УДК 534.1 DOI: 10.18698/1812-3368-2023-2-83-97

ЭВОЛЮЦИЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ОБОБЩЕННОМ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, И ВОЗМОЖНОСТЬ ИХ ТРАНСФОРМАЦИИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

В.И. Ерофеев[1] erof.vi@yandex.ru
А.Н. Морозов[1, 2] amor@bmstu.ru
И.С. Царев[1] tsarev_ivan97@mail.ru

[1] ИПМ РАН — филиал ФИЦ ИПФ РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрено динамическое поведение путевой структуры, которая представляет собой совершающую изгибные колебания балку, лежащую на упругом основании. При этом выбирается обобщенная модель основания, содержащая два независимых коэффициента постели — жесткости на деформации растяжения (сжатия) и сдвига. Такая модель учитывает распределительную способность грунта, т. е. его свойство оседать не только под нагруженной областью и фундаментом, но и вблизи него. Кроме того, для описания нелинейных свойств основания жесткости полагаются зависящими от поперечного смещения срединной линии балки и его градиента. Результаты анализа волновых процессов в балке показали, что поскольку изгибные волны обладают сильной дисперсией, при наличии слабой нелинейности решение поставленной задачи близко к решению линейной задачи и его можно представить в виде набора квазигармоник. С использованием критерия Лайтхилла изучены условия проявления модуляционной неустойчивости (самомодуляции) квазигармонических волн, приводящей к их пространственной локализации и разбиению на отдельные волновые пакеты. Найдены аналитические выражения, описывающие формы волновых пакетов. Проанализированы за-

Ключевые слова

Модуляционная неустойчивость, изгибная волна, балка, обобщенное упругое основание

висимости, связывающие амплитуду и ширину волнового пакета с жесткостью упругого основания

Поступила 15.08.2022
Принята 08.09.2022

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-19-00613)

Введение. Сжатие нелинейных волн различной физической природы может происходить как в поперечном (самофокусировка [1]), так и в продольном (самомодуляция [2, 3]) направлениях по отношению к направлению их распространения.

Квазигармоническая волна, распространяющаяся в нелинейной диспергирующей среде, вследствие модуляционной неустойчивости может разбиться на отдельные волновые пакеты. Наличие такой неустойчивости определяется из уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau}-\frac{1}{2}\frac{dv_{\text{гр}}}{dk}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}=\sigma\left|A\right|^2 A \tag{1}$$

по критерию Лайтхилла [4, 5]:

$$\frac{dv_{\text{гр}}}{dk}\sigma<0. \tag{2}$$

Здесь A — комплексная амплитуда квазигармонической волны; $\left|A\right|^2 = AA^*$, A^* — комплексно-сопряженная величина; $v_{\text{гр}}$ — групповая скорость; k — волновое число; σ — коэффициент, характеризующий нелинейность среды.

Математическая модель. Рассмотрим динамическое поведение балки Бернулли — Эйлера, лежащей на упругом основании. При этом выбираем обобщенную модель упругого основания, включающую в себя два независимых коэффициента постели: 1) H_1 — жесткость основания на деформации растяжения–сжатия; 2) H_2 — жесткость основания на деформации сдвига. В отличие от классической модели упругого основания (модель Винклера) обобщенная модель учитывает распределительную способность грунта, т. е. его свойство оседать не только под нагруженной областью и фундаментом, но и вблизи него.

В результате сопоставления в [6] известных обобщенных моделей упругого основания [7–14] показано, что речь идет об одной модели. Таким образом, обобщенную модель упругого основания справедливо назвать моделью Вигхарта — Кармана — Филоненко — Бородича — Пастернака — Власова — Леонтьева — Рейсснера — Хетеньи. Эту обобщенную модель называют двухкоэффициентной [11], двуххарактеристической [15, 16], двухпараметрической [17–20], но в основном — моделью Пастернака (см., например, [21–25]).

Обобщение классической модели Винклера на случай учета нелинейных свойств упругого основания проведено в [26–30].

