

СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВНЕЗАПНО РАСШИРЯЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ

М.Э. Мадалиев

m.e.madaliyev@ferpi.uz

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева
АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан
Ферганский политехнический институт, Фергана, Республика Узбекистан

Аннотация

Изучен поток жидкости в двумерном канале с внезапным расширением ($x/h = 2$). Расчеты выполнены для ламинарного режима течения на основе численного интегрирования нестационарных уравнений Навье — Стокса. Различные характеристики потока определены при $Re = 100$ – 800 . Получены результаты для профилей продольной скорости для различных сечений канала и протяженностей первичного и вторичного вихрей при различных значениях числа Рейнольдса после уступа. Представлено распределение коэффициента трения на нижней стенке канала по его длине при различных значениях числа Рейнольдса. Для разностной аппроксимации исходных уравнений применен метод контрольного объема, связь между скоростями и давлением находилась с использованием процедуры SIMPLE. Для численного решения поставленной задачи применены схемы QUICK, второго порядка точности Мак-Кормака, третьего порядка точности Уорминга — Катлера — Ломакса и четвертого порядка точности Абарбанела — Готлиба — Туркела. Для подтверждения корректности численных результатов выполнено сравнение с экспериментальными данными, взятыми из литературных источников

Ключевые слова

Уравнения Навье — Стокса, плоский канал с обратным уступом, отрывное течение, метод контрольного объема

Поступила 23.11.2021

Принята 19.12.2022

© Автор(ы), 2023

Введение. Исследование отрывных течений является классической задачей фундаментальной механики жидкости. Отрыв потока часто встречается при обтекании подводного крыла потоком воды, лопастей компрессора и турбины потоком воздуха, во внезапно расширяющихся каналах, в камере сгорания и т. д. Исследования потоков во внезапно расширяю-

щемся канале, их отрыв и присоединение очень важны для инженерных расчетов. Однако теоретическое исследование и расчет таких потоков представляют значительные сложности вследствие возникновения обратных вихрей за уступом и соединения разделенных потоков. В связи с этим расчет подобных потоков является хорошей демонстрацией надежности любой численной процедуры.

Первое аналитическое исследование ламинарного отрыва стационарных двумерных течений несжимаемой жидкости в прямых каналах проведено в 1910 г. П.Р.Г. Блазиусом [1]. Ввиду большого практического значения подобных потоков выполнены теоретические и экспериментальные исследования как ламинарных [2–4], так и турбулентных [5–7] режимов течения несжимаемой и сжимаемой жидкостей. В большинстве работ рассмотрены каналы с симметричным расширением [8–14]. Так, в [8, 9] приведены результаты экспериментального исследования образования циркуляционной зоны за планкой. Для описания отрывных потоков используют уравнения движения в приближении пограничного слоя [14, 15]. Значимый и важный объем работ по расчету потоков во внезапно расширяющихся каналах экспериментально выполнен в [4]. Численное моделирование такой задачи проведено в [16]. Авторами работы [17] использована теория потенциального течения для получения решения указанной задачи. Однако теория потенциального течения не смогла предсказать зоны разделения и соединения потоков. Начальные численные прогнозы поведения потоков за обратным уступом выполнены авторами работ [18–20]. Размер зоны рециркуляции за уступом предсказан в [21]. Для увеличения точности расчетов в [22, 23] применен многосеточный метод, а в [24] — метод уточнения локальных блоков. Детальный экспериментальный расчет для размеров уступа (коэффициента расширения) $x/h = 1,94$ приведен в [16], расчет численным методом второго порядка точности по пространству и времени — в [25]. Показано хорошее соответствие с экспериментальными значениями для значений числа Рейнольдса до 500. Установлено, что расчетные значения не соответствуют экспериментальным, если $Re > 600$. При двумерном численном моделировании симметричного потока с резким расширением в [26] описана зона разделения потока. Авторами [27] установлено, что неустойчивость создается конвективной неустойчивостью.

Цель работы — исследование различных численных схем для решения внутренних задач аэрогидромеханики при отрыве потока и проверка их эффективности. Для решения полных уравнений Навье — Стокса использованы четыре схемы с различными порядками точности:

- 1) QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics) [28];
- 2) Мак-Кормака [29];
- 3) Уорминга — Катлера — Ломакса [30];
- 4) Абарбанела — Готлиба — Туркела [31].

Физическая и математическая постановки задачи. Рассмотрено ламинарное течение в плоском двумерном канале с внезапным расширением (обратным уступом). Схема анализируемого ламинарного течения и конфигурация расчетной области представлены на рис. 1.

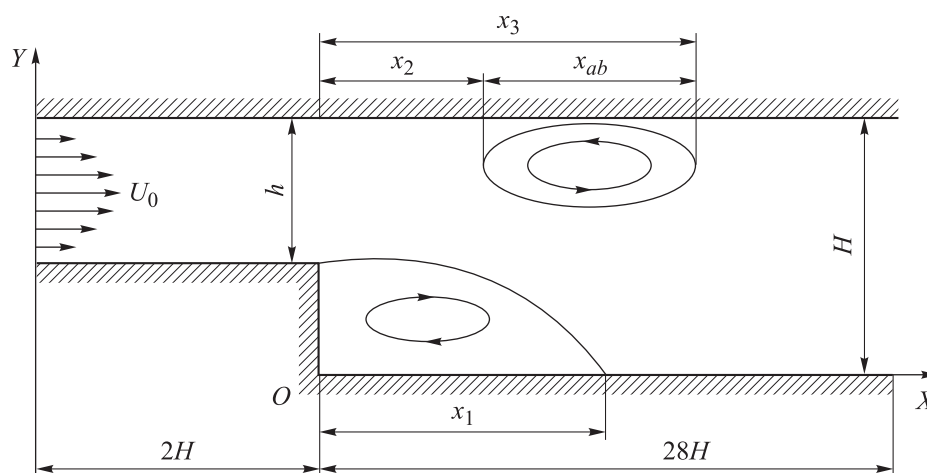


Рис. 1. Схема расчетной области в плоском канале с внезапным расширением (обратным уступом):

x_1 — координата повторного присоединения первичного вихря, который образуется после уступа в нижней части канала; x_{ab} — координата вторичного вихря, образующегося после уступа в верхней части канала; x_2 — координата начала вторичного вихря; x_3 — координата конца вторичного вихря

Для численной реализации поставленной задачи начало декартовой системы координат расположено в нижнем углу уступа. Ширина меньшего канала в левом входном сечении 5 мм, в правом выходном сечении размер канала в 2 раза больше размера входного сечения канала $H = 2h$. На входе в канал задан параболический профиль течения Пуазейля для продольной скорости U , поперечная скорость V и давление p равны нулю. Для описания движения жидкости использованы полные нестационарные уравнения Навье — Стокса для несжимаемой среды. При введении безразмерных величин за масштаб длины принята ширина H большего канала, за масштаб скорости — среднерасходная скорость U_0 на входе в канал.

