УДК 681.5:517 DOI: 10.18698/1812-3368-2023-4-18-38

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ АККЕРМАНА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЕКТОРНЫМ ВХОДОМ

А.В. Лапин[1] avlapin@bmstu.ru
Н.Е. Зубов[1, 2] nezubov@bmstu.ru
А.В. Пролетарский[1] pav@bmstu.ru

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
[2] ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва», Королёв, Московская обл., Российская Федерация

Аннотация

Получена компактная аналитическая формула, определяющая полное множество решений задачи модального управления по состоянию для широкого класса многомерных динамических систем с векторным входом, у которых число состояний нацело делится на число управляющих входов, а индекс управляемости равен частному от этого деления. Формула является обобщением на системы с векторным входом формулы Аккермана, применяемой к многомерным системам со скалярным входом. В основу получения обобщенной формулы Аккермана положены оригинальные понятия обобщенной канонической формы Люенбергера и операции блочного транспонирования матриц. Для наиболее удобного расчета регулятора исходная система с векторным входом приводится к обобщенной канонической форме Люенбергера с помощью двух последовательных преобразований подобия. Доказана лемма, демонстрирующая компактный аналитический вид матрицы обратного преобразования. Эквивалентность переходов позволяет получить полное счетно-бесконечное параметризованное множество решений рассматриваемой задачи модального управления. Его параметризация обеспечивается за счет выбора блочных коэффициентов матричного полинома, определитель которого соответствует заданному скалярному характеристическому полиному. В случаях, когда матричный полином, участвующий в параметризации, не раскладывается на множители, обобщенная формула

Ключевые слова

Модальное управление по состоянию, регулятор, индекс управляемости, преобразование подобия, формула Басса — Гура, формула Аккермана, многоуровневая декомпозиция

Аккермана содержит решения задачи модального управления, которые не могут быть получены с использованием существующего декомпозиционного метода. Представлены примеры, демонстрирующие как пригодность предлагаемой формулы к аналитическому конструированию модальных регуляторов по состоянию для систем с векторным входом, так и ее преимущества по сравнению с декомпозиционным методом

Поступила 02.08.2022
Принята 13.02.2023

Введение. Одними из наиболее известных явных расчетных формул, применяемых для модального синтеза регуляторов и наблюдателей линейных динамических систем в пространстве состояний, являются формулы Басса — Гура [1] и Аккермана [2]. Эти формулы применяют к многомерным системам со скалярным входом в задаче со следующей постановкой [3].

Задана полностью управляемая многомерная система со скалярным входом

$$\sigma \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \tag{1}$$

где σ — оператор дифференцирования по времени (для непрерывных систем) или сдвига на шаг вперед (для дискретных систем); $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ — вектор состояния; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ — матрица состояния; $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ — матрица управления (вектор-столбец); $u \in \mathbb{R}$ — скалярный управляющий вход. Здесь и далее $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, а запись вида $\mathbb{R}^{n \times m}$ соответствует множеству матриц размерностью $m \times n$ с действительными коэффициентами.

Требуется определить матрицу регулятора $\mathbf{k}^{\mathrm{т}}$ по состоянию (вектор-строку), обеспечивающую матрице замкнутой системы заданный характеристический полином

$$\operatorname{poly}\left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{т}}\right) = \phi^*(\lambda), \tag{2}$$

где

$$\phi^*(\lambda) = \lambda^k + p_{k-1}^*\lambda^{k-1} + \ldots + p_1^*\lambda^1 + p_0^*\lambda^0, \ \left\{p_0^*, \ p_1^*, \ \ldots, \ p_{k-1}^*\right\} \subset \mathbb{R}. \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. Формула Аккермана. *Решение задачи модального управления по состоянию (2) многомерной линейной динамической системой со скалярным входом (1) единственно и определяется по формуле Аккермана*

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1 \right] \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{A}, \mathbf{b}\right) \phi^{*}\left(\mathbf{A}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left[\mathbf{b} \,\vdots\, \mathbf{Ab} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} \right]$ *— матрица управляемости Калмана.*

Основным преимуществом формулы Аккермана (4) является ее явный аналитический вид, что позволяет по известным параметрам системы (1) и заданному расположению полюсов, выраженному в коэффициентах полинома (2), рассчитать искомую матрицу регулятора. В отличие от формулы Басса — Гура [1] здесь не требуется дополнительно находить характеристический полином матрицы состояния $\mathbf{A}$ и строить на его основе теплицеву матрицу [4].

Для формулы Басса — Гура [1], изначально применявшейся только для многомерных систем со скалярным входом, авторами настоящей работы предложено обобщение, распространяемое на широкий класс многомерных систем с векторным входом [5], у которых число состояний нацело делится на число управляющих входов, а индекс управляемости [6] совпадает с частным от этого деления. Рассмотрено обобщение формулы Аккермана на тот же класс многомерных систем с векторным входом. Существующие обобщения формулы Аккермана на многомерные системы с векторным входом [7, 8] не могут быть представлены в явном аналитическом виде [7] или не определяют полного множества решений исследуемой задачи [8], поэтому предлагаемое исследование актуально. Сформулирована следующая постановка задачи.

Постановка задачи. Задана полностью управляемая многомерная система с векторным входом

$$\sigma\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \tag{5}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — вектор состояния; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица состояния; $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица управления; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ — векторный управляющий вход; размерности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ таковы, что $n/m = k$ (индекс управляемости системы).

Требуется определить множество матриц регулятора по состоянию $\mathbf{K}$, обеспечивающих матрице замкнутой системы заданный характеристический полином (3):

$$\operatorname{poly}\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right) = \phi^{*}\left(\lambda\right). \tag{6}$$

Решение задач модального синтеза существенно упрощается, если предварительно с использованием преобразования подобия привести исходную многомерную систему к удобной канонической форме. Для системы со скалярным входом (1) это каноническая форма Люенбергера [9], которую можно обобщить и на исследуемый класс систем с векторным входом (5).