Для учета нелинейных свойств обобщенного упругого основания будем полагать жесткости H_1, H_2 зависящими от поперечного смещения срединной линии балки $\left(w(x,t)\right)$ и его градиента $\left(\partial w(x,t)/\partial x\right)$:

$$H_1 = h_1 + \tilde{h}_1 w^2,\ H_2 = h_2 + \tilde{h}_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \tag{3}$$

где $h_1,\ h_2$ и $\tilde{h}_1,\ \tilde{h}_2$ — постоянные величины. С учетом (3) динамика балки, лежащей на обобщенном нелинейно-упругом основании, будет описываться уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = c_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6\tilde{h}_2}{\rho F}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \omega_0^2 w - \frac{2\tilde{h}_1}{\rho F} w^3. \tag{4}$$

Здесь слагаемые, входящие в правую часть уравнения, описывают влияние упругого основания на колебания балки; $\alpha = \sqrt{EI/(\rho F)}$, E — модуль Юнга, I — осевой момент инерции, ρF — погонная плотность; $c_{\parallel} = \sqrt{h_2/(\rho F)}$; $\omega_0 = \sqrt{h_1/(\rho F)}$ — наинизшая частота возбуждаемых в балке волн.

Вывод эволюционного уравнения и его анализ. В линейном приближении $\left(\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = 0\right)$ решение уравнения (4) представляется в виде набора гармоник, частоты ω и волновые числа k которых связаны дисперсионным соотношением $\omega = \pm\sqrt{c_{\parallel}^2 k^2 + \alpha^2 k^4 + \omega_0^2}$.

Изгибные волны обладают дисперсией, поскольку их фазовая скорость $v_{\text{ф}} = \omega/k \neq \text{const}$ и различные гармоники распространяются с разными скоростями. Поэтому при наличии слабой нелинейности решение уравнения (4) близко к решению линейной задачи и его можно представить в виде набора квазигармоник. Кроме того, для систем с кубической нелинейностью эффект самовоздействия обычно преобладает над эффектом генерации высших гармоник и последним можно пренебречь [5]. Это позволяет находить решение уравнения (4) в виде одной гармоники с медленно меняющимися в пространстве и времени амплитудой и фазой:

$$w(x,t) = A(\varepsilon x, \varepsilon t)e^{i(\omega t - kx)} + A^*(\varepsilon x, \varepsilon t)e^{-i(\omega t - kx)},$$

где комплексная амплитуда A, частота ω и волновое число k удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial A}{\partial x}\Big/(kA)\sim\frac{\partial A}{\partial t}\Big/(\omega A)\sim\varepsilon\ll 1.$$

Используя метод усреднения по «быстрым» переменным [5], от (4) перейдем к укороченному уравнению для огибающей квазигармонической волны:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+v_{\text{гр}}\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\varepsilon i}{2\omega}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\left(6\alpha^2k^2+c_{\|}^2\right)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]=\frac{3i\left(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2k^4\right)}{\rho F\omega\varepsilon}\left|A\right|^2 A. \quad (5)$$

Здесь групповая скорость изгибной волны задается соотношением

$$v_{\text{гр}}=\frac{\left(c_{\|}^2+2\alpha^2k^2\right)k}{\sqrt{c_{\|}^2k^2+\alpha^2k^4+\omega_0^2}}. \quad (6)$$

В системе координат, движущейся с групповой скоростью $\xi=x-v_{\text{гр}}t$, $\tau=\varepsilon t$, эволюция огибающей будет описываться нелинейным уравнением Шредингера (1).

При переходе от (5) к (1) оставлены слагаемые $\sim\varepsilon$. Принято, что $\left(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2k^4\right)/\left(\rho F\omega\right)\sim\varepsilon^2$, $dv_{\text{гр}}/dk$ определено путем дифференцирования соотношения (6):

$$\frac{dv_{\text{гр}}}{dk}=\frac{6\alpha^2k^2+c_{\|}^2-v_{\text{гр}}^2}{\omega},$$

а коэффициент, характеризующий нелинейность упругого основания, будет определяться формулой

$$\sigma=-\frac{3\left(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2k^4\right)}{\rho F\omega\varepsilon^2}.$$