Система нестационарных уравнений Навье — Стокса и неразрывности с постоянной плотностью $\rho = \text{const}$ в декартовых координатах имеет вид [32]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial p}{\rho \partial x} &= \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial p}{\rho \partial y} &= \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U, V — безразмерные продольная и вертикальная составляющие вектора скорости ламинарного потока; p — безразмерное гидростатическое давление.

На всех неподвижных твердых стенках действуют граничные условия прилипания $U|_{\Gamma} = 0$ и $V|_{\Gamma} = 0$, где Γ — твердая граница. На выходе из канала для параметров задаются стандартные условия экстраполяции второго порядка точности.

Метод решения. Для численного решения системы исходных нестационарных уравнений Навье — Стокса (1) для четырех схем использован метод конечных объемов. В целях коррекции скоростей через давления применена процедура SIMPLE. Для согласования скоростей и давления использована сетка с разнесенной структурой расположения узлов сетки, т. е. компоненты скорости и давления определены в разных узлах сетки (рис. 2) [33, 34].

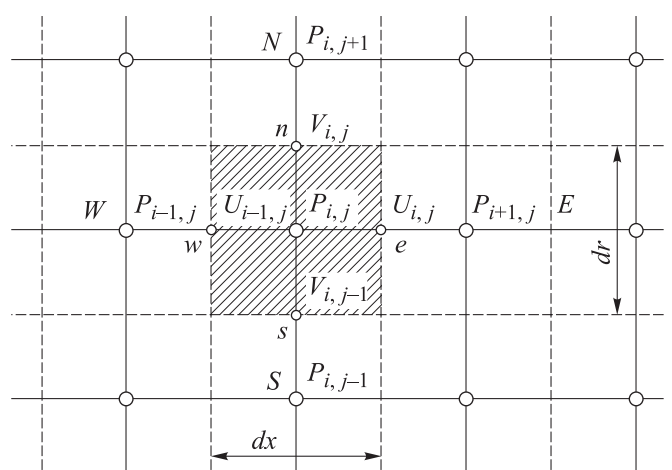


Рис. 2. Фрагмент расположения узлов и ячеек на разнесенной сетке

Схема QUICK [28] имеет третий порядок точности по пространству и первый по времени. Эта схема наиболее подходит для решения стационарных или квазистационарных задач и является полунявной схемой с условием устойчивости

$$\left(\frac{U_{\max} \Delta t}{\Delta x} + \frac{V_{\max} \Delta t}{\Delta y} \right) \leq 1.$$

Диффузионные слагаемые аппроксимируются центральными разностями неявным образом в поперечном направлении и явным в продольном. Схема QUICK на регулярной сетке:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial V \Phi}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \Pi \Phi. \quad (2)$$

Здесь

$$\Phi = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}; \quad \Pi \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\rho \partial x} \\ \frac{\partial p}{\rho \partial y} \end{pmatrix}.$$

Запишем

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_P^{n+1} - \Phi_P^n}{\Delta t} + \frac{U_e \Phi_e^n - U_w \Phi_w^n}{\Delta x} + \frac{V_n \Phi_n^n - V_s \Phi_s^n}{\Delta y} = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\Phi_E^n - 2\Phi_P^{n+1} + \Phi_W^n}{\Delta x} + \frac{\Phi_N^{n+1} - 2\Phi_P^{n+1} + \Phi_S^{n+1}}{\Delta y} \right) - \Pi \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} U_e > 0 & \Phi_e^n = \frac{3}{8} \Phi_E^n + \frac{3}{4} \Phi_P^n - \frac{1}{8} \Phi_W^n, & U_e < 0 & \Phi_e^n = \frac{3}{8} \Phi_P^n + \frac{3}{4} \Phi_E^n - \frac{1}{8} \Phi_{EE}^n, \\ U_w > 0 & \Phi_w^n = \frac{3}{8} \Phi_P^n + \frac{3}{4} \Phi_W^n - \frac{1}{8} \Phi_{WW}^n, & U_w < 0 & \Phi_w^n = \frac{3}{8} \Phi_W^n + \frac{3}{4} \Phi_P^n - \frac{1}{8} \Phi_E^n, \\ V_n > 0 & \Phi_n^n = \frac{3}{8} \Phi_N^n + \frac{3}{4} \Phi_P^n - \frac{1}{8} \Phi_S^n, & V_n < 0 & \Phi_n^n = \frac{3}{8} \Phi_P^n + \frac{3}{4} \Phi_N^n - \frac{1}{8} \Phi_{NN}^n, \\ V_s > 0 & \Phi_s^n = \frac{3}{8} \Phi_P^n + \frac{3}{4} \Phi_S^n - \frac{1}{8} \Phi_{SS}^n, & V_s < 0 & \Phi_s^n = \frac{3}{8} \Phi_S^n + \frac{3}{4} \Phi_P^n - \frac{1}{8} \Phi_N^n. \end{array}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A^\Phi &= \left(1 + \frac{2\Delta t}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \right) \right), & B^\Phi &= \frac{\Delta t}{\text{Re}} \left(\frac{\Phi_E^n + \Phi_W^n}{\Delta x} \right), \\ C^\Phi &= -\Pi \Phi - \Delta t \frac{U_e \Phi_e^n - U_w \Phi_w^n}{\Delta x} - \Delta t \frac{V_n \Phi_n^n - V_s \Phi_s^n}{\Delta y}, & D^\Phi &= \frac{\Delta t}{\text{Re} \Delta y}. \end{aligned}$$

В результате имеем конечно-разностное уравнение для внутренних расчетных узлов $\Phi_P^{n+1} A^\Phi = \Phi_N^{n+1} D^\Phi + \Phi_S^{n+1} D^\Phi + B^\Phi + C^\Phi$. Для реализации решения уравнения использован метод прогонки [35, 36].