Обобщение канонической формы Люенбергера. В системе (5) число состояний n кратно числу управляющих входов m. Это позволяет, оперируя вместо скалярных коэффициентов в матрицах (1) блоками размерностью $m \times m$ в матрицах (5), полагать задачу (5), (6) блочным аналогом задачи (1), (2). Особенность состоит в том, что при работе с блочными матрицами используется операция блочного транспонирования.

Определение 1. *Операцией $p \times q$-блочного транспонирования (обозначается верхним индексом $\boldsymbol{T}_{p\times q}$) матрицы, составленной из блоков $\mathbf{M}_{i,j} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ $(i=1,\dots,n,\ \ j=1,\dots,m)$, называется перемещение блоков указанной размерности в соответствующие транспонированию позиции (из столбцов в строки) без перемещения элементов внутри блоков:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1} & \mathbf{M}_{1,2} & \dots & \mathbf{M}_{1,m} \\ \mathbf{M}_{2,1} & \mathbf{M}_{2,2} & \dots & \mathbf{M}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{n,1} & \mathbf{M}_{n,2} & \dots & \mathbf{M}_{n,m} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}_{p\times q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1} & \mathbf{M}_{2,1} & \dots & \mathbf{M}_{n,1} \\ \mathbf{M}_{1,2} & \mathbf{M}_{2,2} & \dots & \mathbf{M}_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{1,m} & \mathbf{M}_{2,m} & \dots & \mathbf{M}_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Свойства блочного транспонирования применительно к соответствующим блокам аналогичны свойствам обычного транспонирования [10].

Определение 2. *Для системы с векторным входом (5) обобщенной канонической формой Люенбергера называется полученная в результате преобразования подобия $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ система*

$$\sigma\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m\times m} & \dots & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times m} & \dots & \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}_0 & -\mathbf{P}_1 & \dots & -\mathbf{P}_{k-2} & -\mathbf{P}_{k-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times m} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \mathbf{u}, \qquad (7)$$

где

$$\{\mathbf{P}_0,\ \mathbf{P}_1,\ \dots,\ \mathbf{P}_{k-1}\} \subset \mathbb{R}^{m\times m},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{k-1} \end{bmatrix} = -\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{B}, \quad \mathbf{U} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\right].$$

Здесь и далее записи вида $\mathbf{0}_{n\times m}$ и $\mathbf{I}_n$ соответствуют нулевой матрице размерностью $n\times m$ и единичной матрице порядка n.

Показано [4], что матрица состояния $\tilde{\mathbf{A}}$ в обобщенной канонической форме Люенбергера (7) и ее характеристический полином рассчитываются из соотношений

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\right)^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}, \tag{8}$$

$$\operatorname{poly}\mathbf{A} = \operatorname{poly}\tilde{\mathbf{A}} = \det\left(\lambda^k\mathbf{I}_m + \lambda^{k-1}\mathbf{P}_{k-1} + \ldots + \lambda\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0\right), \tag{9}$$

а матрица перехода от системы (5) к канонической форме (7) —

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{U}}^{-1}, \tag{10}$$

где $\tilde{\mathbf{U}} = \left[\tilde{\mathbf{B}} \mid \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \mid \ldots \mid \tilde{\mathbf{A}}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}\right]$ — неособенная матрица, составленная из первых k $m\times m$-блочных столбцов матрицы управляемости системы (7) и обладающая свойством $m\times m$-блочной симметрии

$$\tilde{\mathbf{U}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} = \tilde{\mathbf{U}}. \tag{11}$$

Согласно свойствам преобразования подобия [10], вектор $\mathbf{P}$, составленный из $m\times m$-блочных коэффициентов характеристического полинома (9), инвариантен к преобразованию

$$\mathbf{P} = -\underbrace{\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{U}}\right)}_{\mathbf{U}}^{-1}\underbrace{\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}\right)}_{\mathbf{A}^k}\underbrace{\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}\right)}_{\mathbf{B}} = -\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^k\tilde{\mathbf{B}}. \tag{12}$$

Ввиду того, что после решения задачи модального синтеза для обобщенной канонической формы Люенбергера (7) выполняется обратный переход к исходной системе (5), представляет интерес следующая лемма.

Лемма 1. О матрице обратного перехода от обобщенной канонической формы Люенбергера. *Пусть для системы (5) выполнен переход к обобщенной канонической форме Люенбергера (7):*

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}.$$

Тогда матрица обратного перехода $\mathbf{T}^{-1}$ *составляется из первых* k $m\times m$*-блочных строк матрицы наблюдаемости для пары матриц* $\mathbf{A}$ *и* $\tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}$.

◄ Запишем матрицу, составленную из первых k $m\times m$-блочных строк матрицы наблюдаемости для пары матриц $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}$:

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}\\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\\ \vdots\\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^{k-1}\end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица перехода к обобщенной канонической форме Люенбергера имеет вид (10), для доказательства равенства $\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{N}$ необходимо и достаточно доказать тождество

$$\mathbf{NU}=\tilde{\mathbf{U}}. \tag{13}$$

Рассчитаем левую часть тождества (13) с учетом соотношения (8):

$$\mathbf{NU}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU}\\ \vdots\\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{U}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\tilde{\mathbf{A}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\\ \vdots\\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\left(\tilde{\mathbf{A}}^{k-1}\right)^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{U}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}. \tag{14}$$

Отсюда, согласно равенству (11), следует справедливость тождества (13). ►

Далее решим эквивалентную задаче (6) задачу модального управления по состоянию для пары матриц $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ в обобщенной канонической форме Люенбергера (7). Сравним множества матриц регулятора по состоянию $\tilde{\mathbf{K}}$, полученные различными аналитическими методами: с использованием многоуровневой декомпозиции [11] и без нее (с помощью обобщенной формулы Басса — Гура) [4].

Решение с использованием многоуровневой декомпозиции [11]. Число уровней декомпозиции (включая нулевой уровень $\tilde{\mathbf{A}}_0=\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}_0=\tilde{\mathbf{B}}$) равно $n/m=k$.