Согласно критерию Лайтхилла (2), модуляционная неустойчивость изгибных волн будет проявляться, если

$$\frac{\left(6\alpha^2k^2+c_{\|}^2-v_{\text{гр}}^2\right)\left[-3\left(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2k^4\right)\right]}{\omega^2\rho F\varepsilon^2}<0. \quad (7)$$

Знаменатель дроби (7) всегда положителен. Первый сомножитель в числителе обретает отрицательное значение при $v_{\text{гр}}^2>6\alpha^2k^2+c_{\|}^2$. Однако анализ этого неравенства показывает, что оно невыполнимо (во всем диапазоне изменения волновых чисел, т. е. при $0 \le k < \infty$). Следовательно, критерий Лайтхилла сводится к выполнению неравенства

$$-3\left(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 k^4\right) < 0. \tag{8}$$

В соответствии с (8) наличие или отсутствие модуляционной неустойчивости определяется характером нелинейности упругого основания. Самомодуляция изгибных волн проявляется при жесткой нелинейности (по терминологии Рейснера — «упрочняющееся основание» [31]), когда $\tilde{h}_{1,2} > 0$ и не проявляется при мягкой нелинейности («размягченное» основание [31]), когда $\tilde{h}_{1,2} < 0$. Эффект самомодуляции связан с усилением боковых компонент в спектре модулированной волны, в которые перекачивается энергия из его центральной части (рис. 1).

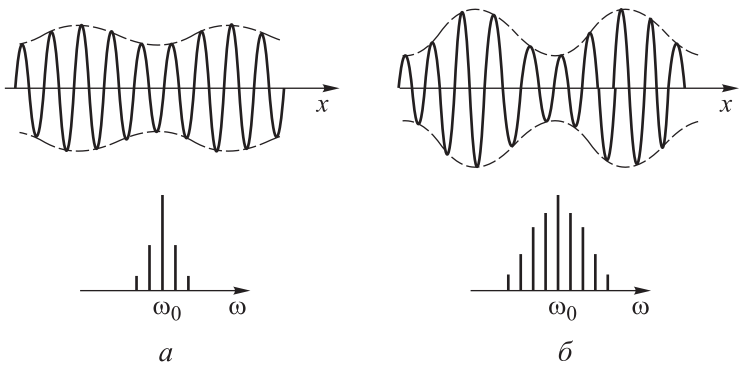

Рис. 1. Модуляционная неустойчивость квазигармонической волны (*а*) и эволюция спектра (*б*)

Стационарные волны огибающих. При введении вместо комплексной амплитуды A действительной амплитуды a и фазы φ: $A = a\exp\left(i\varphi\right)$ уравнение Шредингера (1) запишется в виде системы

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{a^2}{2}\right) - \frac{dv_{\text{гр}}}{dk}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{a^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) = 0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{dv_{\text{гр}}}{dk}\frac{\partial^2 a/\partial \xi^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{dv_{\text{гр}}}{dk}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \sigma a^2 = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Для того чтобы определить, как будут выглядеть волновые пакеты, на которые в результате модуляционной неустойчивости разбивается изгибная квазигармоническая волна, проанализируем стационарные волны огибающих.

Решение системы (9) будем искать в виде $a=a(\eta)$, $\varphi=\varphi(\eta)$, где $\eta= =\xi-V\tau$, $V=\text{const}$ — скорость стационарной волны (заранее неизвестная). В этом случае фаза волны будет выражаться через амплитуду соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\frac{1}{(dv_{\text{гр}}/dk)}(V-2D),$$

где D — константа интегрирования.

Изменение амплитуды будет описываться уравнением ангармонического осциллятора:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\eta^2}+m_1a+m_2a^3+m_3a^{-3}=0, \qquad (10)$$

где

$$m_1=\frac{1}{2}\frac{V^2}{(dv_{\text{гр}}/dk)}; \quad m_2=\frac{\sigma}{(dv_{\text{гр}}/dk)}; \quad m_3=-\frac{D^2}{(dv_{\text{гр}}/dk)^2}.$$

В уравнении (10) коэффициент m_1 всегда положителен, коэффициент m_3 всегда отрицателен. Знак коэффициента m_2 определяется нелинейной характеристикой упругого основания, на котором лежит балка.