Получены также результаты для схем Мак-Кормака [29], Уорминга — Катлера — Ломакса [30] и Абарбанела — Готлиба — Туркеда [31]. Для решения задачи использована прямоугольная расчетная сетка размером 300×100 с шагом $\Delta x = 0,05$, $\Delta y = 0,01$, $\Delta t < 0,001$.

Результаты расчетов и их обсуждение. Результаты расчета продольной скорости потока для различных сечений после уступа приведены на рис. 3 ($Re = 100$, экспериментальные данные взяты из [16]). Аналогичные результаты для $Re = 400$ показаны на рис. 4. При малых значениях числа Рейнольдса все схемы дают примерно одинаковые результаты.

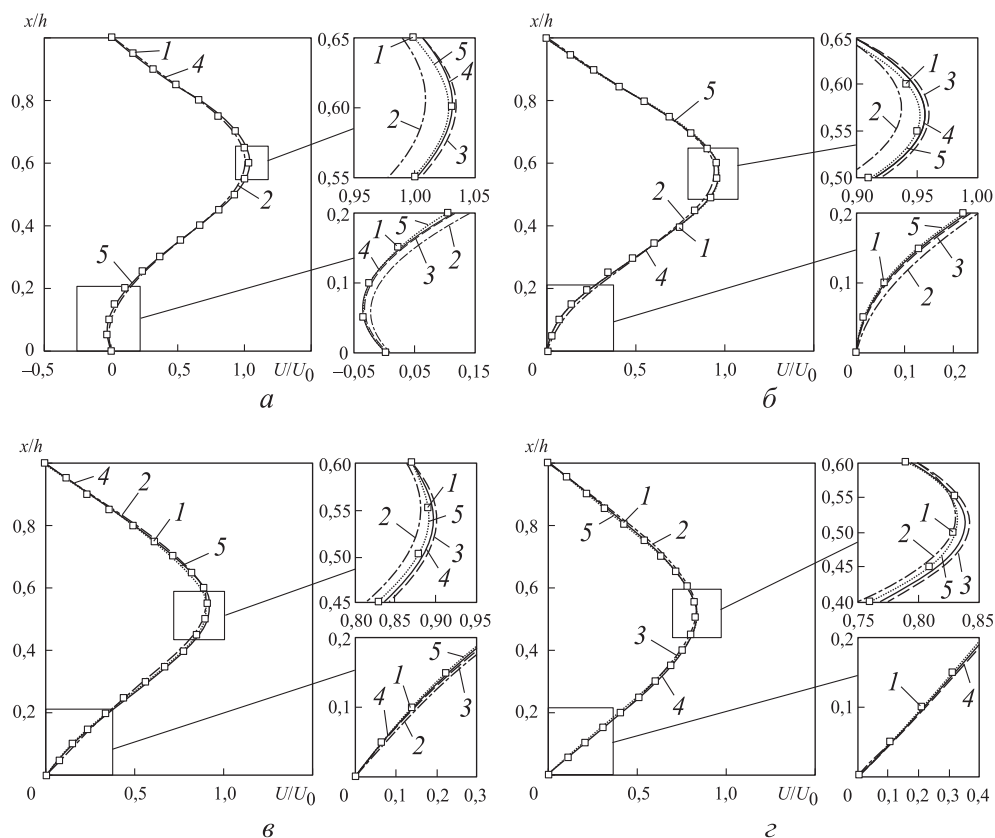


Рис. 3. Результаты расчета продольной скорости при $Re = 100$ и $x/h = 2,55$ (а), $3,06$ (б), $3,57$ (в), $4,18$ (г) для эксперимента (1) и схем QUICK (2), Мак-Кормака (3), Уорминга — Катлера — Ломакса (4) и Абарбанела — Готлиба — Туркеда (5)