Декомпозиция выполняется по формулам [11]:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{i+1}=\tilde{\mathbf{B}}_i^L\tilde{\mathbf{A}}_i\tilde{\mathbf{B}}_i^{L\mathrm{T}},\ \ \tilde{\mathbf{B}}_{i+1}=\tilde{\mathbf{B}}_i^L\tilde{\mathbf{A}}_i\tilde{\mathbf{B}}_i,\ \ i=0,\ldots,k-2,$$

где $\tilde{\mathbf{B}}_i^L=\left[\mathbf{I}_{(k-1-i)m}\,\middle|\,\mathbf{0}_{(k-1-i)m\times m}\right]$ — полуортогональные левые аннуляторы [12]. Таким образом, матрица состояния на каждом новом (вышестоящем) уровне получается из матрицы состояния на предыдущем уровне путем удаления нижней $m\times m$-блочной строки и правого $m\times m$-блочного столбца, а матрица управления — из соответствующей матрицы управления удалением верхнего $m\times m$ блока:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{0}_{(k-1-i)m\times m} & \mathbf{I}_{(k-1-i)m} \\ \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times(k-1-i)m} \end{array}\right], \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(k-1-i)m\times m} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, k-1. \quad (15)$$

Назначим по уровням $i = \overrightarrow{0, \ldots, k-1}$ матрицы $\mathbf{\Phi}_i \in \mathbb{C}^{m\times m}$ с желаемыми спектрами (множествами собственных значений) [13], которые в совокупности обеспечивают заданный характеристический полином (3):

$$\operatorname{poly}\left(\left(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{\Phi}_0\right)\left(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{\Phi}_1\right)\ldots\left(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{\Phi}_{k-1}\right)\right) = \phi^*\left(\lambda\right). \quad (16)$$

Здесь и далее запись вида $\mathbb{C}^{n\times m}$ соответствует множеству матриц размерностью $m\times n$ с комплексными коэффициентами. Рассчитаем матрицы регуляторов $\tilde{\mathbf{K}}_i$ на указанных уровнях по формулам [11]:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k-1} = \tilde{\mathbf{B}}_{k-1}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{k-1} - \mathbf{\Phi}_{k-1}\tilde{\mathbf{B}}_{k-1}^{-1} = -\mathbf{\Phi}_{k-1},$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = \tilde{\mathbf{B}}_i^{-}\tilde{\mathbf{A}}_i - \mathbf{\Phi}_i\tilde{\mathbf{B}}_i^{-}, \quad i = k-2,\ k-3, \ldots, 0,$$

где $\tilde{\mathbf{B}}_i^{-} = \tilde{\mathbf{B}}_i^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{K}}_{i+1}\tilde{\mathbf{B}}_i^{L} = \left[\begin{array}{c:c} \tilde{\mathbf{K}}_{i+1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right]$. Таким образом,

$$\begin{gathered} \tilde{\mathbf{K}}_i = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{P}_{i,0}^* & \mathbf{P}_{i,1}^* & \ldots & \mathbf{P}_{i,k-i-1}^* \end{array}\right], \quad i = k-1,\ k-2, \ldots, 1, \\ \tilde{\mathbf{K}}_0 = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{P}_{0,0}^* - \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_{0,1}^* - \mathbf{P}_1 & \ldots & \mathbf{P}_{0,k-1}^* - \mathbf{P}_{k-1} \end{array}\right], \end{gathered} \quad (17)$$

где $\mathbf{P}_{i,j}^*$ $(i = \overrightarrow{0, \ldots, k-1},\ j = \overrightarrow{0, \ldots, k-i-1})$ — коэффициенты матричных полиномов

$$\begin{gathered} \left(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{\Phi}_i\right)\left(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{\Phi}_{i+1}\right)\cdots\left(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{\Phi}_{k-1}\right) = \\ = \lambda^{k-i}\mathbf{I}_m + \lambda^{k-i-1}\mathbf{P}_{i,k-i-1}^* + \ldots + \lambda\mathbf{P}_{i,1}^* + \mathbf{P}_{i,0}^*. \end{gathered}$$

Решение с использованием обобщенной формулы Басса — Гура [4]. Представим искомую матрицу регулятора по состоянию для пары матриц $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ в блочном виде:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \tilde{\mathbf{K}}_{1,1} & \tilde{\mathbf{K}}_{1,2} & \ldots & \tilde{\mathbf{K}}_{1,k} \end{array}\right], \quad \left\{\tilde{\mathbf{K}}_{1,1},\ \tilde{\mathbf{K}}_{1,2}, \ldots,\ \tilde{\mathbf{K}}_{1,k}\right\} \subset \mathbb{R}^{m\times m}. \quad (18)$$

Матрица замкнутой системы (7), (18)

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m\times m} & \ldots & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times m} & \ldots & \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}_0 - \tilde{\mathbf{K}}_{1,1} & -\mathbf{P}_1 - \tilde{\mathbf{K}}_{1,2} & \ldots & -\mathbf{P}_{k-2} - \tilde{\mathbf{K}}_{1,k-1} & -\mathbf{P}_{k-1} - \tilde{\mathbf{K}}_{1,k} \end{array}\right]$$

принадлежит тому же классу блочных матриц, что и матрица состояния $\tilde{\mathbf{A}}$ (аналог сопровождающей матрицы характеристического полинома [9]). Поэтому ее характеристический полином записывается по аналогии с полиномом (9):

$$\operatorname{poly}\left(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\right) =$$
$$= \det\left(\lambda^k \mathbf{I}_m + \lambda^{k-1}\left(\mathbf{P}_{k-1} + \tilde{\mathbf{K}}_{1,k}\right) + \ldots + \lambda\left(\mathbf{P}_1 + \tilde{\mathbf{K}}_{1,2}\right) + \left(\mathbf{P}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{1,1}\right)\right). \quad (19)$$

Назначим блочный вектор

$$\mathbf{P}^{*\boldsymbol{T}_{m\times m}} = \left[\mathbf{P}_0^* \,\vdots\, \mathbf{P}_1^* \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{P}_{k-1}^*\right], \ \left\{\mathbf{P}_0^*,\ \mathbf{P}_1^*, \ldots,\ \mathbf{P}_{k-1}^*\right\} \subset \mathbb{C}^{m\times m},$$

