedenie v fiziku sverkhprovodnikov* [Introduction in physics of superconductors]. Moscow, MTsNMO Publ., 2000.
- [4] Aliev I.N., Melikyants D.G. On potentials in Londons' electrodynamics. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2016, no. 2 (65), pp. 42–50 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2016-2-42-50>
- [5] Zhernovoy A.I. Quantization of magnetic flow created by nanoparticle of magnetite. *Nauchnoe priborostroenie*, 2018, vol. 28, no. 2, pp. 45–48 (in Russ.).
- [6] Bolotovskiy B.M., Usachev Yu.D. (eds). *Monopol Diraka. Sb. statey* [Dirac's Monopole. Collection of articles]. Moscow, Mir Publ., 1970.
- [7] Coleman S. The magnetic monopole fifty years later. *UFN*, 1984, vol. 144, no. 2, pp. 277–340 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0144.198410d.0277>
- [8] Dolgov A.D. The magnetic monopole after its jubilee. *Sov. Phys. Usp.*, 1984, vol. 27, no. 10, pp. 786–789. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1984v027n10ABEH004137>
- [9] Vandewalle N., Dorbolo S. Magnetic ghosts and monopoles. *New J. Phys.*, 2014, vol. 16, no. 1, art. 013050. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/1/013050>
- [10] Dirac P.A.M. Pretty mathematics. *Int. J. Theor. Phys.*, 1982, vol. 21, no. 8-9, pp. 603–605. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02650229>
- [11] Aliev I.N. *Termodinamika i elektrodinamika sploshnykh sred* [Thermodynamics and electrodynamics of continuous medium]. Moscow, BMSTU Publ., 2018.

- [12] Aliev I.N., Kopylov I.S. Use of Dirac monopoles formalism in some magnetism problems. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2015, no. 6 (63), pp. 25–39 (in Russ.).
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2015-6-25-39>
- [13] Panat P.V. A new derivation of Dirac's magnetic monopole strength. *Eur. J. Phys.*, 2003, vol. 24, no. 2, pp. 111–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/24/2/351>
- [14] Samedova Z.A. Variatsionnyy metod v magnitoelektrodinamike khorosho provodyashchikh sploshnykh sred. Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk [The variational method in the magneto-electrodynamics of well-conducting continuum media. Abs. Cand. Sc. (Phys.-Math.) Diss.]. Moscow, BMSTU, 2022 (in Russ.).
- [15] Schwinger J. Electric- and magnetic-charge renormalization. *I. Phys. Rev.*, 1966, vol. 151, iss. 4, pp. 1048–1054. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.151.1048>
- [16] Schwinger J. Magnetic charge and quantum field theory. *Phys. Rev.*, 1966, vol. 144, iss. 4, pp. 1087–1093. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.144.1087>
- [17] Schwinger J. Sources and magnetic charge. *Phys. Rev.*, 1968, vol. 173, iss. 5, pp. 1536–1544. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.173.1536>
- [18] Schwinger J. A magnetic model of matter: a speculation probes deep within the structure of nuclear particles and predicts a new form of matter. *Science*, 1969, vol. 165, no. 3895, pp. 757–761. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.165.3895.757>
- [19] Gomberoff L., Tolmachev V. Is parity violated in weak interaction? *Nuov. Cim. A*, 1971, vol. 3, no. 3, pp. 657–662. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02813566>
- [20] de Liano M., Tolmachev V.V. Multiple phases in a new statistical boson–fermion model of superconductivity. *Physica A*, 2003, vol. 317, iss. 3-4, pp. 546–564. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01348-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01348-1)
- [21] Milton K.A. Theoretical and experimental status of magnetic monopoles. *Rep. Prog. Phys.*, 2006, vol. 69, no. 6, pp. 1637–1711.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/69/6/R02>
- [22] Essmann U., Träuble H. The direct observation of individual flux lines in type II superconductors. *Phys. Lett. A*, 1967, vol. 24, iss. 10, pp. 526–527.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(67\)90819-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(67)90819-5)

Aliev I.N. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Samedova Z.A. — Assist. Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Senior Lecturer, Department of Physics, Mendeleev University of Chemical Technology of Russia (Miusskaya ploshchad 9, Moscow, 125047 Russian Federation).

Lyatifov R.E. — Student, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Aliev I.N., Samedova Z.A., Lyatifov R.E. Semi-classical quantum generalization of the London equations and the monopole hypothesis. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 4 (109), pp. 39–51 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-39-51>