Области модуляционной неустойчивости, согласно критерию Лайтхилла (2), соответствует значение $m_2<0$.

Далее ограничимся рассмотрением волн, у которых наличествует амплитудная модуляция, но отсутствует фазовая. В этом случае $D=0$, и изменение амплитуды будет описываться уравнением Дуффинга [5]:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\eta^2}+m_1a+m_2a^3=0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) имеет первый интеграл:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2=E-\frac{m_1}{2}a^2-\frac{m_2}{4}a^4.$$

Функция потенциальной энергии

$$f(a)=\frac{m_1}{2}a^2+\frac{m_2}{4}a^4$$

имеет локальный максимум $f_{\max}=-m_1^2/(4m_2)$ в точках $a=\pm\sqrt{-m_1/m_2}$ и локальный минимум $f_{\min}=0$ при $a=0$ (рис. 2, *а*). Поэтому на фазовой плоскости $(a, da/d\eta)$ точка (0, 0) является устойчивым положением

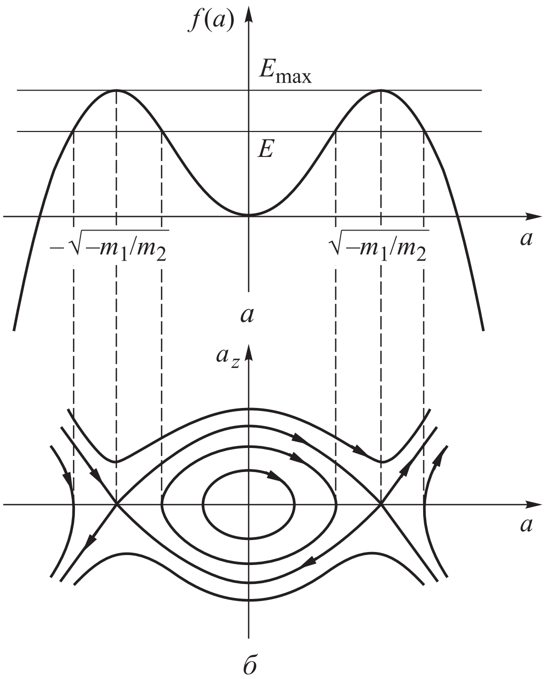

Рис. 2. Потенциальная энергия (*а*) и фазовый портрет (*б*) уравнения Дуффинга

равновесия типа «центр», а точки $\left(\pm\sqrt{-m_1/m_2}, 0\right)$ — неустойчивым положением равновесия типа «седло».

Фазовый портрет уравнения (11) приведен на рис. 2, *б*. Он показывает, что в среде могут существовать как периодические стационарные волны огибающих (им соответствуют движения по фазовым траекториям вокруг положения равновесия), так и уединенная стационарная волна огибающей (движение по сепаратрисе, идущей из «седла» в «седло»).

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом

$$a = a_0 \operatorname{sn}\left(K\eta, s\right),$$

где a_0 — амплитуда волны; $K = \sqrt{\left(2m_1 + m_2 a_0^2\right)/2}$ — волновое число; $s^2 = -\left(m_2 a_0^2\right)/\left(2m_1 + m_2 a_0^2\right)$ — модуль эллиптической функции $\left(0 \le s^2 \le 1\right)$. Амплитуда волны и волновое число через параметры исходной задачи выражаются соотношениями:

$$a_0 = \pm V \sqrt{\frac{s^2}{-2\left(dv_{\text{гр}}/dk\right)\sigma\left(1+s^2\right)}}, \tag{12}$$

$$K=\frac{V}{dv_{\text{гр}}/dk}\sqrt{\frac{1}{2\left(1+s^2\right)}}. \tag{13}$$

Форма волновых пакетов, на которые разбивается квазигармоническая волна, промодулированная по периодическому закону, изображена на рис. 3.