коэффициенты которого обеспечивают заданный характеристический полином (3):

$$\det\left(\lambda^k \mathbf{P}_k^* + \lambda^{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^* + \ldots + \lambda\mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_0^*\right) = \phi^*(\lambda), \ \ \mathbf{P}_k^* = \mathbf{I}_m. \quad (20)$$

Приравняв эти коэффициенты к соответствующим коэффициентам матричного полинома (19), получим требуемое значение матрицы регулятора по состоянию (18):

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^{*\boldsymbol{T}_{m\times m}} - \mathbf{P}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} = \left[\mathbf{P}_0^* - \mathbf{P}_0 \,\vdots\, \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{P}_{k-1}^* - \mathbf{P}_{k-1}\right]. \quad (21)$$

Поскольку в методе расчета все переходы эквивалентны, формула (21) определяет полное множество решений задачи модального управления по состоянию системой (5) в обобщенной канонической форме Люенбергера (7).

Обобщение формулы Аккермана. Обратный переход от регулятора $\tilde{\mathbf{K}}$ (21) для обобщенной канонической формы Люенбергера (7) к регулятору $\mathbf{K}$ для исходной системы (5) выполняется по обобщенной формуле Басса — Гура [4]:

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1} = \left(\mathbf{P}^{*\boldsymbol{T}_{m\times m}} - \mathbf{P}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}}\right)\mathbf{T}^{-1}. \quad (22)$$

При использовании формулы (22) необходимо дополнительно рассчитывать блочный аналог характеристического полинома матрицы состояния $\mathbf{A}$ (блочный вектор $\mathbf{P}$) и строить блочный аналог теплицевой матрицы [5] для формирования матрицы обратного перехода $\mathbf{T}^{-1}$.

Следующая теорема позволяет представить формулу (22) в явном аналитическом виде (зависящей только от матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и полинома ϕ^*), без построения дополнительных матриц, кроме матрицы управляемости.

Теорема 2. Обобщенная формула Аккермана. *Полное множество решений задачи модального управления по состоянию (6) многомерной линейной динамической системой с векторным входом (5) определяется обобщенной формулой Аккермана*

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^{k} \left(\mathbf{P}_i^* \left[\mathbf{0}_{m\times m} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{0}_{m\times m} \,\vdots\, \mathbf{I}_m \right] \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{A}, \mathbf{B} \right) \mathbf{A}^i \right), \tag{23}$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \left[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \right]$, *а* $m \times m$*-блочные коэффициенты* $\mathbf{P}_i^*$ *удовлетворяют равенству (20).*

◄ Рассмотрим обобщенную формулу Басса — Гура (22). В силу леммы 1 матрица обратного перехода в ней равна

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Подставив это значение в расчетную формулу (22), получим равенство

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{P}^{*\boldsymbol{T}_{m\times m}} - \mathbf{P}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{P}^{*\boldsymbol{T}_{m\times m}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} - \mathbf{P}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{N}.$$

Рассчитаем второе слагаемое в этом равенстве, используя (8), (12) и (14):

$$-\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{N} = \underbrace{\left(\tilde{\mathbf{U}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^k \tilde{\mathbf{B}} \right)}_{\mathbf{P}}{}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \underbrace{\tilde{\mathbf{U}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1}}_{\mathbf{N}} =$$

$$= \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \underbrace{\left(\tilde{\mathbf{A}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \right)^k}_{\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} = \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}^k.$$

Таким образом, искомая матрица регулятора по состоянию имеет вид

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^{k} \left(\mathbf{P}_i^* \tilde{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{T}_{m\times m}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}^i \right),$$

откуда после подстановки значения матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$ из записи (7) следует формула (23). ►

Если $m = 1$, то обобщенная формула (23) переходит в формулу Аккермана (4).

Сравнение решений с использованием декомпозиции и без нее. Принципиальное отличие решения (21) от решения (17), полученного с использованием декомпозиционного метода, состоит в следующем. При расчете по обобщенной формуле Аккермана для обеспечения заданного характеристического полинома (3) назначается полином (20) с коэффициентами $\mathbf{P}_j^*$ $(j = 0,\ 1, \ldots,\ k-1)$, который не обязательно должен раскладываться на матричные множители, как это сделано в полиноме (16) с коэффициентами $\mathbf{P}_{0,j}^*$.

Следовательно, множество матриц регулятора (21) может оказаться шире, чем аналогичное множество (17). Расширение происходит за счет тех решений, когда полином (20) не раскладывается на матричные множители.

Если в задаче требуется, чтобы матрица регулятора, обеспечивающего заданный характеристический полином (3), имела еще и заданный вид [14, 15], то необходимое решение найти проще за счет назначения готового полинома (20), чем подбором матричных множителей в разложении (16), если последнее существует.

Приведем примеры описанных случаев, демонстрирующих преимущества обобщенной формулы Аккермана перед декомпозиционным методом для рассматриваемого класса многомерных систем с векторным входом (5).

Примеры матричных полиномов и применения обобщенной формулы Аккермана. Рассмотрим примеры, когда назначаемый матричный полином $\lambda^2 \mathbf{I}_m + \lambda \mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_0^*$ $(k = 2)$, обеспечивающий заданный скалярный характеристический полином (20)

$$\det\left(\lambda^2 \mathbf{I}_m + \lambda \mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_0^*\right) = \phi^*(\lambda), \tag{24}$$

раскладывается или не раскладывается на матричные множители вида (16), т. е. примеры разрешимости или неразрешимости системы уравнений

$$\begin{aligned} -\mathbf{\Phi}_0 - \mathbf{\Phi}_1 &= \mathbf{P}_1^*, \\ \mathbf{\Phi}_0 \mathbf{\Phi}_1 &= \mathbf{P}_0^* \end{aligned} \tag{25}$$

относительно матриц $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{\Phi}_1$ размерностью $m \times m$.