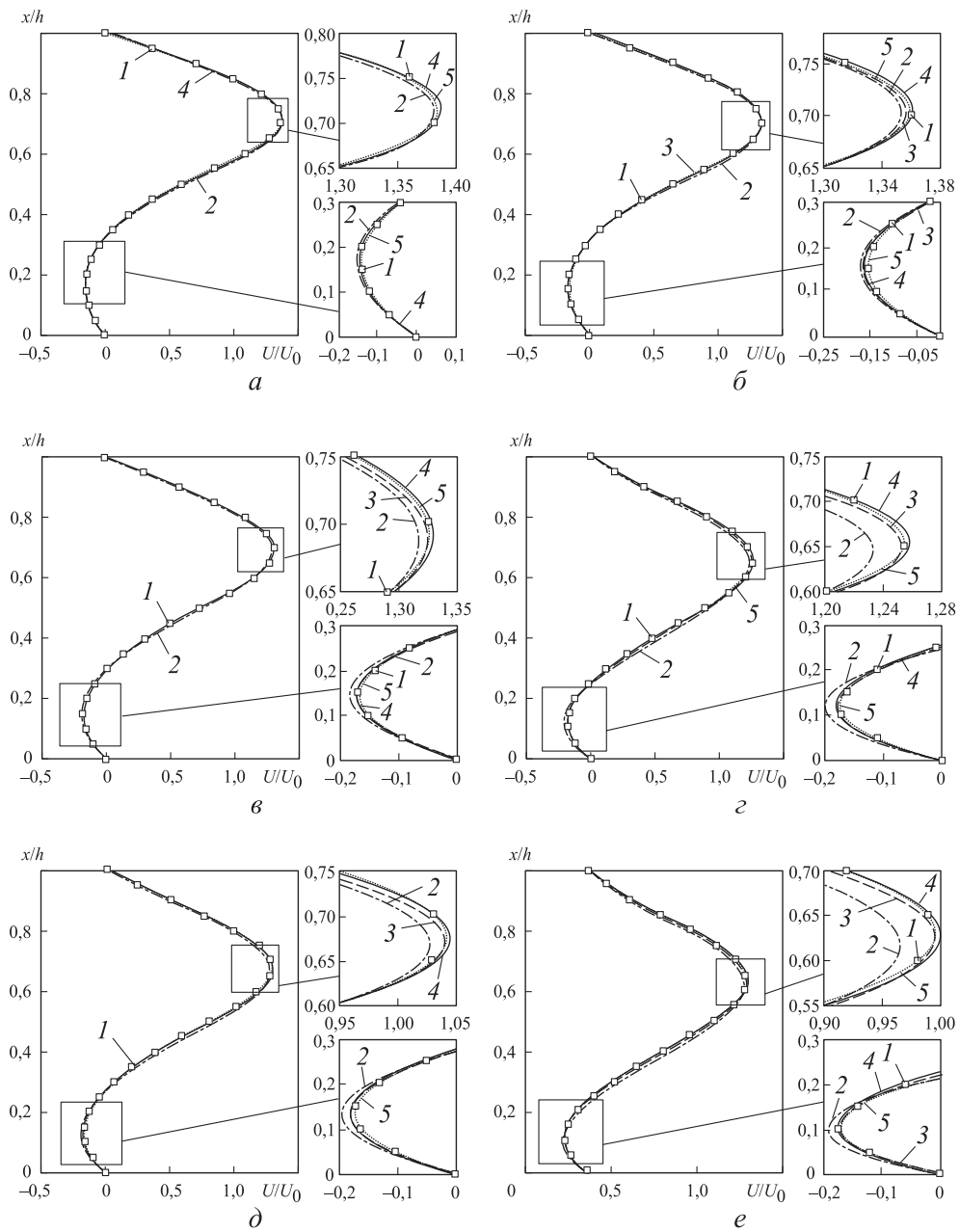


Рис. 4 (начало). Результаты расчета продольной скорости при $Re = 400$ и $x/h = 2,55$ (а), $3,06$ (б), $3,57$ (в), $4,18$ (г), $4,8$ (д), $5,4$ (е) для эксперимента (1) и схем QUICK (2), Мак-Кормака (3), Уорминга — Катлера — Ломакса (4) и Абарбанела — Готлиба — Туркела (5)

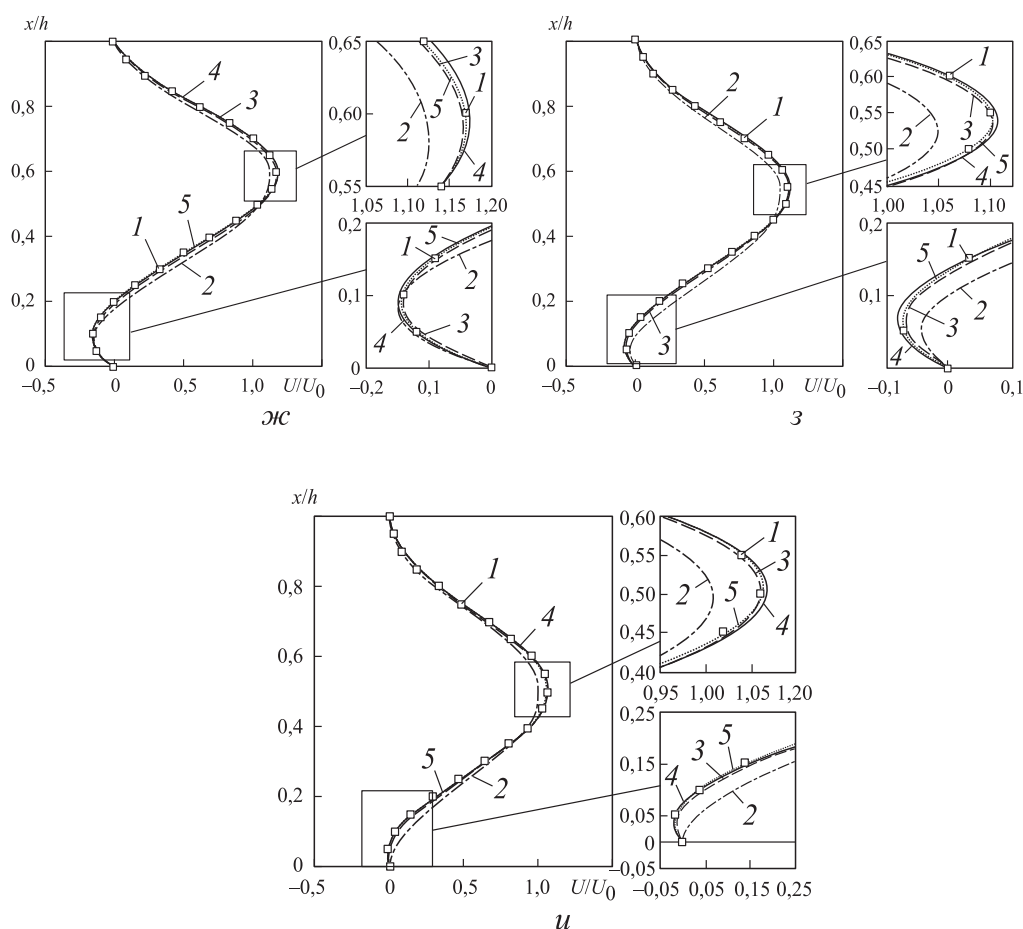


Рис. 4 (окончание). Результаты расчета продольной скорости при $Re = 400$ и $x/h = 6,12$ (ж), $7,14$ (з), $7,76$ (и) для эксперимента (1) и схем QUICK (2), Мак-Кормака (3), Уорминга — Катлера — Ломакса (4) и Абарбанела — Готлиба — Туркела (5)

Зависимость протяженности первичного вихря от числа Рейнольдса приведена на рис. 5. Полученные результаты расчета протяженности первичного вихря по указанным схемам близки друг к другу. Однако результаты расчета протяженности для схемы QUICK резко ухудшаются при $Re > 400$.

Значения погрешности схем для расчета протяженности первичного вихря приведены в таблице. Наиболее близкие значения к экспериментальным дает схема Абарбанела — Готлиба — Туркела: при $Re = 500$ погрешность составляет $0,263852\%$.

Результаты расчета значений протяженности вторичного вихря при изменении числа Рейнольдса приведены на рис. 6.