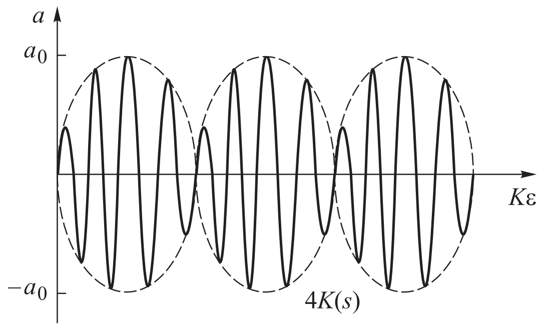

Рис. 3. Периодическая модулированная волна

Форму перепада (кинка) имеет уединенная стационарная волна, которая описывается гиперболическим тангенсом:

$$a\left(\eta\right)=a_0\ \text{th}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right),$$

где

$$a_0=\pm V\sqrt{\frac{1}{-2\left(dv_{\text{гр}}/dk\right)\sigma}} \tag{14}$$

— амплитуда волны;

$$\Delta=2\frac{dv_{\text{гр}}}{dk}/V \tag{15}$$

— ее ширина.

Форма волновых пакетов, на которые разбивается квазигармоническая волна, промодулированная по закону кинка, показана на рис. 4.

Из (13) и (15) следует, что ширина волновых пакетов (см. рис. 2, 3) увеличивается с возрастанием линейной жесткости упругого основания $\Delta \sim 1/K \sim \sqrt{h_1/\left(\rho F\right)}$.

Из (12) и (14) следует, что амплитуда волновых пакетов (см. рис. 2, 3) определяется нелинейной жесткостью упругого основания и уменьшается с ее увеличением

$$a_0 \sim \frac{1}{\sqrt{-3\left(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2k^4\right)}}.$$

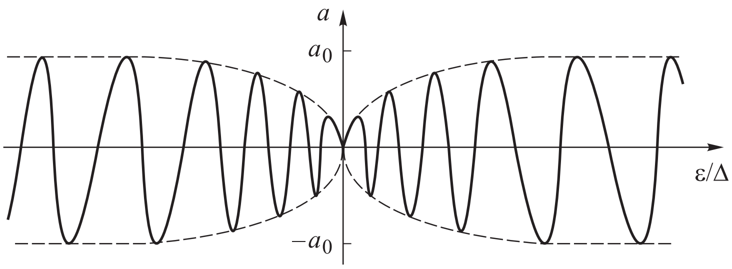

Рис. 4. Уединенная модулированная волна

Заключение. Проведенное исследование показало, что если моделируемая балкой путевая структура лежит на обобщенном упругом основании, обладающем жесткой нелинейностью, то возможна самомодуляция распространяющихся в ней квазигармонических изгибных волн, приводящая к их пространственной локализации и разбиению на отдельные волновые пакеты. Ширина волновых пакетов увеличивается с возрастанием линейной жесткости упругого основания. Амплитуда волновых пакетов определяется нелинейной жесткостью упругого основания и уменьшается с ее увеличением.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Власов С.Н., Таланов В.И. Самофокусировка волн. Нижний Новгород, ИПФ РАН, 1997.

[2] Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М., ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[3] Zakharov V.E., Ostrovsky L.A. Modulation instability: the beginning. *Physica D*, 2009, vol. 238, iss. 5, pp. 540–548. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.12.002

[4] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.

[5] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

[6] Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой. *Прикладная математика и механика*, 2021, т. 85, № 2, с. 193–209.
DOI: https://doi.org/10.31857/S0032823521020041

[7] Wieghardt K. Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1922, vol. 2, iss. 3, pp. 165–184. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.19220020301

[8] von Karman T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: Encyklopadie der Math. Vol. 4C. Leipzig, 1910, pp. 311–385.

[9] Филоненко-Бородич М.М. Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку. *Труды Моск. электромех. ин-та инж. трансп.*, 1945, № 53, с. 92–108.

[10] Hetenyi M. Beams on elastic foundations. University of Michigan Press, 1946.

[11] Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М., Госстройиздат, 1954.

[12] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Техническая теория расчета фундаментов на упругом основании. *Труды МИСИ*, 1956, № 14, с. 12–31.

[13] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. М., ФИЗМАТГИЗ, 1960.