Пример 1. Заданы $km = 4,\ m = 2,\ \phi^*(\lambda) = \left(\lambda - \lambda^*\right)^4,\ \kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Назначены 2 × 2-блочные коэффициенты

$$\mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c} -2\lambda^* & 0 \\ 0 & -2\lambda^* \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c} \left(\lambda^*\right)^2 & \kappa \\ 0 & \left(\lambda^*\right)^2 \end{array}\right].$$

В этом случае обеспечивается заданный характеристический полином (24):

$$\det\left(\lambda^2 \mathbf{I}_2 + \lambda \mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_0^*\right) = \det \left[\begin{array}{c|c} \left(\lambda - \lambda^*\right)^2 & \kappa \\ 0 & \left(\lambda - \lambda^*\right)^2 \end{array}\right] = \phi^*(\lambda),$$

но система уравнений (25) неразрешима относительно матриц $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{\Phi}_1$.

Пример 2. Заданы $km = 4,\ m = 2,\ \phi^*(\lambda) = \left(\lambda - \lambda_x^*\right)^2 \left(\lambda - \lambda_y^*\right)^2$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Назначены 2 × 2-блочные коэффициенты

$$\mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c} -2\lambda_x^* & \kappa \\ 0 & -2\lambda_y^* \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c} \left(\lambda_x^*\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\lambda_y^*\right)^2 \end{array}\right],$$

которые обеспечивают заданный характеристический полином (24):

$$\det\left(\lambda^2 \mathbf{I}_2 + \lambda \mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_0^*\right) = \det \left[\begin{array}{c|c} \left(\lambda - \lambda_x^*\right)^2 & \kappa\lambda \\ 0 & \left(\lambda - \lambda_y^*\right)^2 \end{array}\right] = \phi^*(\lambda).$$

Система уравнений (25) разрешима относительно матриц $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{\Phi}_1$. Одно из двух возможных решений этой системы имеет относительно простой вид (собственные значения располагаются на главной диагонали):

$$\mathbf{\Phi}_0 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_x^* & -\dfrac{\kappa\lambda_y^*}{\lambda_x^* - \lambda_y^*} \\ 0 & \lambda_y^* \end{array}\right], \quad \mathbf{\Phi}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_x^* & \dfrac{\kappa\lambda_x^*}{\lambda_x^* - \lambda_y^*} \\ 0 & \lambda_y^* \end{array}\right],$$

$$\operatorname{poly} \mathbf{\Phi}_0 = \operatorname{poly} \mathbf{\Phi}_1 = \left(\lambda - \lambda_x^*\right)\left(\lambda - \lambda_y^*\right).$$

Пример 3. Заданы $km = 6,\ \ m = 3,\ \ \phi^*(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^6,\ \{\kappa_{1,2}, \kappa_{2,3}, \kappa_{3,1}\} \subset \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Назначены варианты 3×3-блочных коэффициентов:

$$\text{а)}\ \ \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right],\ \ \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & \kappa_{1,2} & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & \kappa_{2,3} \\ 0 & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{б)}\ \ \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right],\ \ \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & \kappa_{2,3} \\ \kappa_{3,1} & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{в)}\ \ \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right],\ \ \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & \kappa_{1,2} & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & 0 \\ \kappa_{3,1} & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{г)}\ \ \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & \kappa_{2,3} \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right],\ \ \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & \kappa_{1,2} & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{д)}\ \ \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ \kappa_{3,1} & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right],\ \ \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & \kappa_{2,3} \\ 0 & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{е)}\ \ \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & \kappa_{1,2} & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right],\ \ \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & 0 \\ \kappa_{3,1} & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right].$$

Во всех вариантах обеспечивается заданный характеристический полином (24), но система уравнений (25) неразрешима относительно матриц $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{\Phi}_1$.

Пример 4. Заданы $km = 6,\ \ m = 3,\ \ \phi^*(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^6,\ \{\kappa_{1,2},\ \kappa_{2,3},\ \kappa_{3,1}\} \subset \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Назначены варианты 3×3-блочных коэффициентов:

$$\text{а)}\ \ \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right],\ \ \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & \kappa_{1,2} & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & 0 \\ 0 & \kappa_{2,3} & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{б)}\quad \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & 0 & \kappa_{3,1} \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & \kappa_{2,3} \\ 0 & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{в)}\quad \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & 0 & 0 \\ \kappa_{1,2} & \lambda^*\lambda^* & 0 \\ \kappa_{3,1} & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{г)}\quad \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & \kappa_{2,3} & -2\lambda^* \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & \kappa_{1,2} & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{д)}\quad \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & \kappa_{3,1} \\ 0 & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & \kappa_{2,3} \\ 0 & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right];$$

$$\text{е)}\quad \mathbf{P}_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c} -2\lambda^* & 0 & 0 \\ \kappa_{1,2} & -2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^* \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^*\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^*\lambda^* & 0 \\ \kappa_{3,1} & 0 & \lambda^*\lambda^* \end{array}\right].$$

Во всех вариантах обеспечивается заданный характеристический полином (24).

Система уравнений (25) разрешима относительно матриц $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{\Phi}_1$. Однако ее решения не столь очевидны, как в примере 2 (собственные значения не располагаются на главной диагонали). Например, для варианта б) одно из наиболее простых решений системы уравнений (25) имеет вид

$$\mathbf{\Phi}_0 = \left[\begin{array}{c|c|c} 2\lambda^* & -\kappa_{3,1}\lambda^*/\kappa_{2,3} & -\kappa_{3,1}/\lambda^* \\ \kappa_{2,3}\lambda^*/\kappa_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{array}\right],$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \kappa_{3,1}\lambda^*/\kappa_{2,3} & \kappa_{3,1}/\lambda^* \\ -\kappa_{2,3}\lambda^*/\kappa_{3,1} & 2\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{array}\right],$$

$$\operatorname{poly}\mathbf{\Phi}_0 = \operatorname{poly}\mathbf{\Phi}_1 = \left(\lambda - \lambda^*\right)^3.$$

Рассмотрим пример применения обобщенной формулы Аккермана (23), демонстрирующий ее преимущества относительно декомпозиционного метода.