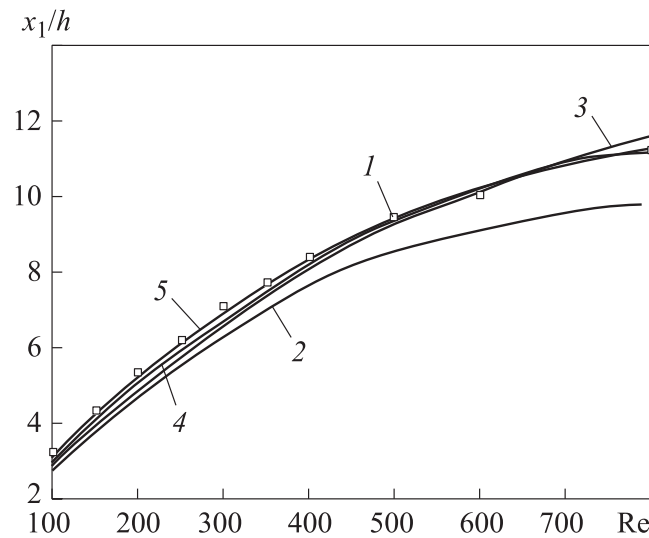


Рис. 5. Зависимость протяженности первичного вихря от числа Рейнольдса для эксперимента (1) и схем QUICK (2), Мак-Кормака (3), Уорминга — Катлера — Ломакса (4) и Абарбанела — Готлиба — Туркела (5)

Распределение коэффициента трения на нижней стенке канала по его длине при различных значениях числа Рейнольдса показано на рис. 7. Коэффициент трения рассчитан по формуле

$$C_f = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Согласно данным на рис. 7, результаты расчета для различных схем близки при $Re < 500$. Однако при $Re > 600$ схема Мак-Кормака дает осциллирующие результаты. То же наблюдается при $Re > 700$ и для схем Уорминга — Катлера — Ломакса и Абарбанела — Готлиба — Туркела, в то время как схема QUICK дает довольно монотонные результаты.

Изолинии продольной скорости при различных значениях числа Рейнольдса приведены на рис. 8. Во всех случаях в зоне за выступом характерно образование возвратных течений, протяженность этой зоны и структура циркуляционного течения не только зависят от числа Рейнольдса, но и от используемой численной схемы [37]. Результаты исследований показали, что схемы Мак-Кормака, Уорминга — Катлера — Ломакса и Абарбанела — Готлиба — Туркела дают более близкие значения к экспериментальным данным, чем схема QUICK.

Значения погрешности схем для расчета протяженности первичного вихря

Схема	Re							
	100	200	300	400	500	600	800	
Экспериментальная	3,261	5,376	7,135	8,448	9,475	10,015	11,338	
QUICK	2,8 (14,13677)	4,7 (12,5744)	6,3 (11,70287)	7,7 (8,854167)	8,6 (9,234828)	9,1 (9,136296)	9,8 (13,565)	
Мак-Кормака	2,9 (11,07022)	4,9 (8,854167)	6,6 (7,498248)	8,1 (4,119318)	9,3 (1,846966)	10,1 (0,848727)	11,6 (2,310813)	
Уорминга — Катлера — Ломакса	3,0 (8,00368)	5,0 (6,994048)	6,7 (6,096706)	8,2 (2,935606)	9,4 (0,791557)	10,2 (1,847229)	11,2 (1,217146)	
Абарбанела — Готлиба — Туркела	3,1 (4,937136)	5,2 (3,27381)	6,9 (3,293623)	8,3 (1,751894)	9,45 (0,263852)	10,15 (1,347978)	11,25 (0,776151)	
<i>Примечание. В скобках приведены значения погрешностей, %.</i>								

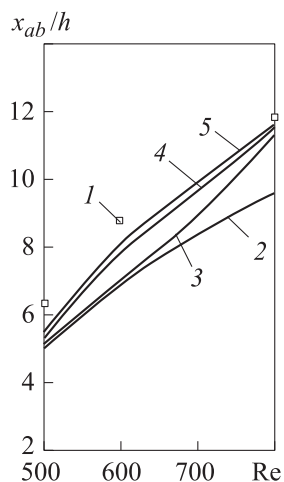


Рис. 6. Результаты расчета значений протяженности вторичного вихря при изменении числа Рейнольдса для эксперимента (1) и схем QUICK (2), Мак-Кормака (3), Уорминга — Катлера — Ломакса (4) и Абарбанела — Готлиба — Туркела (5)

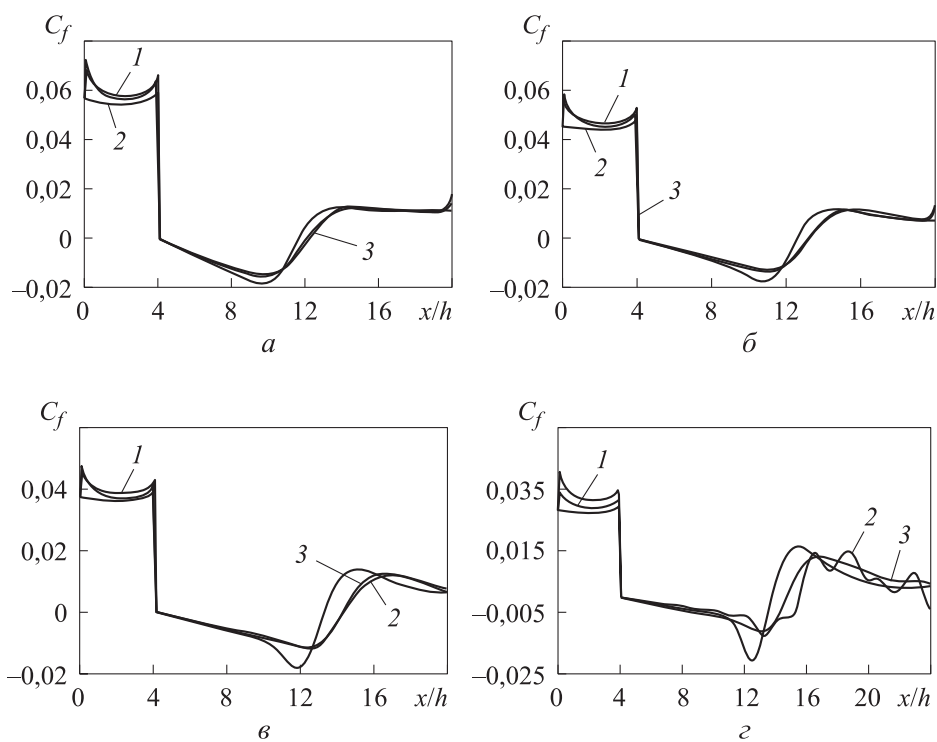


Рис. 7 (начало). Распределения коэффициента трения по длине канала при $Re = 400$ (а), 500 (б), 600 (в), 700 (г) для схем QUICK (1), Мак-Кормака (2), Уорминга — Катлера — Ломакса и Абарбанела — Готлиба — Туркела (3)