[14] Reissner E. Selected works in applied mechanics and mathematics. Jones and Bartlett Publ., 1996.

[15] Дуплякин И.А. Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками. *Прикладная математика и механика*, 1991, т. 55, № 3, с. 461–471.

[16] Александров В.М., Дуплякин И.А. Динамика бесконечной балки Тимошенко, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками, при движении деформируемого экипажа. *Известия РАН. МТТ,* 1996, № 1, с. 180–197.

[17] Сливкер В.И. К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания. *Строительная механика и расчет сооружений,* 1981, № 1, с. 36–39.

[18] Eisenberger M., Clastornik J. Beams on variable two-parameter elastic foundation. *J. Eng. Mech.*, 1987, vol. 113, iss. 10, pp. 351–356.
DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1454)

[19] Куреннов С.С. Модель двухпараметрического упругого основания в расчете напряженного состояния клеевого соединения. *Труды МАИ*, 2013, № 66.
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=40246

[20] Рао Ч.К., Рао Л.Б. Закритическое поведение тонкостенной свободно опертой балки с открытым профилем поперечного сечения, покоящейся на двухпараметрическом упругом основании, при ее кручении. *Прикладная механика и техническая физика*, 2018, т. 59, № 1, с. 204–213.
DOI: https://doi.org/10.15372/PMTF20180122

[21] Wang T.M., Stephens J.E. Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations. *J. Sound Vib.*, 1977, vol. 51, iss. 2, pp. 149–155.
DOI: https://doi.org/10.1016/S0022-460X(77)80029-1

[22] Wang T.M., Gagnon L.W. Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler — Pasternak foundations. *J. Sound Vib.*, 1978, vol. 59, iss. 2, pp. 211–220.
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-460X(78)90501-1

[23] Козел А.Г. Перемещения круговой трехслойной пластины на двухпараметрическом основании. *Механика. Исследования и инновации*, 2017, № 10, с. 80–86.

[24] Козел А.Г., Старовойтов Э.И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2018, т. 24, № 3, с. 392–406.

[25] Feng Q., Fu Sh., Wang Ch., et al. Analytical solution for fracture of stope roof based on Pasternak foundation model. *Soil. Mech. Found. Eng.,* 2019, vol. 56, iss. 2, pp. 142–150. DOI: https://doi.org/10.1007/s11204-019-09582-x

[26] Рыбак С.А., Тартаковский Б.Д. Нелинейные эффекты при распространении изгибных волн в пластине на упругом основании. *Нелинейные волны деформации. Труды симпозиума*. Т. 2. Таллин, Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1977, с. 141–144.

[27] Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Лисенкова Е.Е. и др. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Проблемы машиностроения и надежности машин,* 2008, № 3, с. 30–36.

[28] Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Смирнов П.А. Скорости переноса энергии и волнового импульса изгибными волнами, распространяющимися в балке, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2008, № 6, с. 40–43.

[29] Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Ангармонические волны в стержне Миндлина — Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду. *ПММ*, 2020, т. 84, № 4, с. 511–528. DOI: https://doi.org/10.31857/S0032823520040049

[30] Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Дисперсия и пространственная локализация изгибных волн, распространяющихся в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Известия РАН. МТТ*, 2021, № 4, с. 3–17.
DOI: https://doi.org/10.31857/S0572329921030041

[31] Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Stud. Appl. Math*., 1970, vol. 49, iss. 1, pp. 45–57. DOI: https://doi.org/10.1002/sapm197049145

Ерофеев Владимир Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор ИПМ РАН — филиала ФИЦ ИПФ РАН (Российская Федерация, 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85).

Морозов Андрей Николаевич — член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); заведующий лабораторией информационных технологий и измерительных систем ИПМ РАН — филиала ФИЦ ИПФ РАН (Российская Федерация, 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85).