Пример 5. Заданы [16]:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{5,2} & a_{5,3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b_{4,1} & 0 & 0\\ 0 & b_{5,2} & 0\\ 0 & 0 & b_{6,3} \end{array}\right],\quad \phi^*(\lambda)=\prod_{i=1}^{6}(\lambda-\lambda_i).$$

Коэффициенты $a_{4,1}$, $a_{4,2}$, $a_{5,2}$, $a_{5,3}$, $a_{6,3}$, $b_{4,1}$, $b_{5,2}$, $b_{6,3}$ ненулевые.

Требуется построить регулятор по состоянию с матрицей вида

$$\mathbf{K}=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} k_{1,1} & 0 & 0 & k_{1,4} & 0 & 0\\ 0 & k_{2,2} & 0 & 0 & k_{2,5} & 0\\ 0 & 0 & k_{3,3} & 0 & 0 & k_{3,6} \end{array}\right], \tag{26}$$

обеспечивающий характеристический полином $\operatorname{poly}(\mathbf{A}-\mathbf{BK})=\phi^*(\lambda)$.

Рассчитаем регулятор по обобщенной формуле Аккермана (23):

$$\mathbf{K}=\underbrace{\left[\tilde{\mathbf{P}}_0^*\mathbf{J} \,\vdots\, \mathbf{0}_{3\times 3}\right]}_{\tilde{\mathbf{P}}_0^*\mathbf{E}}+\underbrace{\left[\mathbf{0}_{3\times 3} \,\vdots\, \tilde{\mathbf{P}}_1^*\mathbf{J}\right]}_{\tilde{\mathbf{P}}_1^*\mathbf{EA}}+\underbrace{\left[\mathbf{JA}_{2,1} \,\vdots\, \mathbf{0}_{3\times 3}\right]}_{\mathbf{EA}^2}=\left[\mathbf{JA}_{2,1}+\tilde{\mathbf{P}}_0^*\mathbf{J} \,\vdots\, \tilde{\mathbf{P}}_1^*\mathbf{J}\right],$$

где блоки $\tilde{\mathbf{P}}_0^*$ и $\tilde{\mathbf{P}}_1^*$ таковы, что $\det\left(\lambda^2\mathbf{I}_3+\lambda\tilde{\mathbf{P}}_1^*+\tilde{\mathbf{P}}_0^*\right)=\phi^*(\lambda)$ и

$$\mathbf{U}=\left[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}\right]=\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{J}^{-1}\\ \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{array}\right],\quad \mathbf{E}=\left[\mathbf{0}_{3\times 3} \,\vdots\, \mathbf{I}_3\right]\mathbf{U}^{-1}=\left[\mathbf{J} \,\vdots\, \mathbf{0}_{3\times 3}\right],$$

$$\mathbf{J}=\left[\begin{array}{c:c:c} 1/b_{4,1} & 0 & 0\\ 0 & 1/b_{5,2} & 0\\ 0 & 0 & 1/b_{6,3} \end{array}\right],\quad \mathbf{A}_{2,1}=\left[\begin{array}{c:c:c} a_{4,1} & a_{4,2} & 0\\ 0 & a_{5,2} & a_{5,3}\\ 0 & 0 & a_{6,3} \end{array}\right].$$

Упростим полученное выражение, выполнив преобразование подобия над блоками $\mathbf{P}_0^*$ и $\mathbf{P}_1^*$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\left[\,\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{P}_0^* \,\middle|\, \mathbf{P}_1^*\,\right], \tag{27}$$

где $\tilde{\mathbf{P}}_0^* = \mathbf{J}\mathbf{P}_0^*\mathbf{J}^{-1}$; $\tilde{\mathbf{P}}_1^* = \mathbf{J}\mathbf{P}_1^*\mathbf{J}^{-1}$.

Для того чтобы матрица регулятора (27) имела вид (26), назначим

$$\mathbf{P}_1^* = -\left[\begin{array}{c:c:c} \lambda_1+\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2+\lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3+\lambda_6 \end{array}\right], \quad \mathbf{P}_0^* = \left[\begin{array}{c:c:c} \lambda_1\lambda_4 & -a_{4,2} & 0 \\ 0 & \lambda_2\lambda_5 & -a_{5,3} \\ 0 & 0 & \lambda_3\lambda_6 \end{array}\right]. \tag{28}$$

Тогда получим искомое решение

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} \dfrac{a_{4,1}+\lambda_4\lambda_1}{b_{4,1}} & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda_4+\lambda_1}{b_{4,1}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{5,2}+\lambda_5\lambda_2}{b_{5,2}} & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda_5+\lambda_2}{b_{5,2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_{6,3}+\lambda_6\lambda_3}{b_{6,3}} & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda_6+\lambda_3}{b_{6,3}} \end{array}\right].$$

Действительно, оно имеет вид (26) и обеспечивает заданный характеристический полином (24):

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{I}_3 + \lambda\mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_0^*\right) =$$

$$= \det\left[\begin{array}{c:c:c} (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_4) & -a_{4,2} & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_5) & -a_{5,3} \\ 0 & 0 & (\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_6) \end{array}\right] = \phi^*(\lambda).$$

Исследуем, как решалась бы задача с использованием двухуровневой декомпозиции. Сформируем для матриц (28) систему уравнений (25) и рассмотрим, в каких случаях она разрешима относительно матриц $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{\Phi}_1$.