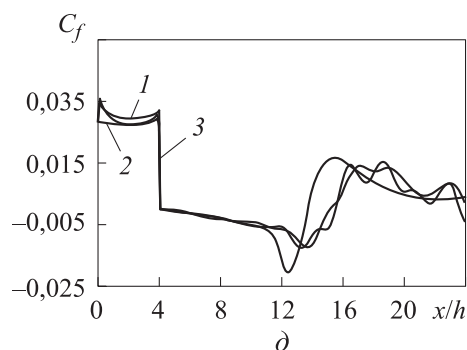


Рис. 7 (окончание). Распределения коэффициента трения по длине канала при $Re = 800$ (δ) для схем QUICK (1), Мак-Кормака (2), Уорминга — Катлера — Ломакса и Абарбанела — Готлиба — Туркела (3)

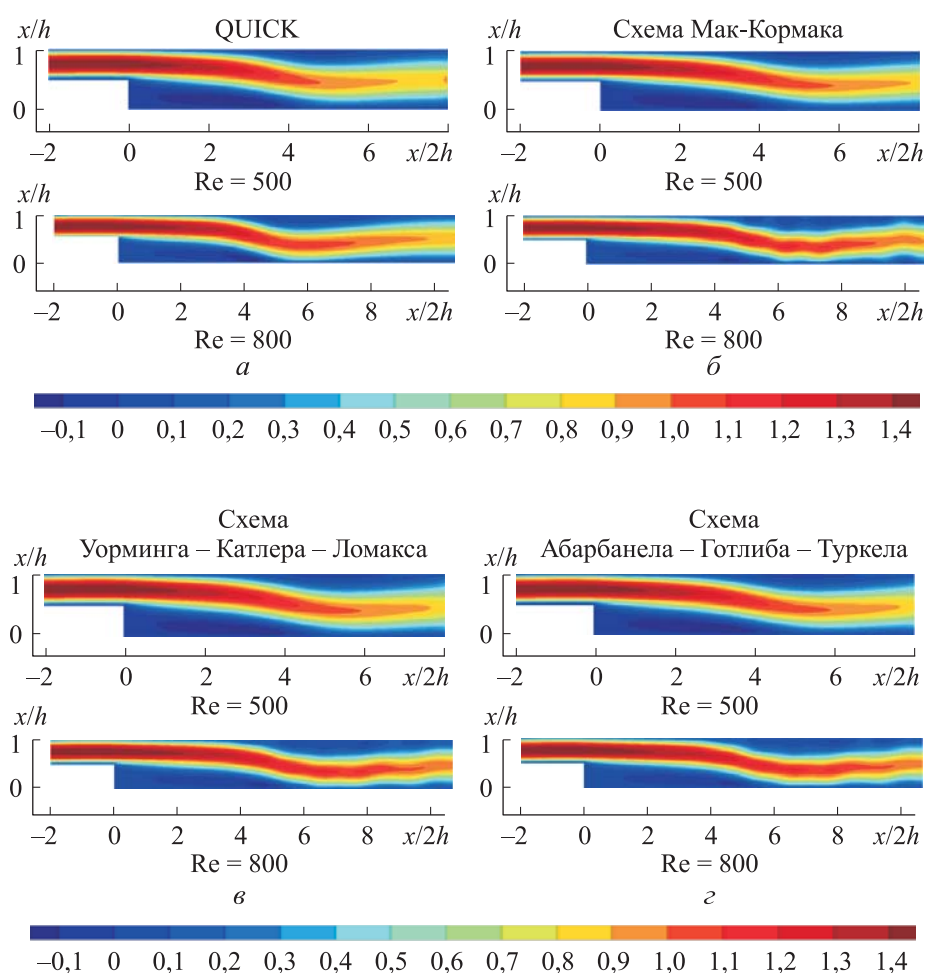


Рис. 8. Изолинии продольной скорости при $Re = 500$ (а, в) и 800 (б, г)

Значения времени (с), затрачиваемого на выполнение расчетов по различным схемам, приведены ниже*:

QUICK	1415
Мак-Кормака	1540
Уорминга — Катлера — Ломакса	2246
Абарбанела — Готлиба — Туркела	3144

Для расчета по схемам QUICK и Мак-Кормака требуется примерно одинаковое время, по схеме Уорминга — Катлера — Ломакса — в 2 раза большее, по схеме Абарбанела — Готлиба — Туркела — в 3 раза.

Выводы. Приведены результаты расчета для конечно-разностных схем QUICK, Мак-Кормака, Уорминга — Катлера — Ломакса и Абарбанела — Готлиба — Туркела при исследованиях процессов отрыва. Показаны закономерности формирования вихревой структуры течения в плоском канале за уступом, включая вторичные вихревые образования и нестационарные отрывные режимы течения. Установлено, что для потоков, в которых происходят отрыв и возникновение циркуляционных зон, следует использовать схемы высокого порядка точности. Для отрывных потоков схема QUICK не дает хороших результатов, однако она более устойчива, чем другие схемы. Схемы Мак-Кормака, Уорминга — Катлера — Ломакса и Абарбанела — Готлиба — Туркела позволяют получить примерно одинаковые результаты, но требуют больше вычислительных затрат. Компромиссным решением является использование схем второго порядка точности по времени и пространству.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Blasius H. Laminare Stromung in Kanalen Wechselnder Breite. *Zeitschrift fur Math. und Phys.*, 1910, vol. 58, no. 10, pp. 225–233.
- [2] Honji H. The starting flow down a step. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 69, no. 2, pp. 229–240. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112075001413>
- [3] Синха С.П., Гупта А.К., Оберай М.М. Ламинарное отрывное обтекание уступов и каверн. Ч. 1. Течение за уступом. *Ракетная техника и космонавтика*, 1981, т. 19, № 12, с. 33–37.
- [4] Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., et al. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 127, pp. 473–496. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112083002839>

* Вычисления проведены на компьютере, оснащённом четырехъядерным процессором Intel CORE i5-7300HQ 2,5 ГГц (16 Гб памяти DDR3) и жестким диском 1024 Гб, операционная система Windows 7 (64-разрядная).

