УДК 517.928; 517.3

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В. В. Юринский

Университет Бейра Интериор, Португалия
e-mail: yurinsky@ubi.pt

В настоящее время возрастает интерес к нетрадиционным моделям течений с использованием функций с переменными показателями. Изложены основные положения этого подхода, характерной чертой которого является нетрадиционная роль нормы (вместо нее используются интегралы— так называемые модуляры.

Ключевые слова: переменные показатели, нелинейные дифференциальные уравнения.

ON CERTAIN INEQUALITIES FOR FUNCTIONS WITH VARIABLE EXPONENTS

V.V. Yurinsky

Univsidade da Beira Interior, Portugal
e-mail: yurinsky@ubi.pt

There is a growing interest now in non-traditional flow models using functions with variable exponents. Basic statements of this approach are given, whose characteristic feature is the non-traditional role of a norm instead of which certain integrals-modulars are used.

Keywords: variable exponents, nonlinear differential equations.

Введение. Работа посвящена проблемам, которые возникают в теории дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих функции $u(x)^{p(x)}$ с переменными показателями.

Функции с переменными показателями интенсивно исследуются в последние десятилетия (см. [1, 2], недавно вышедшую книгу [3] и новаторскую статью [4]). Они оказались источником интересных и разнообразных математических задач.

Работы [1–4] содержат необходимые сведения о вычислениях с использованием норм функций с переменными показателями. Ниже приведены специфические оценки, которые встречаются, например, при эволюции решения нелинейного дифференциального уравнения, включающего функции с переменными показателями.

В работе приведены результаты, относящиеся в основном к неравенствам, интерес к которым связан с их потенциальными применениями. Они получены с использованием так называемых *модуляров*. Этот аппарат представляется более удобным, чем использование норм в соответствующих пространствах функций, свойства которых достаточно сложны.

Основное неравенство. В целях сокращения выкладок основные идеи подхода рассматриваются для достаточно регулярных функций.

В обозначении пространств Лебега и Соболева с переменными показателями использована нотация, принятая в [1, 2, 4].

Основной результат составляет оценка для так называемого *модуляра*, которая оказывается довольно удобным средством в некоторых вычислениях. В литературе обозначения этого объекта довольно разнообразны. Здесь принята следующая форма:

$$\langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \rangle = \int\limits_C \varphi^k \psi^{\mathcal{P}}.$$

(Упомянутая оценка и ее доказательство приведены ниже.) Она оказывается удобной, в частности, при рассмотрении временной эволюции решений уравнений, содержащих члены с переменными показателями.

Предполагается, что функции с переменными показателями определены на выпуклом множестве с гладкой границей.

Лемма 1. *Если переменный показатель $\mathcal{P}(x)$ удовлетворяет неравенству $q \le \mathcal{P}(x) \le r$ и $\varphi^{k/q}\psi \in L^{\mathcal{P}}(G)$, то*

$$\langle \varphi^k \psi^q \rangle \le A^{1+\delta(1-q/r)} \frac{\langle \varphi^k \rangle^{1-q/r}}{(1-q/r)^{1-q/r}} \frac{\langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \rangle^{q/r}}{(q/r)^{q/r}} \tag{1}$$

при условии, что параметры $A > 1$ и $\delta > 0$ допускают неравенство

$$(r/q - 1)\langle \varphi^k \rangle^{-1} \langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \rangle < A^{\delta}. \tag{2}$$

Доказательство леммы 1. Для фиксированного числа $t \in]0,1[$ и $x \in G$ неравенство Гельдера ведет к оценке

$$\varphi^k \psi^q = \left(t\varphi^k\right)^{(1-q/\mathcal{P})} \left(t^{-(\mathcal{P}/q-1)} \varphi^k \psi^{\mathcal{P}}\right)^{q/\mathcal{P}} \le t\varphi^k + t^{-(\mathcal{P}/q-1)} \varphi^k \psi^{\mathcal{P}}.$$