Если среди желаемых полюсов λ_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ 6)$ хотя бы один полюс отличен от остальных, система уравнений вида (25) с матрицами (28) разрешима. Однако решения получаются нетривиальные в том смысле, что путем непосредственного назначения матриц с желаемыми спектрами $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{\Phi}_1$ (в диагональном, блочно-диагональном, треугольном виде и т. п.) без решения системы матричных уравнений (25) синтезировать регулятор конкретного типа (26) оказывается затруднительно. Приведем для наглядности одно из решений системы уравнений (25) с матрицами (28) для случая $\lambda_4 = \lambda_1$, $\lambda_5 = \lambda_2$, $\lambda_6 = \lambda_3$:

$$\mathbf{\Phi}_0 = \left[\begin{array}{c:c:c} \lambda_1 & \dfrac{a_{4,2}\left(2\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3\right)}{2\left(\lambda_1-\lambda_3\right)^2} & -\dfrac{a_{4,2}a_{5,3}}{2\left(\lambda_1-\lambda_3\right)^2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)} \\ 0 & \dfrac{3\lambda_2-\lambda_3}{2} & \dfrac{a_{53}}{2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)} \\ 0 & -\dfrac{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^3}{2a_{5,3}} & \dfrac{\lambda_2+\lambda_3}{2} \end{array}\right],$$

$$\operatorname{poly}\mathbf{\Phi}_0 = \left(\lambda-\lambda_1\right)\left(\lambda-\lambda_2\right)^2;$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = \left[\begin{array}{c:c:c} \lambda_1 & -\dfrac{a_{4,2}\left(2\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3\right)}{2\left(\lambda_1-\lambda_3\right)^2} & \dfrac{a_{4,2}a_{5,3}}{2\left(\lambda_1-\lambda_3\right)^2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)} \\ 0 & \dfrac{\lambda_2+\lambda_3}{2} & -\dfrac{a_{5,3}}{2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)} \\ 0 & \dfrac{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^3}{2a_{5,3}} & \dfrac{3\lambda_3-\lambda_2}{2} \end{array}\right],$$

$$\operatorname{poly}\mathbf{\Phi}_1 = \left(\lambda-\lambda_1\right)\left(\lambda-\lambda_3\right)^2.$$

Если все желаемые полюса равны между собой, т. е. $\lambda_6 = \lambda_5 = \lambda_4 = = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, то система уравнений (25)

$$\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 = 2\lambda_1\mathbf{I}_3,$$

$$\mathbf{\Phi}_0\mathbf{\Phi}_1 = \left[\begin{array}{c:c:c} \lambda_1^2 & -a_{4,2} & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & -a_{5,3} \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 \end{array}\right]$$

неразрешима, а регулятор в форме (26) не может быть построен декомпозиционным методом.

Заключение. На основе опубликованного авторами обобщения алгоритма Басса — Гура получено блочно-матричное обобщение известной формулы Аккермана, определяющее полное множество решений задачи модального управления по состоянию для широкого класса многомерных систем с векторным входом, у которых размерность пространства состояний кратна числу управляющих входов. Формула имеет явный аналитический вид и оперирует только с параметрами системы и заданным расположением полюсов. При этом не требуется строить дополнительные матричные конструкции. Параллельно та же задача модального управления решена с использованием существующего декомпозиционного метода. Приведенные примеры демонстрируют, что новая обобщенная формула Аккермана позволяет расширить множество решений, полученное на основе многоуровневой декомпозиции, и за счет новых решений дополнительно обеспечивать модальным регуляторам заданную матричную структуру.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bass R.W., Gura I. High order system design *via* state-space considerations. *Proc. Joint Automatic Control Conf.*, 1965, vol. 3, pp. 311–318.

[2] Ackermann J. Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. *Automatisierungstechnik*, 1972, vol. 20, iss. 1-2, pp. 297–300.
DOI: https://doi.org/10.1524/auto.1972.20.112.297

[3] Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Лапин А.В. и др. Аналитическая формула вычисления регулятора для линейной SIMO-системы. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2020, № 1, с. 1–11.

[4] Hasan M., Namin A., Negre C. Toeplitz matrix approach for binary field multiplication using quadrinomials. *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. VLSI Syst.*, 2012, vol. 20, iss. 3, pp. 449–458. DOI: https://doi.org/10.1109/TVLSI.2011.2106524

[5] Lapin A.V., Zubov N.E. Generalization of Bass — Gura formula for linear dynamic systems with vector control. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences,* 2020, no. 2 (89), pp. 41–64.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64

[6] Tian G., Xiaoli L., Shuguang Z., et al. An algorithm to determine the index of structural controllability for network system. *ICISCE*, 2016, pp. 819–823.
DOI: https://doi.org/10.1109/ICISCE.2016.179

[7] Nordstrom K., Norlander H. On the multi input pole placement control problem. *Proc. 36th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1997, vol. 5, pp. 4288–4293.
DOI: https://doi.org/10.1109/CDC.1997.649511

[8] Zubov N.E., Vorob'eva E.A., Mikrin E.A., et al. Synthesis of stabilizing spacecraft control based on generalized Ackermann's formula. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2011, vol. 50, no. 1, pp. 93–103. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711010199

[9] Luenberger D.G. Canonical form for linear multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. 12, iss. 3, pp. 290–293.
DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098584

[10] Gantmacher F.R. The theory of matrices. Chelsea, 2000.

[11] Лапин А.В., Зубов Н.Е. Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и по выходу. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, № 1.
DOI: https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950

[12] Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A. Synthesis of decoupling laws for controlling the angular motion of landing module with solid-fuel landing engine minimizing the transient time. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2013, vol. 52, no. 3, pp. 480–490. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230713030179

[13] Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н. О связи модальной управляемости по выходу динамической MIMO-системы и вида матриц с желаемыми спектрами. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2021, № 2, с. 1–12.

[14] Lapin A.V., Zubov N.E. Parametric synthesis of modal control with output feedback for descent module attitude stabilization. *RusAutoCon*, 2019. DOI: https://doi.org/10.1109/RusAutoCon.2019.8867744

[15] Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N., et al. A robust control algorithm of a descent vehicle angular motion in the Earth's atmosphere. *Appl. Sci.*, 2022, vol. 12, iss. 2, art. 731. DOI: https://doi.org/10.3390/app12020731

[16] Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. Analytical synthesis of a modal controller by output vector for attitude control of a descent module during its descent in the Earth's atmosphere. *Russ. Aeronaut.,* 2019, vol. 62, no. 3, pp. 401–416. DOI: https://doi.org/10.3103/S1068799819030073

Лапин Алексей Владимирович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана, декан факультета РКТ МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); профессор аспирантуры ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4А).