- [5] Чжен П. Отрывные течения, М., Мир, 1972.
- [6] Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. М., Наука, 1979.
- [7] Le H., Moin P., Kim J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 330, pp. 349–374. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112096003941>
- [8] Durst F., Melling A., Whitelaw J.H. Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 64, iss. 1, pp. 111–118. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112074002035>
- [9] Cherdron W., Durst F., Whitelaw J.H. Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions. *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 84, iss. 1, pp. 13–31. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112078000026>
- [10] Macadno E.O., Hung T.-K. Computational and experimental study of a captive annular eddy. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 28, iss. 1, pp. 43–64. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112067001892>
- [11] Kumar A., Yajnik K.S. Internal separated flows at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1980, vol. 97, iss. 1, pp. 27–51. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112080002418>
- [12] Плоткин А. Расчеты спектральным методом некоторых отрывных ламинарных течений в каналах. *Аэрокосмическая техника*, 1983, № 7, с. 75–85.
- [13] Acrivos A., Schrader M.L. Steady flow in a sudden expansion at high Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 1982, vol. 25, iss. 6, pp. 923–930. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.863844>
- [14] Куон О., Плетчер Р., Льюис Дж. Расчет течений с внезапным расширением при помощи уравнений пограничного слоя. *Теор. основы инж. расч.*, 1984, т. 106, № 3, с. 116–123.
- [15] Плетчер Л. Пределы применимости уравнений пограничного слоя для расчета ламинарных течений с симметричным внезапным расширением. *Теор. основы инж. расч.*, 1986, № 2, с. 284–294.
- [16] Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе новой двухжидкостной модели турбулентности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 24–39. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-24-39>
- [17] Lee Y.S., Smith L.C. Analysis of power-law viscous materials using complex stream, potential and stress functions. In: *Encyclopedia of Fluid Mechanics*. Vol. 1. Flow Phenomena and Measurement. Gulf, 1986, pp. 1105–1154.
- [18] Roache P.J. Computational fluid dynamics. Hermosa, 1972.
- [19] Taylor T.D., Ndefo E. Computation of viscous flow in a channel by the method of splitting. In: Holt M. (eds). *Proc. of the Second Int. Conf. on Num. Methods in Fluid Dynamics. Lecture Notes in Physics*, vol. 8. Berlin, Heidelberg, Springer, 1971, pp. 356–364. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-05407-3_51

- [20] Durst F., Peireira J.C.F. Time-dependent laminar backward-facing step flow in a two-dimensional duct. *J. Fluids Eng.*, 1988, vol. 110, iss. 3, pp. 289–296.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3243547>
- [21] Alleborn N., Nandakumar K., Raszillier H., et al. Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion. *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 330, pp. 169–188.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112096003382>
- [22] Brandt A., Jr. Dendy J.E., Ruppel H. The multigrid method for semi-implicit hydrodynamic codes. *J. Comput. Phys.*, 1980, vol. 34, iss. 3, pp. 348–370.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90094-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90094-7)
- [23] Hackbusch W. Multigrid methods for applications. Springer, 1985.
- [24] Lange C.F., Schäfer M., Durst F. Local block refinement with a multigrid flow solver. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2002, vol. 38, iss. 1, pp. 21–41.
DOI: <https://doi.org/10.1002/fld.202>
- [25] Kim J., Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier — Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 1985, vol. 59, iss. 2, pp. 308–323.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(85\)90148-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(85)90148-2)
- [26] Durst F., Peireira J.C.F., Tropea C. The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 248, pp. 567–581.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112093000916>
- [27] Kaiktsis L., Karniadakis G.E., Orszag S.A. Unsteadiness and convective instabilities in a two-dimensional flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 321, pp. 157–187. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112096007689>
- [28] Leonard B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1979, vol. 19, iss. 1, pp. 59–98. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90034-3](https://doi.org/10.1016/0045-7825(79)90034-3)
- [29] MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *AIAA Paper*, 1969, no. 354. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.1969-354>
- [30] Warming R.F., Kutler P., Lomax H. Second- and third-order noncentered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. *AIAA J.*, 1973, vol. 11, no. 2, pp. 189–196. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.50449>
- [31] Abarbanel S., Gottlieb D., Turkel E. Difference schemes with fourth order accuracy for hyperbolic equations. *J. Appl. Math.*, 1975, vol. 29, iss. 2, pp. 329–351.
DOI: <https://doi.org/10.1137/0129029>
- [32] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1987.
- [33] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980.
- [34] Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1012–1028.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462820080066>
- [35] Erkinjon son M.M. Numerical calculation of an air centrifugal separator based on the SARC turbulence model. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2020, vol. 6, no. 5, pp. 1133–1140.

[36] Маликов З.М., Назаров Ф.Х. Исследование погруженной осесимметричной турбулентной струи в сравнительном анализе моделей турбулентности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 2 (101), с. 22–35.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-22-35>

[37] Назаров Ф.Х. Сравнение моделей турбулентности для закрученных течений. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 2 (95), с. 25–36.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-2-25-36>

Мадалиев Муродил Эркинжон Угли — канд. наук, Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз (Республика Узбекистан, 100125, Ташкент, ул. Ф. Ходжаева, д. 31); ассистент, Ферганский политехнический институт (Республика Узбекистан, 150107, Фергана, ул. Ферганская, д. 86).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мадалиев М.Э. Сравнение численных схем для задачи ламинарного течения во внезапно расширяющемся канале. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 1 (106), с. 4–22.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-1-4-22>

NUMERICAL SCHEMES COMPARISON IN SOLVING THE PROBLEM OF LAMINAR FLOW IN THE SUDDENLY EXPANDING CHANNEL

M.E. Madaliev

m.e.madaliyev@ferpi.uz

**Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan
Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan**

Abstract

The paper studies fluid flow in a two-dimensional channel with sudden expansion ($x/h = 2$). Calculations were made for the laminar flow mode based on numerical integration of the nonstationary Navier — Stokes equations. Various flow characteristics were determined at $Re = 100$ – 800 . Results were obtained for the longitudinal speed profiles in various channel sections and lengths of the primary and secondary vortices at various values of the Reynolds number after the step. The friction coefficient distribution on the channel lower side along its length is presented for various values of the Reynolds number. For the difference approximation of the initial equations, the control volume method was applied; relationship between speed and pressure was

Keywords

Navier — Stokes equations, flat channel with reverse step, separated flow, control volume method

found using the SIMPLE procedure. For numerical solution of the problem, the following QUICK schemes were introduced: McCormack's second-order accuracy, Warming — Cutler — Lomax's third-order accuracy and Abarbanel — Gotlieb — Turkel's fourth-order accuracy. To confirm correctness, numerical results were compared with the experimental data taken from the literature sources