Царев Иван Сергеевич — аспирант, ИПМ РАН — филиала ФИЦ ИПФ РАН (Российская Федерация, 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Царев И.С. Эволюция квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщенном нелинейно-упругом основании, и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 2 (107), с. 83–97.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97

QUASI-HARMONIC BENDING WAVES EVOLUTION IN A BEAM LYING ON THE GENERALIZED NONLINEAR-ELASTIC FOUNDATION AND POSSIBILITY OF THEIR TRANSFORMATION INTO A SEQUENCE OF WAVE PACKETS

V.I. Erofeev[1] erof.vi@yandex.ru
A.N. Morozov[1, 2] amor@bmstu.ru
I.S. Tsarev[1] tsarev_ivan97@mail.ru

[1] **Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences — Branch of Federal Research Center "Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences", Nizhniy Novgorod, Russian Federation**
[2] **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper considers dynamic behavior of a track structure, which is a beam performing bending vibrations and lying on the elastic foundation. In this case, a generalized base model is selected that contains two independent bed coefficients: stiffness for tensile (compressive) and shear deformations. Such a model takes into account the soil distributive ability, i.e., its property to settle not only under the loaded area and the foundation, but also in its vicinity. In addition, to describe the foundation stiffness nonlinear properties, the model assumed dependence on the transverse midline beam and its gradient displacement. Results analysis of the wave processes in the beam showed that, since bending waves had strong dispersion, solution to the problem in the presence of weak nonlinearity was close to solution of a linear problem, and it could be represented as a set of quasi-harmonics. Using the Lighthill criterion, conditions modulation instability manifestation (self-modulation) of the quasi-harmonic waves, which led to their spatial localization and division into separate wave packets, were studied. Analytical expressions were found that described the wave packets shapes. Dependences connecting the amplitude and the wave packet width with the elastic foundation rigidity were analyzed

Keywords

Modulation instability, bending wave, beam, generalized elastic foundation

Received 15.08.2022
Accepted 08.09.2022

The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 20-19-00613)

REFERENCES

[1] Vlasov S.N., Talanov V.I. Samofokusirovka voln [Self-focusing waves]. Nizhniy Novgorod, IPF RAS Publ., 1997.

[2] Ostrovskiy L.A., Potapov A.I. Vvedenie v teoriyu modulirovannykh voln [Introduction to theory of modulated waves]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003.

[3] Zakharov V.E., Ostrovsky L.A. Modulation instability: the beginning. *Physica D*, 2009, vol. 238, iss. 5, pp. 540–548. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.12.002

[4] Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. Wiley, 1974.

[5] Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln [Introduction to the theory of vibrations and waves]. Izhevsk, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2000.

[6] Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Tsarev I.S. Dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic foundation and subject to a moving load. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1295–1306. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654421070116

[7] Wieghardt K. Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1922, vol. 2, iss. 3, pp. 165–184. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.19220020301

[8] von Karman T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: Encyklopadie der Math. Vol. 4S. Leipzig, 1910, pp. 311–385.

[9] Filonenko-Borodich M.M. The simplest model of elastic foundation, capable of distributing the loads. *Trudy Mosk. elektromekh. in-ta inzh. transp.*, 1945, no. 53, pp. 92–108 (in Russ.).

[10] Hetenyi M. Beams on elastic foundations. University of Michigan Press, 1946.

[11] Pasternak P.L. Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsientov posteli [Fundamentals of a new calculation method for basis on an elastic foundation using two coefficients]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1954.

[12] Vlasov V.Z., Leontyev N.N. Technical theory of calculating basis on an elastic foundation. *Trudy MISI*, 1956, no. 14, pp. 12–31 (in Russ.).

[13] Vlasov V.Z., Leontyev N.N. Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii [Beams, plates, shells on an elastic base]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1960.

[14] Reissner E. Selected works in applied mechanics and mathematics. Jones and Bartlett Publ., 1996.

[15] Duplyakin I.A. The motion of a carriage with constant velocity along a beam of infinite length resting on a base with two elastic characteristics. *J. Appl. Math. Mech.*, 1991, vol. 55, iss. 3, pp. 376–384. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-8928(91)90042-S

[16] Aleksandrov V.M., Duplyakin I.A. Dynamics of an infinite Timoshenko beam lying on a base with two elastic characteristics under motion of a deformable carriage. *Izvestiya RAN. MTT*, 1996, no. 1, pp. 180–197 (in Russ.).