Пролетарский Андрей Викторович — д-р техн. наук, профессор, декан факультета «Информатика и системы управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Лапин А.В., Зубов Н.Е., Пролетарский А.В. Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 4 (109), с. 18–38. DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-18-38

GENERALIZATION OF ACKERMANN FORMULA FOR A CERTAIN CLASS OF MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEMS WITH VECTOR INPUT

A.V. Lapin[1] avlapin@bmstu.ru
N.E. Zubov[1, 2] nezubov@bmstu.ru
A.V. Proletarskii[1] pav@bmstu.ru

[1] **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**
[2] **S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia PJSC, Korolev, Moscow Region, Russian Federation**

Abstract

A compact analytical formula is obtained that determines the entire set of solutions of the modal control problem for a wide class of multidimensional dynamical systems with vector input, where the number of states is divisible by the number of control inputs, and the controllability index is equal to the quotient of this division. This formula generalizes to systems with the vector input the Ackermann formula applied to multidimensional systems with scalar input. The basis to obtaining the generalized Ackermann formula lies in the original concepts of the Luenberger generalized canonical form and operations of the matrices block transposition. For the most convenient calculation of controller, the original system with vector input is reduced to the generalized Luenberger canonical form using the two successive similarity transformations. A lemma is proved that demonstrates the compact analytical form of the inverse transformation matrix. Transition equivalence makes it possible to obtain a complete countably infinite parametrized set of solutions to the modal control problem under consideration. Its parametrization is provided by selecting block coefficients of the matrix polynomial, which determinant corresponds to the given scalar characteristic polynomial. In cases, where the matrix polynomial involved in parametrization is not reduced to the multipliers, the generalized Ackermann formula contains solutions to the modal control problem that could not be obtained using the existing decomposition method. Examples are presented demonstrating both suitability of the proposed formula for analytical synthesis

Keywords

Modal control by state, controller, controllability index, similarity transformation, Bass — Gura formula, Ackermann formula, multilevel decomposition

of modal controllers by state in systems with vector input and its advantages in comparison with the decomposition method

Received 02.08.2022
Accepted 13.02.2023

REFERENCES

[1] Bass R.W., Gura I. High order system design *via* state-space considerations. *Proc. Joint Automatic Control Conf.*, 1965, vol. 3, pp. 311–318.

[2] Ackermann J. Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. *Automatisierungstechnik*, 1972, vol. 20, iss. 1-2, pp. 297–300.
DOI: https://doi.org/10.1524/auto.1972.20.112.297

[3] Mikrin E.A., Zubov N.E., Lapin A.V., et al. Analytical formula of calculating a controller for linear SIMO-system. *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya* [Differential Equations and Control Processes], 2020, no. 1, pp. 1–11 (in Russ.).

[4] Hasan M., Namin A., Negre C. Toeplitz matrix approach for binary field multiplication using quadrinomials. *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. VLSI Syst.*, 2012, vol. 20, iss. 3, pp. 449–458. DOI: https://doi.org/10.1109/TVLSI.2011.2106524

[5] Lapin A.V., Zubov N.E. Generalization of Bass — Gura formula for linear dynamic systems with vector control. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 2 (89), pp. 41–64.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64

[6] Tian G., Xiaoli L., Shuguang Z., et al. An algorithm to determine the index of structural controllability for network system. *ICISCE*, 2016, pp. 819–823.
DOI: https://doi.org/10.1109/ICISCE.2016.179

[7] Nordstrom K., Norlander H. On the multi input pole placement control problem. *Proc. 36th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1997, vol. 5, pp. 4288–4293.
DOI: https://doi.org/10.1109/CDC.1997.649511

[8] Zubov N.E., Vorob'eva E.A., Mikrin E.A., et al. Synthesis of stabilizing spacecraft control based on generalized Ackermann's formula. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2011, vol. 50, no. 1, pp. 93–103. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711010199

[9] Luenberger D.G. Canonical form for linear multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. 12, iss. 3, pp. 290–293.
DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098584

[10] Gantmacher F.R. The theory of matrices. Chelsea, 2000.

[11] Lapin A.V., Zubov N.E. MATLAB based implementation of analytic algorithms of modal control with state-vector feedback and output-vector feedback. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2020, no. 1 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950

[12] Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A. Synthesis of decoupling laws for controlling the angular motion of landing module with solid-fuel landing engine minimizing the transient time. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2013, vol. 52, no. 3, pp. 480–490.
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230713030179

[13] Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. On relation between modal controllability of dynamic MIMO-system by output and a type of matrices with desirable spectra. *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya* [Differential Equations and Control Processes], 2021, no. 2, pp. 1–12 (in Russ.).

[14] Lapin A.V., Zubov N.E. Parametric synthesis of modal control with output feedback for descent module attitude stabilization. *RusAutoCon*, 2019.
DOI: https://doi.org/10.1109/RusAutoCon.2019.8867744

[15] Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N., et al. A robust control algorithm of a descent vehicle angular motion in the Earth's atmosphere. *Appl. Sci.*, 2022, vol. 12, iss. 2, art. 731. DOI: https://doi.org/10.3390/app12020731

[16] Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. Analytical synthesis of a modal controller by output vector for attitude control of a descent module during its descent in the Earth's atmosphere. *Russ. Aeronaut.*, 2019, vol. 62, no. 3, pp. 401–416.
DOI: https://doi.org/10.3103/S1068799819030073

Lapin A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Zubov N.E. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Dean of the Faculty of Rocket and Space Technology, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Professor, Post-Graduate Education, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia PJSC (Lenina ul. 4A, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation).

Proletarskii A.V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Dean of the Faculty of Informatics and Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Lapin A.V., Zubov N.E., Proletarskii A.V. Generalization of Ackermann formula for a certain class of multidimensional dynamic systems with vector input. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 4 (109), pp. 18–38 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-18-38