Received 23.11.2021

Accepted 19.12.2022

© Author(s), 2023

REFERENCES

- [1] Blasius H. Laminare Stromung in Kanalen Wechselnder Breite. *Zeitschrift fur Math. und Phys.*, 1910, vol. 58, no. 10, pp. 225–233.
- [2] Honji H. The starting flow down a step. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 69, no. 2, pp. 229–240. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112075001413>
- [3] Sinkha S.P., Gupta A.K., Oberay M.M. Laminar separated flotation of steps and caverns. P. 1. Flow behind step. *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika*, 1981, vol. 19, no. 12, pp. 33–37 (in Russ.).
- [4] Armaly V.F., Durst F., Pereira J.C.F., et al. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 127, pp. 473–496. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112083002839>
- [5] Chang P.K. Separation of flow. Elsevier, 1970.
- [6] Gogish L.V., Stepanov G.Yu. Turbulentnye otryvnye techeniya [Turbulent separation of flow]. Moscow, Nauka Publ., 1979.
- [7] Le H., Moin P., Kim J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 330, pp. 349–374. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112096003941>
- [8] Durst F., Melling A., Whitelaw J.H. Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 64, iss. 1, pp. 111–118. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112074002035>
- [9] Cherdron W., Durst F., Whitelaw J.H. Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions. *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 84, iss. 1, pp. 13–31. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112078000026>
- [10] Macadno E.O., Hung T.-K. Computational and experimental study of a captive annular eddy. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 28, iss. 1, pp. 43–64. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112067001892>
- [11] Kumar A., Yajnik K.S. Internal separated flows at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1980, vol. 97, iss. 1, pp. 27–51. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112080002418>
- [12] Plotkin A. Calculations by the spectral method of some separated laminar flows in channels. *Aerokosmicheskaya tekhnika*, 1983, no. 7, pp. 75–85 (in Russ.).

- [13] Acrivos A., Schrader M.L. Steady flow in a sudden expansion at high Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 1982, vol. 25, iss. 6, pp. 923–930.
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.863844>
- [14] Kuon O., Pletcher R., Lyuis Dzh. Calculation of flows with sudden expansion using the boundary layer equations. *Teor. osnovy inzh. rasch.*, 1984, vol. 106, no. 3, pp. 116–123 (in Russ.).
- [15] Pletcher L. Limits of applicability of the boundary layer equations for calculating laminar flows with symmetric sudden expansion. *Teor. osnovy inzh. rasch.*, 1986, no. 2, pp. 284–294 (in Russ.).
- [16] Malikov Z.M., Madaliev M.E. New two-fluid turbulence model based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 24–39 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-24-39>
- [17] Lee Y.S., Smith L.C. Analysis of power-law viscous materials using complex stream, potential and stress functions. In: *Encyclopedia of Fluid Mechanics*. Vol. 1. Flow Phenomena and Measurement. Gulf, 1986, pp. 1105–1154.
- [18] Roache P.J. *Computational fluid dynamics*. Hermosa, 1972.
- [19] Taylor T.D., Ndefo E. Computation of viscous flow in a channel by the method of splitting. In: Holt M. (eds). *Proc. of the Second Int. Conf. on Num. Methods in Fluid Dynamics. Lecture Notes in Physics*, vol. 8. Berlin, Heidelberg, Springer, 1971, pp. 356–364. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-05407-3_51
- [20] Durst F., Peireira J.C.F. Time-dependent laminar backward-facing step flow in a two-dimensional duct. *J. Fluids Eng.*, 1988, vol. 110, iss. 3, pp. 289–296.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3243547>
- [21] Alleborn N., Nandakumar K., Raszillier H., et al. Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion. *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 330, pp. 169–188.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112096003382>
- [22] Brandt A., Jr. Dendy J.E., Ruppel H. The multigrid method for semi-implicit hydrodynamic codes. *J. Comput. Phys.*, 1980, vol. 34, iss. 3, pp. 348–370.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90094-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90094-7)
- [23] Hackbusch W. *Multigrid methods for applications*. Springer, 1985.
- [24] Lange C.F., Schäfer M., Durst F. Local block refinement with a multigrid flow solver. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2002, vol. 38, iss. 1, pp. 21–41.
DOI: <https://doi.org/10.1002/fld.202>
- [25] Kim J., Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier — Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 1985, vol. 59, iss. 2, pp. 308–323.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(85\)90148-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(85)90148-2)
- [26] Durst F., Peireira J.C.F., Tropea C. The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 248, pp. 567–581.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112093000916>

- [27] Kaiktsis L., Karniadakis G.E., Orszag S.A. Unsteadiness and convective instabilities in a two-dimensional flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 321, pp. 157–187. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112096007689>
- [28] Leonard B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1979, vol. 19, iss. 1, pp. 59–98. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90034-3](https://doi.org/10.1016/0045-7825(79)90034-3)
- [29] MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *AIAA Paper*, 1969, no. 354. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.1969-354>
- [30] Warming R.F., Kutler P., Lomax H. Second- and third-order noncentered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. *AIAA J.*, 1973, vol. 11, no. 2, pp. 189–196. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.50449>
- [31] Abarbanel S., Gottlieb D., Turkel E. Difference schemes with fourth order accuracy for hyperbolic equations. *J. Appl. Math.*, 1975, vol. 29, iss. 2, pp. 329–351. DOI: <https://doi.org/10.1137/0129029>
- [32] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987.
- [33] Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press, 1980.
- [34] Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1012–1028. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462820080066>
- [35] Erkinjon son M.M. Numerical calculation of an air centrifugal separator based on the SARC turbulence model. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2020, vol. 6, no. 5, pp. 1133–1140.
- [36] Malikov Z.M., Nazarov F.Kh. Study of an immersed axisymmetric turbulent jet in comparative analysis of turbulence models. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 2 (101), pp. 22–35 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-22-35>
- [37] Nazarov F.Kh. Comparing turbulence models for swirling flows. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 2 (95), pp. 25–36 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-2-25-36>

Madaliev M.E. — Cand. Sc., Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (F. Hodzhaeva ul. 31, Tashkent, 100125 Republic of Uzbekistan); Assistant Lecturer, Fergana Polytechnic Institute (Ferganskaya ul. 86, Fergana, 150107 Republic of Uzbekistan).

Please cite this article in English as:

Madaliev M.E. Numerical schemes comparison in solving the problem of laminar flow in the suddenly expanding channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 1 (106), pp. 4–22 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-1-4-22>