Это неравенство преобразуется с помощью параметров $A > 1$ и $\delta > 0$ в случае $t \in]0,1[$:

$$\left\langle t\varphi^k \right\rangle + \left\langle (1/t)^{(\mathcal{P}/q-1)} \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \right\rangle \le t \left\langle \varphi^k \right\rangle + (1/t)^{(r/q-1)} \left\langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \right\rangle \le$$
$$\le W(t) \equiv A^{1+\delta} t \left\langle \varphi^k \right\rangle + A t^{-(r/q-1)} \left\langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \right\rangle.$$

Отыщем теперь минимум функции $W(t)$ на $]0,1[$. Легко видеть, что

$$\frac{dW}{dt} = A^{1+\delta} \left\langle \varphi^k \right\rangle - \frac{(r/q-1)}{t^{r/q}} A \left\langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \right\rangle,$$

так что минимум W достигается при

$$t_*^{r/q} = (r/q-1) A^{-\delta} \langle \varphi^k \rangle^{-1} \langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \rangle.$$

Если $(r/q-1)A^{-\delta}\langle \varphi^k \rangle^{-1} \langle \varphi^k \psi^{\mathcal{P}} \rangle < 1$, то точка t_* принадлежит интервалу $]0,1[$. Это другая форма условия (2). Оценка (1) обеспечивается соответствующим значением W. $\square$

Представляется уместным привести здесь же формулировку более простого неравенства, не содержащего производных. Его доказательство сходно с выводом леммы 1. Область, где рассматриваются функции с переменными показателями, как и ранее, предполагается достаточно регулярной.

Лемма 2. *Если показатели* $\mathcal{Q}(x)$ *и* $\mathcal{R}(x)$ *удовлетворяют неравенству*

$$\mathcal{Q}_+/\mathcal{R}_- \equiv \mathcal{Q}_+/\mathcal{R}_{z-} \leq 1-\kappa,$$

где $\mathcal{Q}_+$ *и* $\mathcal{R}_-$ *— наименьшее и наибольшее значения соответствующих показателей, а величина* $\kappa \in]0,1[$ *постоянна, то*

$$\left\langle \varphi^{\mathcal{Q}_+} \right\rangle \leq B^{1+(1-\kappa)\nu} \left(1/\kappa\right)\langle 1\rangle)^{\kappa} \left((1-\kappa)^{-1}\langle\varphi^{\mathcal{R}}\rangle\right)^{1-\kappa}$$

при условии, что $\nu \in]0,1[$, $B > 1$ *и выполняется неравенство*

$$B^{\nu} \geq (1/\kappa - 1)^{-1}\langle 1\rangle/\langle\varphi^{\mathcal{R}}\rangle.$$

Выводы. Получены новые результаты, относящиеся к исследованию свойств функций с переменными показателями. Основным из них является лемма 1; обе леммы могут быть полезны в приложениях.

Приведенные оценки могут найти применение в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Работа выполнена при поддержке Фонда науки и технологий FCT Португалии в рамках исследований Математического центра Университета Бейра Интериор “Модели физических процессов сплошной среды” (*Centro de Matemática, Universidade da Beira Interior, subproject “Models of Physical Processes in Continua”*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antontsev S., Shmarev S. Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness and localization properties of solution // Nonlinear Anal. – 2006. – Vol. 65. – P. 728–761.
2. Antontsev S., Shmarev S. Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions. Part. 1. Handbook Diff. Equations – Stationary PDF. V. 3. – P. 1–100. Elsevier, 2006.
3. Hasto P., Diening L., Harjulehto P., Ruzicha M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Volume 2017 of Lecture Notes in Mathematics. – Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.
4. Kovacik O., Rakosnik Z., Rakosnik J. On spaces $l^{p(x)}$ and $w^{w,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41, no. 116. – P. 592–618.

Статья поступила в редакцию 30.05.2012

Вадим Владимирович Юринский — д-р физ.-мат. наук, профессор университета Бейра Интериор, Португалия. Специалист в области теории вероятностей, математической статистики и краевых задач со случайными элементами.

V.V. Yurinskiy — D. Sc. (Phys.-Math.), professor of the University of Beira Interior, Portugal. Specializes in probability theory, mathematical statistics, and boundary problems with random elements.