[17] Slivker V.I. To the question of the appointment of the characteristics of a two-parameter elastic base. *Stroitelnaya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 1981, no. 1, pp. 36–39 (in Russ.).

[18] Eisenberger M., Clastornik J. Beams on variable two-parameter elastic foundation. *J. Eng. Mech.*, 1987, vol. 113, iss. 10, pp. 351–356 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1454)

[19] Kurennov S.S. The two-parameter elastic foundation model used for the computation of the glued connection stressed state. *Trudy MAI*, 2013, no. 66 (in Russ.). Available at: https://trudymai.ru/published.php?ID=40246

[20] Rao Ch.K., Rao L.B. Torsional post-buckling of a simply supported thin-walled open-section beam resting on a two-parameter foundation. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2018, vol. 59, no. 1, pp. 176–184. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894418010224

[21] Wang T.M., Stephens J.E. Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations. *J. Sound Vib.*, 1977, vol. 51, iss. 2, pp. 149–155.
DOI: https://doi.org/10.1016/S0022-460X(77)80029-1

[22] Wang T.M., Gagnon L.W. Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler — Pasternak foundations. *J. Sound Vib.*, 1978, vol. 59, iss. 2, pp. 211–220.
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-460X(78)90501-1

[23] Kozel A.G. Movements in the circular three-layered plate on the two-parametrical foundation. *Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii* [Mechanics. Investigations and Innovations], 2017, no. 10, pp. 80–86 (in Russ.).

[24] Kozel A.G., Starovoytov E.I. The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Mechanics of Composite Materials and Structures], 2018, vol. 24, no. 3, pp. 392–406 (in Russ.).

[25] Feng Q., Fu Sh., Wang Ch., et al. Analytical solution for fracture of stope roof based on Pasternak foundation model. *Soil. Mech. Found. Eng.*, 2019, vol. 56, iss 2, pp. 142–150. DOI: https://doi.org/10.1007/s11204-019-09582-x

[26] Rybak S.A., Tartakovskiy B.D. [Nonlinear effects in the propagation of flexural waves in a plate on an elastic foundation]. *Nelineynye volny deformatsii. Trudy simpoziuma. T. 2* [Nonlinear Deformation Waves. Symp. Proc. Vol. 2]. Tallin, Institut kibernetiki AN ESSR Publ., 1977, pp. 141–144 (in Russ.).

[27] Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., et al. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2008, vol. 37, no. 3, pp. 230–235. DOI: https://doi.org/10.3103/S1052618808030059

[28] Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Smirnov P.A. Velocity of energy and wave pulse transfer by flexural waves propagating in a beam lying on a nonlinear elastic base. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2008, vol. 37, no. 6, pp. 568–571.
DOI: https://doi.org/10.3103/S1052618808060071

[29] Erofeev V.I., Leontyeva A.V. Anharmonic waves in a Mindlin — Herrmann rod immersed in a nonlinearly elastic medium. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1284–1297. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654420080087

[30] Erofeev V.I., Leontyeva A.V. Dispersion and spatial localization of bending waves propagating in a Timoshenko beam laying on a nonlinear elastic base. *Mech. Solids.*, 2021, vol. 56, no. 4, pp. 443–454. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654421040051

[31] Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Stud. Appl. Math*., 1970, vol. 49, iss. 1, pp. 45–57. DOI: https://doi.org/10.1002/sapm197049145

Erofeev V.I. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Director, Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences — Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences” (Belinskogo ul. 85, Nizhniy Novgorod, 603024 Russian Federation).

Morozov A.N. — Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Head of the Laboratory of Information Technologies and Measuring Systems, Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences — Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences” (Belinskogo ul. 85, Nizhniy Novgorod, 603024 Russian Federation).

Tsarev I.S. — Post-Graduate Student, Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences — Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences” (Belinskogo ul. 85, Nizhniy Novgorod, 603024 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Erofeev V.I., Morozov A.N., Tsarev I.S. Quasi-harmonic bending waves evolution in a beam lying on the generalized nonlinear-elastic foundation and possibility of their transformation into a sequence of wave packets. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 2 (107), pp. 83–97 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97